

УДК 539.3

О РЕШЕНИИ СТАТИЧЕСКИХ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПОЛУПОЛОСОВОГО ШТАМПА НА АНИЗОТРОПНОМ КОМПОЗИТЕ

© 2025 г. Академик РАН В. А. Бабешко^{1, 2, *}, О. В. Евдокимова²,
О. М. Бабешко¹, В. С. Евдокимов¹

Поступило 01.08.2024 г.

После доработки 01.08.2024 г.

Принято к публикации 07.10.2024 г.

Впервые методом блочного элемента строится точное решение статической контактной задачи о действии без трения жесткого штампа в форме полуполосы на анизотропный многослойный композитный материал. Ранее эти важные в конструкционной инженерной практике, электронике, физике, других областях задачи не были решены. Сложность при решении указанных контактных задач с анизотропией, в сравнении с изотропным случаем, состоит в трудности описания спектральных свойств таких математических объектов, как функции Грина и символы интегральных уравнений. Существующими численными методами удастся описывать поведение концентрации контактных напряжений на границе штампа в случаях изотропных материалов. Однако построить точное решение о распределении контактных напряжений в анизотропном случае под полуполосовым штампом вместе с особенностями на границе не удавалось. В работе впервые построено решение, отражающее реальное распределение контактных напряжений и их концентраций под штампом. Полученное решение стремится к решению, получаемому для полосы или четверти плоскости, когда полуполоса вырождается в эти области.

Ключевые слова: контактная задача, полуполосовой штамп, анизотропия, композит, метод блочного элемента, интегральные уравнения

DOI: 10.31857/S2686740025010088, **EDN:** GTNMEK

Анизотропные композиты являются новыми материалами с управляемыми свойствами, и их конструкционные свойства мало изучены. Инженерная практика использования новых материалов с анизотропией, создание элементной базы электроники, где используются полосковые линии передач, фильтры на поверхностных волнах, резонаторы, фазовращатели, иные устройства, выдвигают требования углубленного изучения свойств решений таких контактных задач. В сейсмологии, благодаря решениям этих задач, становится доступным поиск предвестников землетрясений в горных сейсмоопасных территориях, где горная гряда переходит в ложбину. Для решения этих контактных задач используется метод блочного элемента

применительно к интегральным уравнениям с разностным ядром. Основу для его более широкого применения дала публикация [1], в которой строго математически, на примере контактной задачи для полосового штампа, дано описание метода блочного элемента для анизотропного случая.

Следует отметить, что применения методов контактных задач в разных областях выполнены в работах [2–17]. Однако все они связаны с исследованиями для изотропных сред. В настоящей работе рассматривается более сложная контактная задача для полуполосового штампа на анизотропной среде, которая ранее никем не рассматривалась. В настоящей работе метод применяется для областей с кусочно-гладкой границей, содержащей две угловые точки, что потребовало его развитие для функций двух комплексных переменных. Развитым методом в работе впервые построено решение, отражающее реальное распределение

¹ Кубанский государственный университет, Краснодар, Россия

² Южный научный центр Российской академии наук, Ростов-на-Дону, Россия

* E-mail: babeshko41@mail.ru

контактных напряжений и их концентраций под штампом.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Интегральные уравнения о действии в статическом режиме полуполосового штампа на многослойную анизотропную среду (рис. 1) сводятся к решению интегрального уравнения вида [1, 18, 19]

$$K_q = \int_0^\infty \int_{-c}^c k(x - \xi, y - \eta) q(\xi, \eta) d\xi d\eta = f(x, y),$$

$$0 \leq x < \infty, \quad -c \leq y \leq c, \quad (1)$$

$$k(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty K(\alpha, \beta) e^{-i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta.$$

В общем случае функция $K(\alpha, \beta)$ — символ интегрального уравнения (1) — является комплекснозначной функцией двух комплексных переменных, может иметь особенности в виде полюсов и точек ветвления, не лежащих на контурах интегрирования. Предполагается, что существует минимальное положительное число $\varepsilon > 0$ такое, что в полосах $|\operatorname{Im} \alpha| < \varepsilon, |\operatorname{Im} \beta| < \varepsilon$, отсутствуют нули или полюса функции $K(\alpha, \beta)$. Таким свойством обладает функция $K(\alpha, \beta)$ в статических задачах. Она возникает при решении анизотропной граничной задачи в многослойной среде и является непрерывной, суммируемой на осях по обоим аргументам, с поведением на бесконечности вида

$$K(\alpha, \beta) = O(\alpha^{-1}), \quad \beta = \text{const}; \quad K(\alpha, \beta) = O(\beta^{-1}),$$

$$\alpha = \text{const}, \quad |\alpha|, |\beta| \rightarrow \infty. \quad (2)$$

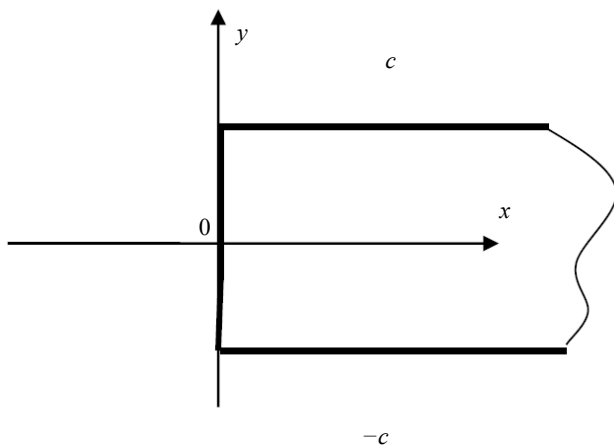


Рис. 1. Полуполосовый штамп имеет протяженность до бесконечности только справа.

Авторам статьи не известны работы, в которых бы исследовалось аналитически или численно интегральное уравнение (1). Близким к исследованию этого интегрального уравнения находится метод решения контактной задачи для полосового штампа [1]. Именно он предопределил подход, позволивший исследовать контактную задачу для полуполосового штампа.

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПОЛУПОЛОСОВОГО ШТАМПА

Применим для исследования методы блочно-го элемента, разработанные в [1].

Положим $\Omega(0 \leq x, |y| \leq c)$ — область контакта штампа с основанием. Введем в рассмотрение области Ω_{mn} вне штампа. Они задаются соотношениями

$$\Omega_{11}(0 \leq x, y \geq c), \quad \Omega_{22}(0 \leq x, y \leq -c),$$

$$\Omega_{12}(x \leq 0, y \geq 0), \quad \Omega_{21}(x \leq 0, y \leq 0).$$

Очевидно, эти области дополняют область контакта до всей плоскости. Продолжим уравнение (1) на всю плоскость введением дополнительных неизвестных. Введем в каждой области Ω_{mn} , как носители, новую неизвестную функцию $\Phi_{mn}(x, y)$. Ниже будем применять преобразование Фурье в следующей форме с прописными и строчными функциями:

$$\Phi_{mn}(\alpha, \beta) = \iint_{\Omega_{mn}} \phi_{mn}(\xi, \eta) e^{i(\alpha \xi + \beta \eta)} d\xi d\eta,$$

$$\phi_{mn}(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \Phi_{mn}(\alpha, \beta) e^{-i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta.$$

С учетом введения новых неизвестных интегральное уравнение (1) запишется в виде

$$\int_0^\infty \int_{-c}^c k(x - \xi, y - \eta) q(\xi, \eta) d\xi d\eta = f(x, y) +$$

$$+ \Phi_{11}(x, y) + \Phi_{12}(x, y) + \Phi_{21}(x, y) + \Phi_{22}(x, y),$$

$$0 \leq x < \infty, \quad -c \leq y \leq c.$$

Применим к интегральному уравнению вместе с введенными неизвестными функциями двойное преобразование Фурье. В результате получим справедливое в комплексных плоскостях α, β функциональное уравнение вида

$$K(\alpha, \beta) Q(\alpha, \beta) - \Phi_{11}(\alpha, \beta) - \Phi_{12}(\alpha, \beta) -$$

$$- \Phi_{21}(\alpha, \beta) - \Phi_{22}(\alpha, \beta) - F(\alpha, \beta) = 0. \quad (3)$$

Исследование будет состоять в преобразовании функционального уравнения (3) таким

образом, чтобы свести его к функциональному уравнению для полосового штампа, рассмотренного в [1]. Затем воспользоваться решением контактной задачи для четверти плоскости. В процессе исследования понадобятся операторы, позволяющие компактно осуществлять довольно громоздкие преобразования.

Таким образом, следуя [1], при исследовании будем использовать приведенные ниже операторы:

$$\begin{aligned} \{G(\alpha, \beta)\}_{+\alpha} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{G(\xi, \beta)}{\xi - \alpha} d\xi, \quad \alpha \in \Pi_{\alpha}^+, \\ \{G(\alpha, \beta)\}_{-\alpha} &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{G(\xi, \beta)}{\xi - \alpha} d\xi, \quad \alpha \in \Pi_{\alpha}^-, \\ \{G(\alpha, \beta)\}_{+\beta} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{G(\alpha, \eta)}{\eta - \beta} d\eta, \quad \beta \in \Pi_{\beta}^+, \\ \{G(\alpha, \beta)\}_{-\beta} &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{G(\alpha, \eta)}{\eta - \beta} d\eta, \quad \beta \in \Pi_{\beta}^-, \\ K_{+\alpha}(\alpha, \beta) &= \exp \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{\ln K(\xi, \beta)}{\xi - \alpha} d\xi, \quad \alpha \in \Pi_{\alpha}^+, \\ K_{-\alpha}(\alpha, \beta) &= \exp \left(-\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{\ln K(\xi, \beta)}{\xi - \alpha} d\xi \right), \quad \alpha \in \Pi_{\alpha}^-, \\ K_{+\beta}(\alpha, \beta) &= \exp \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{\ln K(\alpha, \eta)}{\eta - \beta} d\eta, \quad \beta \in \Pi_{\beta}^+, \\ K_{-\beta}(\alpha, \beta) &= \exp \left(-\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{\ln K(\alpha, \eta)}{\eta - \beta} d\eta \right), \quad \beta \in \Pi_{\beta}^-. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь Π_{α}^+ , Π_{α}^- — комплексные области выше (+) и ниже (–) вещественной оси $o\alpha$, комплексной плоскости α , а Π_{β}^+ , Π_{β}^- — области верхняя (+) и нижняя (–) вещественной оси β комплексной плоскости β .

С помощью этих операторов удастся компактно записывать преобразования и решения уравнений (1).

ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ

Применим алгоритм решения функционального уравнения (3), осуществив факторизацию символа K в виде произведения $K = K_{-\alpha}K_{+\alpha}$ по параметру α . В результате функциональное уравнение принимает вид

$$\begin{aligned} K_{+\alpha}Q - K_{-\alpha}^{-1}\Phi_{11} - K_{-\alpha}^{-1}\Phi_{12} - K_{-\alpha}^{-1}\Phi_{21} - \\ - K_{-\alpha}^{-1}\Phi_{22} - K_{-\alpha}^{-1}F_{11} = 0, \quad F_{11} \equiv F. \end{aligned} \quad (5)$$

В соответствии с алгоритмом метода факторизации далее применяется операция факторизации всех членов функционального уравнения в виде суммы. При этом составляющие разделяются на регулярные в верхней и нижней полуплоскостях. После этого применяется теорема Лиувилля об аналитическом продолжении функций, совпадающих на континууме. Здесь учитывается поиск классического решения для правой части уравнения $f(x, y)$, имеющей непрерывными первыми производными по обоим параметрам [1]. В распавшемся функциональном уравнении на два, осуществим, с учетом аналитических свойств функций Φ_{mn} , анализ аналитических свойств всех членов функциональных уравнений в комплексной плоскости β . Выполнив преобразования, с учетом носителей, в результате приходим к соотношениям

$$\begin{aligned} K_{+\alpha}Qe^{-i\beta c} - \{K_{-\alpha}^{-1}\Phi_{11}\}_{+\alpha}e^{-i\beta c} - \\ - \{K_{-\alpha}^{-1}\Phi_{22}\}_{+\alpha}e^{-i\beta c} - \{K_{-\alpha}^{-1}F\}_{+\alpha}e^{-i\beta c} = 0, \\ K_{+\alpha}Qe^{i\beta c} - \{K_{-\alpha}^{-1}\Phi_{11}\}_{+\alpha}e^{i\beta c} - \\ - \{K_{-\alpha}^{-1}\Phi_{22}\}_{+\alpha}e^{i\beta c} - \{K_{-\alpha}^{-1}F\}_{+\alpha}e^{i\beta c} = 0. \end{aligned}$$

Введя обозначения

$$\{K_{-\alpha}^{-1}\Phi_{11}\}_{+\alpha}e^{-i\beta c} = T_{+\beta}, \quad \{K_{-\alpha}^{-1}\Phi_{22}\}_{+\alpha}e^{i\beta c} = T_{-\beta},$$

получим систему уравнений вида

$$\begin{aligned} K_{+\alpha}Qe^{-i\beta c} - T_{+\beta} - T_{-\beta}e^{-2i\beta c} - \\ - \{K_{-\alpha}^{-1}F\}_{+\alpha}e^{-i\beta c} = 0, \quad Qe^{-i\beta c} = \{Qe^{-i\beta c}\}_{-\beta}, \\ K_{+\alpha}Qe^{i\beta c} - T_{+\beta}e^{2i\beta c} - T_{-\beta} - \\ - \{K_{-\alpha}^{-1}F_{11}\}_{+\alpha}e^{i\beta c} = 0, \quad Qe^{i\beta c} = \{Qe^{i\beta c}\}_{+\beta}. \end{aligned} \quad (6)$$

Рассмотрим функциональные уравнения (6) в комплексной плоскости переменного β . Выберем те уравнения, которые содержат неизвестные, $T_{+\beta}$, $T_{-\beta}$ и факторизуем в виде произведения по параметру β коэффициент $K_{+\alpha}$, стоящий при функции Q , с учетом свойств носителя. Тогда получим функциональные уравнения вида

$$\begin{aligned}
& K_{+\alpha-\beta} Q e^{-i\beta c} - K_{+\alpha+\beta}^{-1} T_{+\beta} - K_{+\alpha+\beta}^{-1} T_{-\beta} e^{-2i\beta c} - \\
& - K_{+\alpha+\beta}^{-1} \left\{ K_{-\alpha}^{-1} F \right\}_{+\alpha} e^{-i\beta c} = 0, \\
& K_{+\alpha+\beta} Q e^{i\beta c} - K_{+\alpha-\beta}^{-1} T_{+\beta} e^{2i\beta c} - K_{+\alpha+\beta}^{-1} T_{-\beta} - \\
& - K_{+\alpha-\beta}^{-1} \left\{ K_{-\alpha}^{-1} F \right\}_{+\alpha} e^{i\beta c} = 0.
\end{aligned}$$

Выполним для всех членов этих функциональных уравнений факторизацию по параметру β в виде суммы. Разделим в соответствии с алгоритмом метода факторизации члены, полученные после факторизации, на регулярные в верхней и нижней полуплоскостях. Затем по теореме Лиувилля об аналитическом продолжении и оценке поведения на бесконечности будем иметь систему функциональных уравнений в форме

$$\begin{aligned}
& K_{+\alpha-\beta} Q e^{-i\beta c} - \left\{ K_{+\alpha+\beta}^{-1} T_{-\beta} e^{-2i\beta c} \right\}_{-\beta} - \\
& - \left\{ K_{+\beta}^{-1} \left\{ K_{-\alpha}^{-1} F \right\}_{+\alpha} e^{-i\beta c} \right\}_{-\beta} = 0, \\
& K_{+\alpha+\beta} Q e^{i\beta c} - \left\{ K_{+\alpha-\beta}^{-1} T_{+\beta} e^{2i\beta c} \right\}_{+\beta} - \\
& - \left\{ K_{+\alpha-\beta}^{-1} \left\{ K_{-\alpha}^{-1} F \right\}_{+\alpha} e^{i\beta c} \right\}_{+\beta} = 0, \\
& K_{+\alpha+\beta} T_{+\beta} + \left\{ K_{+\alpha+\beta}^{-1} T_{-\beta} e^{-2i\beta c} \right\}_{+\beta} + \\
& + \left\{ K_{+\beta}^{-1} \left\{ K_{-\alpha}^{-1} F_{11} \right\}_{+\alpha} e^{-i\beta c} \right\}_{+\beta} = 0, \\
& K_{+\alpha-\beta} T_{-\beta} + \left\{ K_{+\alpha-\beta}^{-1} T_{+\beta} e^{2i\beta c} \right\}_{-\beta} + \\
& + \left\{ K_{+\alpha-\beta}^{-1} \left\{ K_{-\alpha}^{-1} F_{11} \right\}_{+\alpha} e^{i\beta c} \right\}_{-\beta} = 0.
\end{aligned} \tag{7}$$

Введем новые неизвестные соотношения:

$$K_{+\alpha+\beta}^{-1} T_{+\beta} = X_+, \quad K_{+\alpha-\beta}^{-1} T_{-\beta} = X_-.$$

В результате приходим к системе интегральных уравнений, детально изученной в [1]:

$$\begin{aligned}
& X_+ + \left\{ K_{+\alpha+\beta}^{-1} K_{\alpha-\beta} X_- e^{-2i\beta c} \right\}_{+\beta} + \\
& + \left\{ K_{+\alpha+\beta}^{-1} \left\{ K_{-\alpha}^{-1} F \right\}_{+\alpha} e^{-i\beta c} \right\}_{+\beta} = 0, \\
& X_- + \left\{ K_{+\alpha-\beta}^{-1} K_{\alpha+\beta} X_+ e^{2i\beta c} \right\}_{-\beta} + \\
& + \left\{ K_{+\alpha-\beta}^{-1} \left\{ K_{-\alpha}^{-1} F \right\}_{+\alpha} e^{i\beta c} \right\}_{-\beta} = 0.
\end{aligned}$$

Считаем, ради упрощения, функцию $K(\alpha, \beta)$ четной по обоим параметрам, что имеет место во многих анизотропных материалах. Введем следующие преобразования. Под интегралами в первом уравнении заменим параметр η на $-\eta$ и изменим направление интегрирования. Во втором уравнении заменим β на $-\beta$. После этого введем обозначение новой функции, регулярной по параметру β в верхней полуплоскости $X_-(\alpha, -\beta) = Y_+(\alpha, \beta)$.

Тогда последнюю систему функциональных уравнений можно свести к виду фредгольмовых интегральных уравнений с искомыми функциями на контуре Γ_2 . Этот контур лежит в верхней полуплоскости выше вещественной оси на расстояние ε и снизу огибает все особенности подынтегральной функции, лежащие в верхней полуплоскости:

$$\begin{aligned}
& X_+(\alpha, \beta) = \\
& = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{K_{+\alpha-\beta}^{-1}(\alpha, \eta) K_{+\alpha+\beta}(\alpha, \eta) Y_+(\alpha, \eta) e^{2i\eta c}}{\eta + \beta} d\eta - \\
& - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{K_{-\alpha}^{-1} F e^{i\eta c}}{\eta + \beta} d\eta, \\
& Y_+(\alpha, \beta) = \\
& = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{K_{+\alpha-\beta}^{-1}(\alpha, \eta) K_{+\alpha+\beta}(\alpha, \eta) X_+(\alpha, \eta) e^{2i\eta c}}{\eta + \beta} d\eta + \\
& + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{K_{-\alpha}^{-1} F e^{i\eta c}}{\eta + \beta} d\eta, \quad \beta \in \Pi_{\beta}^+.
\end{aligned}$$

Сложив и вычтя уравнения этой системы, приходим к отдельным уравнениям для неизвестных вида

$$\begin{aligned}
& Z_{\pm}(\alpha, \beta) = \\
& = \pm \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{K_{+\alpha-\beta}^{-1}(\alpha, \eta) K_{+\alpha+\beta}(\alpha, \eta) Z_{\pm}(\alpha, \eta) e^{2i\eta c}}{\eta + \beta} d\eta - \\
& - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{K_{-\alpha}^{-1} F(-\alpha, -\eta) e^{i\eta c}}{\eta + \beta} d\eta \pm \\
& \pm \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{K_{-\alpha}^{-1} F(\alpha, \eta) e^{i\eta c}}{\eta + \beta} d\eta, \quad \beta \in \Pi_{\beta}^+, \tag{9} \\
& Z_+(\alpha, \beta) = X_+(\alpha, \beta) + Y_+(\alpha, \beta), \\
& Z_-(\alpha, \beta) = X_+(\alpha, \beta) - Y_+(\alpha, \beta).
\end{aligned}$$

Как доказано в [1], эти уравнения решаются точно методом Ньютона–Канторовича на всем интервале изменения параметра $0 < c < \infty$.

Благодаря наличию экспоненциальной, убывающей на контуре Γ_2 функции, обратный оператор оказывается аналитической функцией параметра c , что позволяет, применив метод последовательных приближений Ньютона–Канторовича, аналитически, как единую функцию, продолжать решение на весь указанный диапазон его изменения.

Из уравнения (3) применением алгоритма метода факторизации, объединив все функции, регулярные в нижней полуплоскости комплексной плоскости α , получим еще одно уравнение, имеющее вид

$$K_{-\alpha}^{-1}(\Phi_{12} + \Phi_{21}) + \left\{ K_{-\alpha}^{-1}\Phi_{11} \right\}_{-\alpha} + \left\{ K_{-\alpha}^{-1}\Phi_{22} \right\}_{-\alpha} + \left\{ K_{-\alpha}^{-1}F \right\}_{-\alpha} = 0.$$

Отсюда находим неизвестные $\Phi_{12} + \Phi_{21}$, выраженные с помощью Φ_{11} , Φ_{22} :

$$\Phi_{12} + \Phi_{21} = -K_{-\alpha} \left\{ K_{-\alpha}^{-1}\Phi_{11} \right\}_{-\alpha} - K_{-\alpha} \left\{ K_{-\alpha}^{-1}\Phi_{22} \right\}_{-\alpha} - K_{-\alpha} \left\{ K_{-\alpha}^{-1}F \right\}_{-\alpha}.$$

Таким образом, найдены все неизвестные Φ_{mn} .

Подставив найденные значения Φ_{mn} в функциональное уравнение (3), будем иметь возможность записать точное решение интегрального уравнения в виде

$$Q = K^{-1}F + K^{-1}\Phi_{11} + K^{-1}\Phi_{22} - K^{-1}(\Phi_{12} + \Phi_{21}).$$

Выполнив несложные преобразования, получаем точное решение $q(x, y)$ контактной задачи для полуполосы в форме

$$Q = K^{-1}F + K^{-1}\Phi_{11} + K^{-1}\Phi_{22} - K_{+\alpha}^{-1} \left\{ K_{-\alpha}^{-1}F \right\}_{-\alpha} - K_{+\alpha}^{-1} \left\{ K_{-\alpha}^{-1}\Phi_{11} \right\}_{-\alpha} - K_{+\alpha}^{-1} \left\{ K_{-\alpha}^{-1}\Phi_{22} \right\}_{-\alpha}, \quad (10)$$

$$q(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} Q(\alpha, \beta) e^{-i(\alpha x - \beta y)} d\alpha d\beta.$$

ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ РЕШЕНИЯ

1. Покажем, что интегральное уравнение (1) точно удовлетворяется построенным решением $q(x, y)$. Внесем функцию $q(x, y)$ в интегральное уравнение (1), представленное в виде

$$\begin{aligned} Kq &= \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K(\alpha, \beta) e^{-i[\alpha(x-\xi) + \beta(y-\eta)]} q(\xi, \eta) d\xi d\eta d\alpha d\beta = \\ &= f(x, y). \end{aligned}$$

После использования обозначений (1) получим представление

$$Kq = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K(\alpha, \beta) Q(\alpha, \beta) e^{-i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta = f(x, y).$$

Внесем в эту формулу $Q(\alpha, \beta)$ из (10) и исследуем интеграл слева. В результате несложного анализа исключения членов, обращающих интеграл в ноль, убеждаемся, что получается соотношение, доказывающее удовлетворение уравнения

$$Kq = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\alpha x + \beta y)} F(\alpha, \beta) d\alpha d\beta = f(x, y),$$

$$x, y \in \Omega.$$

2. В том случае, когда основание, на которое действует полуограниченный штамп, оказывается изотропным, представление решения получается в результате вычисления контурных интегралов по контуру Γ_2 . Эта операция выполняется как при решении интегральных уравнений, так и при вычислении всех членов, входящих в интегралы, описывающие решение.

3. Для исследования особенностей решения в угловых точках границы штампа формула (10) преобразуется и принимает вид

$$\begin{aligned} q(x, y) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} Q(\alpha, \beta) e^{-i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta, \\ Q &= K^{-1}F - K_{+\alpha}^{-1} \left\{ K_{-\alpha}^{-1}F \right\}_{-\alpha} + \\ &+ K_{+\alpha}^{-1} \left\{ K_{-\alpha}^{-1}\Phi_{11} \right\}_{+\alpha} + K_{+\alpha}^{-1} \left\{ K_{-\alpha}^{-1}\Phi_{22} \right\}_{+\alpha}. \end{aligned}$$

Это представление позволяет изучить основные свойства решения. Первый член справа представляет вырожденную составляющую решения. Она описывает решение во внутренней части области Ω вдали от границ. Второй член справа описывает поведение контактных напряжений вблизи торца полуполосы. Концентрация контактных напряжений на этой границе описывается функцией $x^{-1/2}$, что следует из анализа такого же соотношения в [19].

Для исследования концентрации контактных напряжений в угловых точках полуполосы приводится один из способов исследования свойств этих зон. Заметим, что из (9) следует зависимость точного решения только от значений Φ_{11} , Φ_{22} , линейно связанных с X_+ , X_- . Поэтому воспользуемся представлением решения, следующего из формулы (8):

$$Q = e^{i\beta c} K_{+\alpha-\beta}^{-1} \left\{ K_{+\alpha+\beta}^{-1} K_{+\alpha-\beta} X_- e^{-2i\beta c} \right\}_{-\beta} + \\ + e^{i\beta c} K_{+\alpha-\beta}^{-1} \left\{ K_{+\beta}^{-1} \left\{ K_{-\alpha}^{-1} F_{11} \right\}_{+\alpha} e^{-i\beta c} \right\}_{-\beta}, \\ Q = e^{-i\beta c} K_{+\alpha+\beta}^{-1} \left\{ K_{+\alpha-\beta}^{-1} K_{+\alpha+\beta} X_+ e^{2i\beta c} \right\}_{+\beta} - \\ - e^{-i\beta c} K_{+\alpha+\beta}^{-1} \left\{ K_{+\alpha-\beta}^{-1} \left\{ K_{-\alpha}^{-1} F_{11} \right\}_{+\alpha} e^{i\beta c} \right\}_{+\beta}.$$

Заметим, что имеют место свойства

$$K_{+\alpha+\beta}^{-1} K_{+\alpha-\beta} = O(1), \quad K_{+\alpha-\beta}^{-1} K_{+\alpha+\beta} = O(1), \\ X_{\pm} = O(\alpha^{-1}, \beta^{-1}), \quad \beta \rightarrow \infty.$$

Для выяснения концентрации контактных напряжений в угловых точках оценим, например, интеграл

$$q_1(x, y) = \\ = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[e^{-i\beta c} K_{+\alpha+\beta} \left\{ K_{+\alpha-\beta}^{-1} K_{+\alpha+\beta} X_+ e^{2i\beta c} \right\}_{+\beta} - \right. \\ \left. - e^{-i\beta c} K_{+\alpha+\beta} \left\{ K_{+\alpha-\beta}^{-1} \left\{ K_{-\alpha}^{-1} F_{11} \right\}_{+\alpha} e^{i\beta c} \right\}_{+\beta} \right] e^{-i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta$$

при предельных переходах $x \rightarrow 0$, $y \rightarrow c$ и $x \rightarrow 0$, $y \rightarrow -c$, $x, y \in \Omega$.

Приняв на время анализа сдвиги в локальных зонах угловых точек вида $c - y = y_1$, в первом случае, и $y + c = y_2$, получим для обеих угловых точек требование в углах $x \rightarrow 0$, $y_n \rightarrow 0$, $n = 1, 2$.

В качестве примера покажем правило формирования первого члена подынтегральной функции для случая, когда символ $K(\alpha, \beta)$, обладающий свойством (2), имеет вид

$$K(\alpha, \beta) = (\alpha^2 + \beta^2 + A^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad A > 0.$$

При осуществлении факторизации по какому-нибудь параметру остальные находятся на вещественной оси. Факторизовав функцию $K(\alpha, \beta)$ по параметру α на верхнюю полуплоскость, получаем

$$K_{+\alpha}(\alpha, \beta) = \left[\alpha + i(\beta^2 + A^2)^{\frac{1}{2}} \right]^{-\frac{1}{2}} = O\left(\alpha^{-\frac{1}{2}}\right), \quad A > 0.$$

Факторизацию функции $K_{+\alpha}(\alpha, \beta)$ по параметру β на правую комплексную полуплоскость можно выполнить точно, в интегральном виде, нормализовав $K_{+\alpha}(\alpha, \beta)$ по β на бесконечности. Для этого рассмотрим функцию, стремящуюся к единице при $|\beta| \rightarrow \infty$. Имеем

$$G(\alpha, \beta) = \sqrt{i}(\beta^2 + B^2)^{\frac{1}{4}} K_{+\alpha}(\alpha, \beta) \rightarrow 1,$$

$$|\beta| \rightarrow \infty, \quad B = \text{const},$$

отсюда

$$k_{+\alpha+\beta}(\alpha, \beta) = (\beta + iB)^{-\frac{1}{4}} \exp \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{\ln G(\alpha, \eta)}{\eta - \beta} d\eta, \\ \beta \in \Pi_{\beta}^+.$$

Получаем оценку

$$k_{+\alpha+\beta}(\alpha, \beta) \rightarrow C(\beta + iB)^{-\frac{1}{4}} = O\left(\beta^{-\frac{1}{4}}\right), \quad |\beta| \rightarrow \infty.$$

Совершенно аналогично оцениваются

$$k_{\beta}(\alpha, \beta) = O\left(\beta^{-\frac{1}{2}}\right), \quad K_{+\beta+\alpha}(\alpha, \beta) = O\left(\alpha^{-\frac{1}{4}}\right).$$

Внося эти оценки в (5), получим в результате несложного анализа

$$q_0(x, y) = O\left(r^{-\frac{3}{4}}\right), \quad r = \sqrt{x^2 + y_n^2}.$$

На рис. 2 приводится график особенностей в вершине клина для разных его растворов 2θ , $0 < \theta < \pi$, приближенно вычисленных в [19]. На рис. 2 необходимо рассматривать случай $\theta/\pi = 0.25$. При $\varepsilon = 0$ трение штампа с основанием отсутствует, что соответствует рассматриваемому здесь случаю. Для оценки в [19] использованы асимптотические приближения функций Бесселя. Из рис. 2 видно, что полученное в настоящей работе значение $r^{-3/4}$ концентрации контактных напряжений в угловой точке близко к вычисленному приближенным методом в [19].

4. Поведение решения контактной задачи для полуполосы при росте ее относительной ширины $c \gg 1$ строится применением асимптотических оценок при вычислении интегралов, входящих в решение. Это достигается либо вычислением интегралов по вычетам, в том числе многомерным, если их представления позволяют это выполнить, либо вычислением контурных интегралов методом перевала, стационарной фазы, методом Лапласа или иными асимптотическими подходами.

Для оценки поведения решения контактной задачи для полуполосы при уменьшении ее относительной ширины $c \ll 1$ применяется подход, предложенный в [1]. В указанной работе это исследование, в случае полосового штампа, выполнялось на основе анализа свойств решения, полученного при обращении системы интегральных уравнений, полностью совпадающих

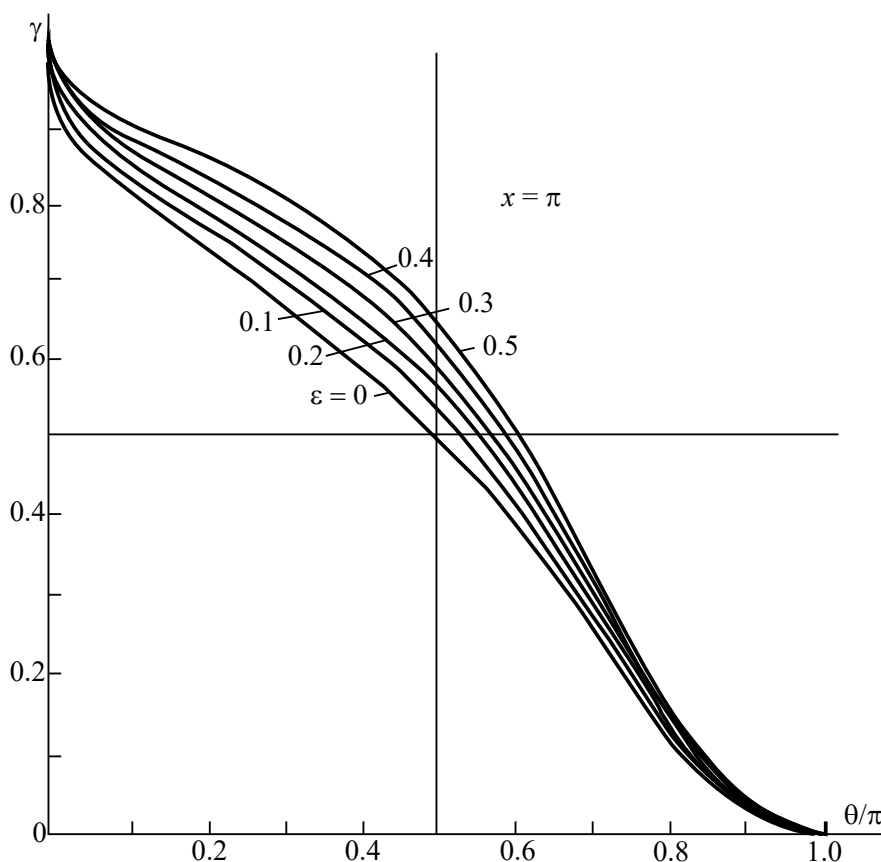


Рис. 2. Параметр γ особенности в угловой точке штампа для разных коэффициентов трения ε . Для сравнения с результатом статьи надо взять $\varepsilon = 0$, $\theta/\pi = 0.25$.

с (9). В процессе исследования применялся метод Ньютона–Канторовича. Результат исследования дает поведение решения для контактных напряжений при малой относительной ширине полуполосы в виде

$$q(x, y) = \frac{p(x)}{\sqrt{c^2 - y^2} \ln c}, \quad c \ll 1.$$

Это полностью совпадает с решением контактной задачи в статическом случае для узких полос, выполненным в [18].

ВЫВОДЫ

Впервые построено точное решение статической контактной задачи о действии без трения жесткого штампа в форме полуполосы на анизотропный композит многослойной среды. Исследованы свойства решения, изучена концентрация контактных напряжений на границе штампа и в его угловых точках. Построенное решение позволяет получать его асимптотические представления как для относительно широких

полуполос, так и для узких. Этот подход открыл дорогу принципиально важному случаю решения контактной задачи для деформируемых штампов.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда и Кубанского научного фонда, региональный проект 24-11-20006.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М., Евдокимов В.С. К теории контактных задач для композитных сред с анизотропной структурой // Доклады РАН. Физика, технические науки. ДАН. 2024. Т. 518. С. 23–30.
2. Горячева И.Г. Механика фрикционного взаимодействия М.: Наука, 2001. 478 с.
3. Баженов В.Г., Игумнов Л.А. Методы граничных интегральных уравнений и граничных элементов. М.: Физматлит, 2008. 352 с.

4. *Калинчук В.В., Белянкова Т.И.* Динамические контактные задачи для предварительно напряженных тел. М.: Физматлит, 2002. 240 с.
5. *Колесников В.И., Беляк О.А.* Математические модели и экспериментальные исследования — основа конструирования гетерогенных антифрикционных материалов. М.: Физматлит, 2021. 265 с.
6. *Papangelo A., Ciavarella M., Barber J.R.* Fracture Mechanics implications for apparent static friction coefficient in contact problems involving slip-weakening laws // *Proc. Roy. Soc (London)*. 2015. A 471. Iss. 2180. Article Number 20150271.
7. *Ciavarella M.* The generalized Cattaneo partial slip plane contact problem // *Int. J. Solids Struct.* I — Theory, II — Examples. 1998. V. 2349–2378.
8. *Zhou S., Gao X.L.* Solutions of half-space and half-plane contact problems based on surface elasticity // *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*. 2013. V. 64. P. 145–166.
9. *Guler M.A., Erdogan F.* The frictional sliding contact problems of rigid parabolic and cylindrical stamps on graded coatings // *Int. J. Mech. Sci.* 2007. V. 49. P. 161–182.
10. *Ke L.-L., Wang Y.-S.* Two-Dimensional Sliding Frictional Contact of Functionally Graded Materials // *Eur. J. Mech. A. Solids*. 2007. V. 26. P. 171–188.
11. *Almqvist A., Sahlin F., Larsson R., Glavatskih S.* On the dry elasto-plastic contact of nominally flat surfaces // *Tribology International*. 2007. V. 40. № 4. P. 574–579.
12. *Almqvist A.* An lcp solution of the linear elastic contact mechanics problem. 2013. <http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/43216>
13. *Andersson L.E.* Existence results for quasistatic contact problems with Coulomb friction // *Appl. Math. Optim.* 2000. V. 42. P. 169–202.
14. *Cocou M.A* class of dynamic contact problems with Coulomb friction in viscoelasticity // *Nonlinear Analysis: Real World Applications*. 2015. V. 22. P. 508–519.
15. *Мангушев Р.А., Карлов В.Д., Сахаров И.И., Осокин А.И.* Основания и фундаменты. М.: Изд-во АСВ, 2014. 392 с.
16. *Tsodik E.* Analysis of structures in elastic foundations // *Ross Publishing*, 2013. 585 p.
17. *Айзикович С.М., Кудиш И.И.* Приближенное аналитическое решение задачи о полосовом электроде на поверхности пьезоэлектростатической полуплоскости с функционально-градиентным пьезоэлектростатическим покрытием // *Проблемы прочности и пластичности*. 2019. Т. 81. № 4. С. 393–401.
18. *Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М., 1974. 456 с.
19. *Бабешко В.А., Глушков Е.В., Зинченко Ж.Ф.* Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М.: Наука, 1989. 344 с.

ON SOLVING STATIC CONTACT PROBLEMS FOR A SEMI-STRIP STAMP ON AN ANISOTROPIC COMPOSITE

Academician of the RAS V. A. Babeshko^{a,b}, O. V. Evdokimova^b,
O. M. Babeshko^a, V. S. Evdokimov^a

^aKuban State University, Krasnodar, Russia

^bSouthern Scientific Center of the Russian Academy of Sciences, Rostov-on-Don, Russia

For the first time, the exact solution of the static contact problem of the frictionless action of a rigid die in the form of a semi-strip on an anisotropic multilayer composite material is constructed by the block element method. Previously, these important tasks in structural engineering practice, electronics, physics, and other fields were not solved. The difficulty in solving these contact problems with anisotropy, in comparison with the isotropic case, consists in the difficulty of describing the spectral properties of such mathematical objects as Green's functions and symbols of integral equations. Using existing numerical methods, it is possible to describe the behavior of the concentration of contact stresses at the stamp boundary in cases of isotropic materials. However, it was not possible to construct an accurate solution for the distribution of contact stresses in the anisotropic case under a semi-strip stamp, together with features at the boundary. For the first time, a solution was constructed reflecting the real distribution of contact stresses and their concentrations under the stamp. The solution obtained in the work tends to the solutions obtained for a strip or a quarter of the plane when the semi-strip degenerates into these areas.

Keywords: contact problem, semi-strip stamp, anisotropy, composite, block element method, integral equations