

УДК 534.231.2

## ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ГАЗА СОЛИТОНОВ УРАВНЕНИЯ ТИПА КОРТЕВЕГА – ДЕ ВРИЗА

© 2025 г. Е. Н. Пелиновский<sup>1, 2, \*</sup>, С. Н. Гурбатов<sup>3, \*\*</sup>

Представлено академиком РАН О.В. Руденко 22.09.2024 г.

Поступило 22.09.2024 г.

После доработки 22.09.2024 г.

Принято к публикации 03.10.2024 г.

Исследуются статистические свойства разреженного солитонного газа на примере уединенных волн – решений обобщенного уравнения Кортевега – де Вриза. Показано, что существует критическая плотность солитонного газа вне зависимости от типа нелинейности в обобщенном уравнении Кортевега – де Вриза, что связано с отталкиванием солитонов одинаковой полярности. Вычислены первые два статистических момента волнового поля (среднее значение и дисперсия), являющиеся одновременно инвариантами уравнения типа Кортевега – де Вриза. Рассчитаны плотности функции распределения разреженного солитонного газа. Отмечается особенность в этих функциях в области малых значений поля из-за перекрытия экспоненциальных хвостов солитонов.

*Ключевые слова:* солитоны, солитонный газ, солитонная турбулентность, уравнение Кортевега – де Вриза

DOI: 10.31857/S2686740025010068, EDN: GTYIVW

Свойство солитонов сохранять свою идентичность в столкновениях друг с другом сразу же привело к понятиям солитонного газа и солитонной турбулентности, а также к необходимости статистического описания данных процессов. В. Е. Захаров был первым, кто предложил кинетическое уравнение для солитонного газа в рамках уравнения Кортевега – де Вриза, учитывая парное взаимодействие солитонов [1]. Эти идеи стали особенно популярными в последнее время [2–5]. Начали проводиться специальные эксперименты [6, 7], а также появились сведения о наблюдении солитонной турбулентности в поле морских волн [8, 9].

Наряду с этим стало проводиться прямое стохастическое моделирование нелинейных эволюционных уравнений, которое свободно от всех ограничений, неизбежно появляющихся в кинетической теории солитонов [5, 10, 11]. При

этом могут быть рассмотрены процессы, которые протекают в рамках и неинтегрируемых уравнений, в которых все же солитоны могут жить достаточно долго [12, 13]. При этом возникает проблема задания начальных условий, соответствующих солитонному газу без примеси дисперсионных хвостов. Формально в рамках интегрируемых моделей здесь могут быть использованы  $N$ -солитонные решения с достаточно большим количеством солитонов. Наличие в этих решениях экспоненциальных множителей делает задачу вычислительно сложной, хотя и здесь есть определенные результаты [5, 11]. Более просто рассмотреть разреженный солитонный газ, когда в начальный момент времени солитоны не перекрываются (хотя от экспоненциально малых перекрытий не удастся избавиться), и задавать начальное поле в виде линейной суммы невзаимодействующих солитонов со случайными амплитудами и фазами. Поскольку скорости солитонов зависят от их амплитуд, с течением времени солитоны многократно взаимодействуют друг с другом, приводя к стационарности солитонной турбулентности. В случае неинтегрируемых уравнений солитоны излучают в процессе взаимодействия, и газ перестает быть чисто солитонным, однако при малом излучении его можно рассматривать как солитонный [12, 13]. При таком задании начального поля

<sup>1</sup> Институт прикладной физики им А.В. Гапонова-Грехова Российской академии наук, Нижний Новгород, Россия

<sup>2</sup> Национальный исследовательский университет – Высшая школа экономики, Нижний Новгород, Россия

<sup>3</sup> Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Россия

\* E-mail: pelinovsky@ipfran.ru

\*\* E-mail: gurb@rf.unn.ru

функции распределения элементов поля определяются численно, и пока нет теории, которая бы позволила бы объяснить ее свойства. Поэтому в качестве первого шага мы поставили цель рассмотреть функции распределения инициированного солитонного газа, связав их со статистической амплитуд солитонов.

### СОЛИТОНЫ УРАВНЕНИЯ ТИПА КОРТЕВЕГА – ДЕ ВРИЗА

В качестве рабочей модели мы выберем обобщенное уравнение Кортевега – де Вриза со степенной нелинейностью ( $\alpha > 1$ )

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^\alpha}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0. \quad (1)$$

Частными случаями уравнения (1) являются каноническое уравнение Кортевега – де Вриза ( $\alpha = 2$ ), модифицированное уравнение Кортевега – де Вриза ( $\alpha = 3$ ), а также неинтегрируемое уравнение Шамеля ( $\alpha = 3/2$ ); последнее уравнение активно используется для описания волн в плазме, электрических цепях и метаматериалах (см., например, последние работы [14, 15]).

Уравнение (1) имеет три сохраняющиеся величины: массу, энергию (импульс) и Гамильтониан), из которых нам понадобятся первые два:

$$\begin{aligned} M(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t) dx = \text{const}, \\ E(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} u^2(x, t) dx = \text{const}. \end{aligned} \quad (2)$$

Нахождение уединенных решений уравнения (1) для любой амплитуды является тривиальной задачей, поэтому мы приведем здесь выражения для солитонов на нулевом пьедестале без вывода ( $\alpha > 1$ ):

$$u(x, t) = A \operatorname{sech}^p[B(x - Vt - x_0)], \quad p = \frac{2}{\alpha - 1}, \quad (3)$$

где  $A$  – амплитуда солитона,  $B^{-1}$  – характерная ширина солитона,  $V$  – его скорость и  $x_0$  – начальное положение солитона. Параметры солитона связаны между собой:

$$B = \frac{\alpha - 1}{\sqrt{2(\alpha + 1)}} A^{\frac{\alpha - 1}{2}}, \quad V = \frac{2}{\alpha + 1} A^{\alpha - 1}. \quad (4)$$

### СТАТИСТИЧЕСКИЕ МОМЕНТЫ СОЛИТОННОГО ГАЗА

Солитоны имеют экспоненциальные хвосты и являются строгими решениями уравнения (1)

на бесконечной оси. Учитывая, что энергия в экспоненциальных хвостах мала, можно считать, что солитон является решением уравнения (1) и на конечном, достаточно большом интервале. Поэтому достаточно рассматривать большой интервал  $L$ , в котором можно поместить много солитонов, и наложить периодические граничные условия, так что солитоны, двигаясь по кругу, будут многократно взаимодействовать друг с другом. Предполагая газ солитонов разреженным, зададим в начальный момент последовательность непересекающихся уединенных волн со случайными амплитудами и фазами:

$$u(x, t = 0) = \sum_{i=1}^N F(x - x_i; A), \quad (5)$$

где за функцию  $F$  обозначен солитон (3),  $N$  – число солитонов в расчетной области, а амплитуды и фазы представлены случайными числами<sup>1</sup>. Как правило, в численных расчетах фазы выбираются детерминировано с определенным шагом, чтобы импульсы были разделены в пространстве, хотя это и не обязательно. Один из примеров начального распределения солитонов в уравнении Шамеля показан на рис. 1 [13]. В процессе взаимодействия фазы солитонов перемешаются, так что волновое поле забудет их начальное значение. Поэтому реально в последовательности (5) имеется только одна случайная величина – амплитуда солитона, и требуется найти вероятностные характеристики волнового поля через заданное распределение амплитуд солитонов или решить обратную задачу.

Прежде чем решать эту задачу, вычислим первые два статистических момента солитонного газа, являющиеся инвариантами уравнения (1), и следовательно сохраняющиеся во времени. Первый инвариант в случае последовательности разделенных уединенных волн пропорционален среднему значению поля

$$\langle u \rangle = \frac{M}{L} = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^N \left\langle \int_{-\infty}^{+\infty} F(x; A_i) dx \right\rangle, \quad (6)$$

где интеграл вычисляется от детерминированной функции при постоянной амплитуде, и в силу малости ширины солитона по сравнению с размером расчетной области мы заменили конечные пределы интегрирования на бесконечные. Интеграл в (6) легко вычисляется, следовательно,

<sup>1</sup> Заметим, что схожие проблемы возникают и в турбулентности Бюргерса, где градиент поля скорости описывается импульсами типа (3), см. [16, 17].

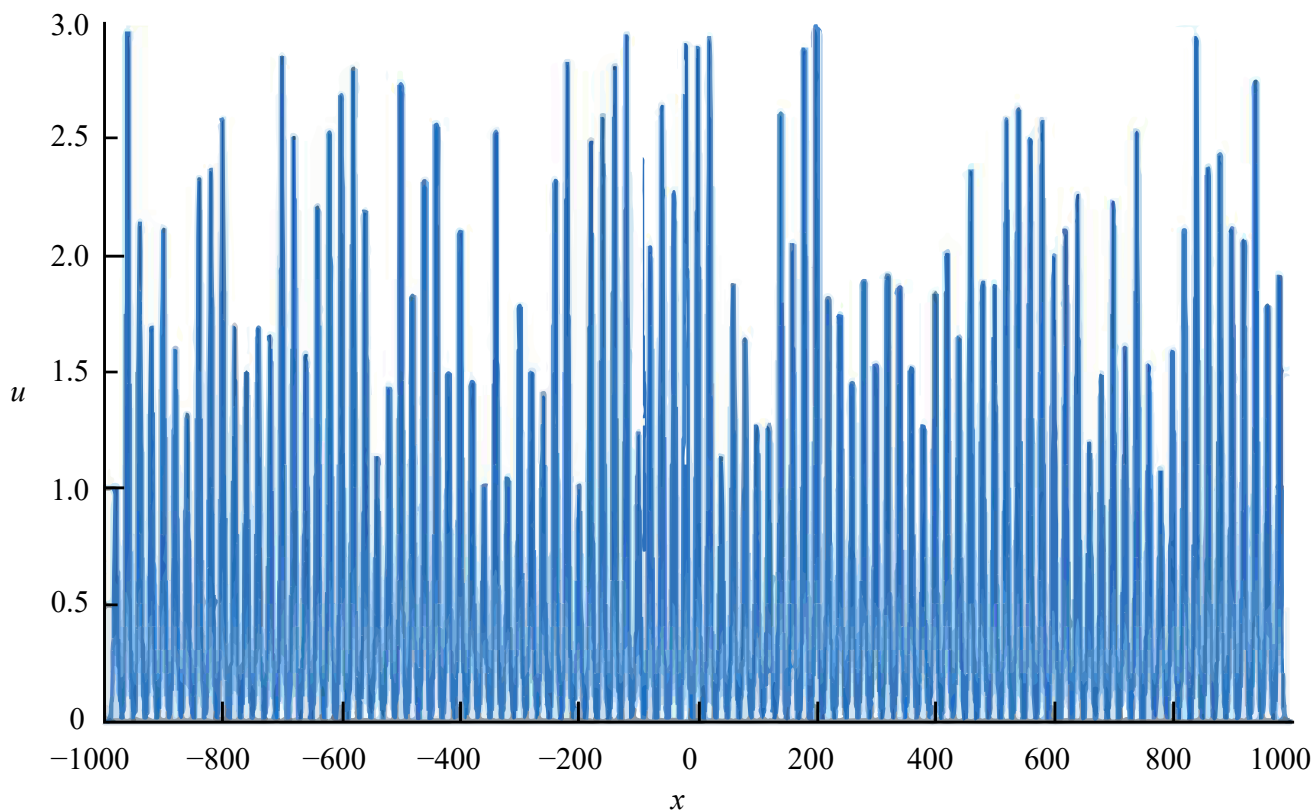


Рис. 1. Одна из реализаций Шамелевского солитонного газа [13].

$$\langle u \rangle \sim \rho \left\langle A^{\frac{3-\alpha}{2}} \right\rangle, \quad (7)$$

где  $\rho = N/L$  — плотность солитонов, а коэффициент пропорциональности есть определенный интеграл от гиперболической функции в некоторой степени.

Второй центральный момент (дисперсия)

$$\sigma^2 = \langle u^2 - \langle u \rangle^2 \rangle = \langle u^2 \rangle - \langle u \rangle^2 \quad (8)$$

также не меняется со временем, поскольку определяется первыми двумя инвариантами обобщенного уравнения Кортевега — де Вриза, и, в частности, второй инвариант есть

$$\langle u^2 \rangle = \frac{E}{L} = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^N \left\langle \int_{-\infty}^{+\infty} F^2(x; A_i) dx \right\rangle. \quad (9)$$

В результате дисперсия солитонного газа включает в себя два слагаемых

$$\sigma^2 \sim \rho \left\langle A^{\frac{5-\alpha}{2}} \right\rangle - \rho^2 \left( \left\langle A^{\frac{3-\alpha}{2}} \right\rangle \right)^2, \quad (10)$$

причем каждое из слагаемых имеет собственный числовой коэффициент, зависящий от  $\alpha$ . Поскольку дисперсия обязана быть положительной

величиной, то плотность газа должна быть меньше критической:

$$\rho < \rho_{cr} \sim \frac{\left\langle A^{\frac{5-\alpha}{2}} \right\rangle}{\left( \left\langle A^{\frac{3-\alpha}{2}} \right\rangle \right)^2}, \quad (11)$$

и газ должен быть достаточно разреженным. Этот результат впервые был получен для канонического уравнения Кортевега — де Вриза ( $\alpha = 2$ ) в работах [18, 19], но, как следует из проведенного анализа, он универсален и применим к любому газу однополярных солитонов.

Таким образом, зная статистику амплитуд уединенных волн в начальный момент времени, можно рассчитать первые два статистических момента волнового поля, причем они не меняются со временем. Заметим, что даже если бы мы учитывали случайные фазы (но без перекрытия уединенных волн), то статистика фаз не влияет на статистические моменты волнового поля. Более того, отсюда также следует, что однополярный газ должен быть достаточно разреженным для сохранения солитонной структуры поля.

# ВЕРОЯТНОСТНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ОДИНАКОВЫХ СОЛИТОНОВ СО СЛУЧАЙНЫМИ ФАЗАМИ

В экспериментах обычно считают процесс эргодическим, и плотность вероятности находят через относительную длину пребывания процесса в интервале  $(u, u + du)$ :

$$W(u) = \frac{1}{L} \sum_n \left| \frac{dx_n}{du} \right|. \quad (12)$$

В частности, такой подход использовался при анализе статистики ударных волн в нелинейной акустике [20, 21]. Поскольку мы рассматриваем достаточно разреженный солитонный газ, то каждое слагаемое в (12) определяется формой отдельного солитона. Учитывая, что солитон симметричен относительно вертикальной оси, для каждого значения  $u(x)$  имеется два интервала  $dx_n$  на переднем и заднем его склонах, так что для отдельного солитона

$$f(u; A) = \left| \frac{dx_n}{du} \right| = \frac{2}{|dF/dx|} = \frac{\sqrt{2(1+\alpha)}}{u\sqrt{A^{\alpha-1} - u^{\alpha-1}}}, \quad (13)$$

причем функция  $f(u)$  одинаковая для всех солитонов. В результате плотность вероятности последовательности одинаковых по амплитуде солитонов со случайными фазами есть

$$W(u; A) = \rho \frac{\sqrt{2(1+\alpha)}}{u\sqrt{A^{\alpha-1} - u^{\alpha-1}}}, \quad (14)$$

где, как и ранее,  $\rho = N/L$  – плотность газа солитонов. Эта функция для  $A = 1$  и  $\rho = 1/30$  представлена на рис. 2. Ее минимум приходится на  $(u/A)_{\min} = [2/(1+\alpha)]^{1/(\alpha-1)}$ . Обратим внимание, что плотность функции распределения не интегрируется при  $u \rightarrow 0$ , что связано с бесконечной продолжительностью хвостов солитонов, которые хотя и малы, но занимают все пространство, и все они дают вклад в области малых значений поля. Отметим, что аналогичная проблема вероятности возникает при анализе случайных Римановых волн на стадии многопоточковых режимов [22]. Одним из способов избавления от этой расходимости есть “обрезание” хвостов солитона на расстояниях, когда соседние солитоны начинают пересекаться. Для периодической последовательности волн с равными интервалами между ними их надо обрезать на расстоянии  $l_* = l/2$ , где  $l = L/N = 1/\rho$ . Поскольку расстояние между солитонами случайны, более конструктивен другой путь. Распределение (14) мы обрезаем в области малых значений  $u_{\min}$ , где ее величина выбирается из условия, чтобы интеграл от плотности вероятности  $W(u)$  равнялся единице. Из (14) имеем следующее уравнение для определения  $u_{\min}$ :

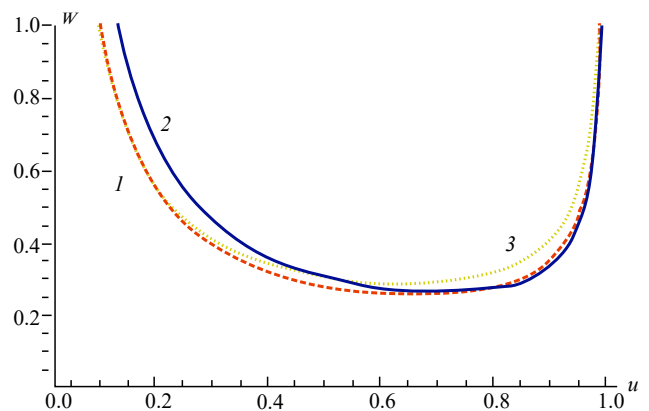
$$Q(u_{\min}; A) = \rho \int_{u_{\min}}^A \frac{\sqrt{2(1+\alpha)} du}{u\sqrt{A^{\alpha-1} - u^{\alpha-1}}} = 1. \quad (15)$$

Очевидно, что с уменьшением плотности газа граница  $u_{\min}$  сдвигается в область все более малых значений, а с ростом амплитуды – в сторону больших значений. Поскольку для разреженных солитонов  $\rho \ll 1$ , это очень маленькие значения по сравнению с амплитудой солитона, то приближение (14) с условием (15) описывает как основную часть плотности вероятности, так и моменты распределения. Рассчитанные распределения солитонного газа для модифицированного уравнения Кортевега – де Вриза ( $\alpha = 3$ ), уравнения Кортевега – де Вриза ( $\alpha = 2$ ), и уравнения Шамеля ( $\alpha = 3/2$ ) представлены на рис. 2. Как видим, кривые солитонных ансамблей в разных эволюционных уравнениях близки между собой, и такое распределение можно считать универсальным.

Хотя плотность функции распределения пришлось обрезать в области малых значений поля, на статистические моменты солитонного газа это не сказывается, так как после умножения на  $u$  или  $u^2$  все интегралы становятся сходящимися. Именно поэтому нам удалось вычислить среднее значение поля и дисперсию солитонного газа (7) и (10), не прибегая к процедуре обрезания функций  $W(u)$ .

## ВЕРОЯТНОСТНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ РАЗРЕЖЕННОГО СОЛИТОННОГО ГАЗА

В случае последовательности солитонов со случайными амплитудами нам необходимо суммировать (13)



**Рис. 2.** Распределения (14) для уравнения Кортевега – де Вриза ( $\alpha = 2$ , 1), модифицированного уравнения Кортевега – де Вриза ( $\alpha = 3$ , 2) и уравнения Шамеля ( $\alpha = 3/2$ , 3).



$$W(u) = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^N f(u; A_i) = \rho \sum_m f(u; A_m) p_m, \quad (16)$$

где  $p_m = m/N$  – частота появления  $m$ -й амплитуды в ряде из  $N$  солитонов. Считая, что солитонов достаточно много, дискретный ряд (16) можно заменить интегралом

$$W(u) = \rho \int_u^{+\infty} f(u; A) W_A(A) dA, \quad (17)$$

где  $W(A)$  – плотность распределения амплитуд и интегрирование производится по всем волнам, в которых  $A > u$ . В результате получаем следующее выражение для плотности функции распределения:

$$W(u) = \rho \frac{\sqrt{2(1+\alpha)}}{u} \int_u^{+\infty} \frac{W_A(A) dA}{\sqrt{A^{\alpha-1} - u^{\alpha-1}}}. \quad (18)$$

Обратим внимание на отмеченную выше расходимость плотности распределения солитонного газа в области малых значений поля, так что эту функцию надо рассматривать при  $u > u_{\min}$ , где минимальное значение определено формулой (15).

В качестве примеров рассмотрим солитонный газ в рамках нескольких важных эволюционных уравнений. В частности, плотность газа в рамках канонического уравнения Кортевега – де Вриза ( $\alpha = 2$ ) находится через простой интеграл

$$W(u; 2) = \rho \frac{\sqrt{6}}{u} \int_u^{+\infty} \frac{W_A(A) dA}{\sqrt{A - u}}, \quad (19)$$

и в случае равномерного распределения амплитуд солитонов в диапазоне  $[0 \div 1]$  записывается в виде

$$W(u; 2) = \rho \frac{2\sqrt{6}}{u} \sqrt{1 - u}, \quad u_{\min} < u < 1. \quad (20)$$

Аналогично для модифицированного уравнения Кортевега – де Вриза ( $\alpha = 3$ ) плотность функции распределения есть

$$W(u; 3) = \rho \frac{\sqrt{8}}{u} \int_u^{+\infty} \frac{W_A(A) dA}{\sqrt{A^2 - u^2}}, \quad (21)$$

которая в случае равномерного распределения амплитуд в диапазоне  $[0 \div 1]$  вычисляется явно:

$$W(u; 3) = \rho \frac{\sqrt{8}}{u} \ln \frac{1 + \sqrt{1 - u^2}}{u}. \quad (22)$$

Среди неинтегрируемых нелинейных эволюционных уравнений популярно уравнение Шамеля, для которого  $\alpha = 3/2$ . В этом случае

распределение солитонного газа описывается интегралом

$$W(u; 3/2) = \rho \frac{\sqrt{5}}{u} \int_u^{+\infty} \frac{W(A) dA}{\sqrt{A^{1/2} - u^{1/2}}}. \quad (23)$$

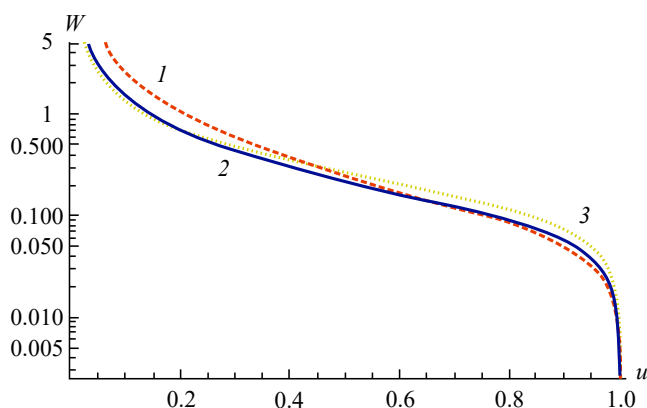
В случае равномерного распределения амплитуд в интервале  $[0 \div 1]$  интеграл вычисляется аналитически:

$$W(u; 3/2) = \frac{\rho 4\sqrt{5}}{3u} \sqrt{1 - \sqrt{u}} (1 + 2\sqrt{u}). \quad (24)$$

Все три функции представлены на рис. 3. Это убывающие функции, близкие между собой в области больших амплитуд.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе выполнен анализ плотности функции распределения последовательности солитонов со случайными фазами и амплитудами. В общем виде вычислены первые два момента волнового поля, которые, являясь инвариантами обобщенного уравнения Кортевега – де Вриза, не меняются со временем. Функции распределения определены на начальной стадии эволюции солитонного газа, когда уединенные волны еще разделены в пространстве. Они вычислены аналитически для равномерного распределения амплитуд и представляют собой монотонно спадающие функции. В широком диапазоне изменения степени нелинейности эти кривые близки между собой. Отмечается проблема расчета распределения малых значений поля в солитонном газе из-за перекрытия экспоненциально малых хвостов солитонов и необходимости соответствующего



**Рис. 3.** Плотность распределения солитонного газа в рамках уравнения Кортевега – де Вриза ( $\alpha = 2$ , 1), модифицированного уравнения Кортевега – де Вриза ( $\alpha = 3$ , 2) и уравнения Шамеля ( $\alpha = 3/2$ , 3) в случае равномерного распределения амплитуд в интервале  $[0 \div 1]$ .  $\rho = 1/30$ .

их “обрезания”. Теоретические функции распределения волнового поля неплохо объясняют наблюдаемые в численных экспериментах [10, 13].

# ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследования ЕНП выполнены в рамках госзадания № FFUF-2024-0026 — ИПФ “Исследование эффектов сильной нелинейности в геофизических системах и биотканях” и в рамках проекта “Международное академическое сотрудничество” НИУ ВШЭ.

# СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Захаров В.Е.* Кинетическое уравнение для солитонов // ЖЭТФ. 1971. Т. 60. С. 993–1000.
2. *El G.A.* Soliton gas in integrable dispersive hydrodynamics // J. Stat. Mech. 2021. V. 11. 114001. <https://doi.org/10.1088/1742-5468/ac0f6d>
3. *Bonnemain T., Doyon B., El G.* Generalized hydrodynamics of the KdV soliton gas // J. Phys. A: Math. Theor. 2022. V. 55. 374004. <https://doi.org/10.1088/1751-8121/ac8253>
4. *Congy T., El G., Tovbis R.A.* Dispersive hydrodynamics of soliton condensates for the Korteweg–de Vries Equation // J. Nonlinear Sci. 2023. V. 33. 104. <https://doi.org/10.1007/s00332-023-09940-y>
5. *Suret P., Randoux S., Gelash A., Agafontsev D., Doyon B., El G.* Soliton gas: theory, numerics and experiments // Physical Review E. 2024, V. 109. № 6. 061001. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.109.061001>
6. *Redor I., Barthelemy E., Michallet H., Onorato M., Mordant N.* Experimental evidence of a hydrodynamic soliton gas // Physical Review Letters. 2019, V. 122. № 21. 214502. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.122.214502>
7. *Fache L., Damart H., Copie F., Bonnemain T., Congy T., Roberti G., Suret P., El G., Randoux S.* Dissipation-driven emergence of a soliton condensate in a nonlinear electrical transmission line // arXiv:2407.02874v1 [nlin.PS]. 2024. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2407.02874>
8. *Costa A., Osborne A.R., Resio D.T., Alessio S., Chiriv E., Saggese E., Bellomo K., Long C.E.* Soliton turbulence in shallow water ocean surface waves // Phys. Rev. Lett. 2014. V. 113. 108501. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.113.108501>
9. *Osborne A.R., Resio D.T., Costa A., de Leon S.P., Chiriv E.* Highly nonlinear wind waves in Currituck Sound: dense breather turbulence in random ocean waves // Ocean Dynamics. 2019. V. 31. P. 187–219. <https://doi.org/10.1007/s10236-018-1232-y>
10. *Shurgalina E.G., Pelinovsky E.N.* Nonlinear dynamics of a soliton gas: modified Korteweg–de Vries equation framework // Physics Letters A. 2016, V. 380. P. 2049–2053. <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2016.04.023>
11. *Gelash A., Agafontsev D.S.* Strongly interacting soliton gas and formation of rogue waves // Phys. Rev. E. 2018. V. 98. 042210. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.98.042210>
12. *Dutykh D., Pelinovsky E.* Numerical simulation of a solitonic gas in KdV and KdV-BBM equations // Physics Letters A 2014, V. 378, P. 3102–3110. <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2014.09.008>
13. *Flamarion M.V., Pelinovsky E.N., Didenkulova E.* Non-integrable soliton gas: the Schamel equation framework // Chaos, Solitons & Fractals. 2024. V. 180. 114495. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2024.114495>
14. *Schamel H., Chakrabarti N.* On the evolution equations of nonlinearly permissible, coherent hole structures propagating persistently in collisionless plasmas // Ann. Phys. 2023. V. 535. 2300102. <https://doi.org/10.1002/andp.202300102>
15. *Могилевич Л.И., Блинков Ю.А., Попова Е.В., Попов В.С.* Уединенные волны деформации в двух коаксиальных оболочках из материала с комбинированной нелинейностью, образующих стенки каналов кольцевого и круглого сечения, заполненных вязкой жидкостью // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2024. Т. 32. № 4. С. 521–540. <https://doi.org/10.18500/0869-6632-003115>
16. *Гурбатов С.Н., Малахов А.Н., Саичев А.И.* Нелинейные случайные волны в средах без дисперсии. М.: Наука, 1990. 216 с.
17. *Гурбатов С.Н., Руденко О.В., Саичев А.И.* Волны и структуры в нелинейных средах без дисперсии. Приложения к нелинейной акустике. М.: Физматлит, 2008. 496 с.
18. *Шургалина Е.Г., Пелиновский Е.Н.* Динамика ансамбля нерегулярных волн в прибрежной зоне. Нижний Новгород: НГТУ, 2015. 179 с.
19. *El G.A.* Critical density of a soliton gas // Chaos. 2016. V. 26. 023105. <https://doi.org/10.1063/1.4941372>
20. *Руденко О.В., Чиркин А.С.* О статистике шумовых разрывных волнах в нелинейных средах // ДАН СССР. 1975. Т. 225. № 3. С. 520–523.
21. *Руденко О.В.* Взаимодействие интенсивных шумовых волн // Успехи физ наук. 1986. Т. 149. № 3. С. 413–447. <https://doi.org/10.3367/UFNr.0149.198607c.0413>
22. *Гурбатов С.Н., Пелиновский Е.Н.* О вероятностных распределениях римановой волны и интеграла от нее // Доклады РАН. Физика, технические науки. 2020. Т. 493. № 1. С. 18–22. <https://doi.org/10.31857/S2686740020040070>

## DISTRIBUTION FUNCTIONS OF GAS OF SOLITONS OF KORTEWEG – DE VRIES-TYPE EQUATION

**E. N. Pelinovsky<sup>a,b</sup>, S. N. Gurbatov<sup>c</sup>**

<sup>a</sup>*Gaponov-Grekhov Institute of Applied Physics of the Russian Academy of Sciences, Nizhny Novgorod, Russia*

<sup>b</sup>*National Research University – Higher School of Economics, Nizhny Novgorod, Russia*

<sup>c</sup>*National Research Nizhny Novgorod State University named after N.I. Lobachevsky, Nizhny Novgorod, Russia*

Presented by Academician of the RAS O.V. Rudenko

The statistical properties of a rarefied soliton gas are studied using solitary waves – solutions of the generalized Korteweg – de Vries equation as an example. It is shown that there is a critical density of a soliton gas regardless of the type of nonlinearity in the generalized Korteweg – de Vries equation, which is associated with the repulsion of solitons of the same polarity. The first two statistical moments of the wave field (the mean value and the dispersion), which are simultaneously invariants of the Korteweg – de Vries-type equation, are calculated. The densities of the distribution function of a rarefied soliton gas are calculated. A feature in these functions in the region of small field values due to the overlap of the exponential tails of the solitons is noted.

*Keywords:* solitons, soliton gas, soliton turbulence, Korteweg – de Vries equation