ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. ФИЗИКА, ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ, 2024, том 519, с. 54–56

МЕХАНИКА

УДК 539.3

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ПОДТВЕРЖДЕНИЕ ВЗАИМООБРАТНОСТИ ФУНКЦИЙ ПОЛЗУЧЕСТИ И РЕЛАКСАЦИИ В ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ВЯЗКОУПРУГОСТИ

© 2024 г. Д. В. Георгиевский[1,2,*]

Представлено академиком РАН Р. Ф. Ганиевым 27.05.2024 г.

Поступило 27.05.2024 г.
После доработки 27.05.2024 г.
Принято к публикации 05.08.2024 г.

Представлена схема квазистатического эксперимента в линейно вязкоупругом изотропном цилиндрическом слое, где имеет место состояние, в котором одновременно в двух ортогональных друг другу направлениях реализуются сдвиговая ползучесть и сдвиговая релаксация. Внешняя поверхность слоя неподвижна, а определенным образом задавая на внутренней его поверхности касательные перемещения и сдвиговые напряжения и проводя на этой же поверхности измерения оставшихся компонент, можно экспериментально подтвердить интегральные соотношения взаимообратности функций сдвиговой ползучести и сдвиговой релаксации.

Ключевые слова: вязкоупругость, ползучесть, релаксация, кручение, осевой сдвиг, установочный эксперимент, взаимообратные определяющие соотношения

DOI: 10.31857/S2686740024060093, **EDN:** HVGTBG

В работе [1] в рамках интегральных определяющих соотношений для линейных изотропных вязкоупругих сред с ядрами разностного типа в случае нерелаксирующего объема предложены возможные, дополняющие известные, установочные эксперименты по определению ядер операторов $\breve{g}_\beta$ Ильюшина. Также предложены аналогичные схемы установочных экспериментов для нахождения ядер операторов $\breve{h}_\gamma$, в определенном смысле сопряженных с $\breve{g}_\beta$.

Ниже описывается схема возможного эксперимента в линейно вязкоупругом теле с напряженно-деформируемым состоянием, в котором одновременно в разных сдвиговых направлениях реализуются ползучесть и релаксация. Проводя комбинированный сдвиг при определенным образом заданных граничных условиях и осуществляя измерения на одной из поверхностей тела, можно экспериментально подтвердить (проверить) интегральные соотношения взаимообратности функций ползучести и релаксации.

1. Рассмотрим квазистатическое деформирование однородного упругого цилиндрического слоя в области

$$\Omega = \{a < r < b,\ \ 0 \leqslant \theta < 2\pi,\ \ -\infty < z < \infty\}, \qquad (1)$$

где (r, θ, z) — связанная с осью слоя цилиндрическая система координат. Массовые силы отсутствуют, а на поверхностях $r = a$ и $r = b$ заданы следующие физические компоненты вектора перемещений и тензора напряжений:

$$\begin{gathered} r = a:\ \ u_r \equiv 0,\ \ u_\theta = u_0(t),\ \ \sigma_{rz} = P_0(t); \\ r = b:\ \ u_r = u_\theta = u_z \equiv 0, \end{gathered} \qquad (2)$$

где $u_0(t)$ и $P_0(t)$ — известные функции времени, обеспечивающие квазистатичность напряженно-деформированного состояния в Ω.

Нетрудно найти [1] точное аналитическое решение краевой задачи линейной теории упругости в области (1) с граничными условиями (2). Это решение представляет собой суперпозицию двух не зависящих друг от друга $(r\theta)$- и (rz)-сдвигов. Выпишем ненулевые физические компоненты вектора пере-

[1] *Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия*
[2] *Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского Российской академии наук, Москва, Россия*
[*] *E-mail: georgiev@mech.math.msu.su*

мещений и тензоров деформаций и напряжений:

$$u_\theta = \frac{a(b^2 - r^2)}{r(b^2 - a^2)}\, u_0, \quad \varepsilon_{r\theta} = -\frac{ab^2}{r(b^2 - a^2)}\, u_0,$$
$$\sigma_{r\theta} = -\frac{2\mu a b^2}{r(b^2 - a^2)}\, u_0, \quad u_z = \frac{aP_0}{\mu} \ln\frac{r}{b}, \tag{3}$$
$$\varepsilon_{rz} = \frac{a}{2\mu r} P_0, \quad \sigma_{rz} = \frac{a}{r} P_0,$$

где μ — модуль сдвига упругого материала.

Пользуясь принципом Вольтерры линейной теории вязкоупругости [2, 3], из решения (3) можно получить решение квазистатической краевой задачи с граничными условиями (2) для материала с определяющими соотношениями

$$\sigma_{\alpha\beta}(t) = \int_0^t R(t-\tau)\, d\varepsilon_{\alpha\beta}(\tau),$$
$$\varepsilon_{\alpha\beta}(t) = \int_0^t \Pi(t-\tau)\, d\sigma_{\alpha\beta}(\tau), \tag{4}$$

где пара индексов $(\alpha\beta)$ принимает значения $(r\theta)$ и (rz), $R(t)$ — функция сдвиговой релаксации, $\Pi(t)$ — функция сдвиговой ползучести. Величины $u_\theta(r,t)$, $\varepsilon_{r\theta}(r,t)$ и $\sigma_{rz}(r,t)$, в выражениях для которых отсутствует упругий модуль μ, останутся теми же, что и в (3), а для остальных компонент имеем

$$\sigma_{r\theta}(r,t) = -\frac{ab^2}{r(b^2-a^2)} \int_0^t R(t-\tau)\, du_0(\tau),$$
$$u_z(r,t) = 2a \ln\frac{r}{b} \int_0^t \Pi(t-\tau)\, dP_0(\tau), \tag{5}$$
$$\varepsilon_{rz}(r,t) = \frac{a}{r} \int_0^t \Pi(t-\tau)\, dP_0(\tau).$$

Положим, что в эксперименте на комбинированный $(r\theta)$-(rz)-сдвиг вязкоупругого цилиндрического слоя при заданных $u_0(t)$ и $P_0(t)$ возможно непосредственное измерение и вычисление компонент $\sigma_{r\theta}(a,t)$ и $u_z(a,t)$, которые, с другой стороны, из соотношений (5) представляются в виде

$$\sigma_{r,\theta}(a,t) = -\frac{b^2}{a(b^2-a^2)} \int_0^t R(t-\tau)\, du_0(\tau),$$
$$u_z(a,t) = -2a \ln\frac{a}{b} \int_0^t \Pi(t-\tau)\, dP_0(\tau). \tag{6}$$

2. Возьмем два идентичных толстостенных цилиндрических слоя (образца) со связями сдвиговых напряжений и деформаций (4) и последовательно проведем сначала с одним, а затем с другим два эксперимента. В эксперименте 1 с первым образцом зададим

$$u_0(t) = u_0^0 h(t), \quad P_0(t) = P_0^0 h(t), \tag{7}$$

где $h(t)$ — функция Хевисайда. Заметим, что в одном данном эксперименте реализуются релаксация применительно к $(r\theta)$-сдвигу и ползучесть применительно к (rz)-сдвигу. При этом

$$\sigma_{r\theta}(a,t) = -\frac{b^2 u_0^0}{a(b^2-a^2)} R(t),$$
$$u_z^0(a,t) = -2aP_0^0\, \Pi(t) \ln\tfrac{b}{a}, \tag{8}$$

причем, как предполагалось выше, функции $\sigma_{r\theta}(a,t)$ и $u_z^0(a,t)$ могут быть найдены из измерений.

В эксперименте 2 со вторым образцом зададим

$$u_0(t) = u_z^0(a,t), \quad P_0(t) = \sigma_{r\theta}^0(a,t), \tag{9}$$

где правые части взяты именно из эксперимента 1, и будем измерять функции времени $\sigma_{r\theta}(a,t)$ и $u_z(a,t)$, которые обозначим $\widetilde{\sigma}_{r\theta}(a,t)$ и $\widetilde{u}_z(a,t)$ соответственно.

Эти же две функции можно определить и в результате подстановки (8) в (6):

$$\widetilde{\sigma}_{r\theta}(a,t) \equiv \gamma P_0^0, \;\; \widetilde{u}_z(a,t) \equiv \gamma u_0^0, \;\; \gamma = \frac{2b^2}{b^2-a^2} \ln\frac{b}{a}. \tag{10}$$

Безразмерный параметр γ, как видно, зависит только от отношения радиусов внешней и внутренней границ слоя и не зависит от вида функций $\Pi(t)$ и $R(t)$, т.е. от свойств вязкоупругого материала в рамках линейных определяющих соотношений (4). При получении формул (10), естественно, была использована интегральная взаимообратность функций ползучести и релаксации [2]:

$$\int_0^t \Pi(t-\tau)\, dR(\tau) = \int_0^t R(t-\tau)\, d\Pi(\tau) = 1. \tag{11}$$

Из (10) следует, что величины $\widetilde{\sigma}_{r\theta}$ и $\widetilde{u}_z$ от времени не зависят, а с точностью до одного и того же коэффициента γ совпадают с выбранными в эксперименте 1 постоянными P_0^0 и u_0^0. Совпадение в эксперименте 2 функций $\widetilde{\sigma}_{r\theta}(a,t)$ и $\widetilde{u}_z(a,t)$ с теоретическими постоянными значениями γP_0^0 и γu_0^0 естественно интерпретировать как экспериментальное подтверждение взаимообратности (11) функций сдвиговой ползучести и сдвиговой релаксации в линейной теории вязкоупругости.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа поддержана Российским научным фондом (грант 24-21-20008).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Георгиевский Д.В.* Схемы экспериментов по определению ядер некоторых разностных операторов для сред с нерелаксирующим объемом // ПММ. 2023. Т. 87. Вып. 1. С. 45–52.
2. *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.

3. *Ильюшин А.А., Победря Б.Е.* Основы математической теории термовязкоупругости. М.: Наука, 1970. 280 с.
4. *Георгиевский Д.В.* Модели теории вязкоупругости. М.: ЛЕНАНД, 2023. 144 с.

EXPERIMENTAL CONFIRMATION OF THE RECIPROCITY OF CREEP AND RELAXATION FUNCTIONS IN THE LINEAR THEORY OF VISCOELASTICITY

D. V. Georgievskii[a,b]

[a] *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*
[b] *Ishlinskii Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

Presented by Academician of the RAS R. F. Ganiev

A scheme of a quasistatic experiment in a linear viscoelastic isotropic cylindrical layer is presented, where there is a state in which shear creep and shear relaxation are realized simultaneously in two orthogonal directions to each other. The external surface of the layer is stationary, and by setting tangential displacements and shear stresses on its inner surface in a certain way and measuring the remaining components on the same surface, it is possible to experimentally confirm the integral relations of reciprocity of the shear creep and shear relaxation functions.

Keywords: viscoelasticity, creep, relaxation, torsion, axial shear, set experiment, reciprocal constitutive relations