

СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОГО БЫСТРОДЕЙСТВИЯ ДЛЯ ОБРАТНОГО МАЯТНИКА С ДИНАМИЧЕСКИМ ГАСИТЕЛЕМ

© 2024 г. И. М. Ананьевский^{1,*}

Представлено академиком РАН Ф. Л. Черноусько 02.07.2024 г.

Поступило 03.07.2024 г.

После доработки 03.07.2024 г.

Принято к публикации 11.08.2024 г.

Рассматривается линейная система четвертого порядка, которая описывает динамику линеаризованного обратного маятника, управляемого с помощью активного динамического гасителя. Управляющей переменной служит ограниченная по модулю сила взаимодействия маятника и подвижной массы гасителя. С использованием принципа максимума Понтрягина решена задача синтеза оптимального управления, приводящего систему в состояние покоя за минимальное время.

Ключевые слова: линейная управляемая система, обратный маятник, динамический гаситель, оптимальное быстродействие, принцип максимума

DOI: 10.31857/S2686740024060065, EDN: HVZKXZ

ВВЕДЕНИЕ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается задача о стабилизации в вертикальном положении жесткого стержня с закрепленным на верхнем конце грузом (перевернутый маятник) с помощью активного динамического гасителя, подвижная масса которого поступательно перемещается вдоль горизонтальной прямой. Управляющей величиной служит сила взаимодействия груза и массы гасителя. Отклонения стержня от вертикального состояния предполагаются малыми, поэтому динамика системы изучается в линейном приближении. Требуется за минимальное время привести стержень в вертикальное состояние и остановить массу гасителя в заданном положении.

Перевернутый маятник представляет собой классический пример неустойчивой механической системы. Задачи управления движением неустойчивых объектов изучались в [1–3], где, в частности, даны решения некоторых задач оптимального по быстродействию управления. Задача оптимального быстродействия, аналогичная рассматриваемой ниже, изучалась в [4] для обычного линейного маятника. Методы управления, обеспечивающие остановку колебаний маятника с помощью активного динамического гасителя без минимизации времени движения, предложены в [5, 6]. Ниже развит подход, основанный на принципе максимума Понтря-

гина [7–9] и методике, предложенной А. А. Фельдбаумом [9], этот подход позволяет для некоторого класса механических систем сводить задачу оптимального управления к аналогичной задаче для системы меньшей размерности.

Эквивалентной моделью рассматриваемой конструкции может служить следующая двухмассовая механическая система. Две точечных массы m_1 и m_2 перемещаются вдоль горизонтальной прямой. Первая масса соединена с неподвижным основанием пружиной отрицательной жесткости $k < 0$. Вторая масса соединена с первой посредством привода, который генерирует силу u_0 . Уравнения движения такой системы имеют вид

$$m_1 \ddot{\xi}_1 + k \xi_1 = -u_0, \quad m_2 \ddot{\xi}_2 = u_0, \quad (1)$$

где ξ_i — координата i -й массы на прямой, $i = 1, 2$, $k < 0$. На управляющую силу наложено ограничение

$$|u_0| \leq U, \quad U > 0. \quad (2)$$

В безразмерных переменных уравнения (1) могут быть записаны в форме

$$\dot{x} = -x - u, \quad \dot{y} = -y - u, \quad \dot{v} = u, \quad \dot{z} = v. \quad (3)$$

Ограничение (2) примет вид

$$|u| \leq 1. \quad (4)$$

С помощью критерия Калмана [10] нетрудно убедиться, что система (3) вполне управляема. Исходная задача теперь формулируется следующим образом.

¹ Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского
Российской академии наук, Москва, Россия

* E-mail: anan@ipmnet.ru

Задача 1. *Найти управление в форме обратной связи, т.е. как функцию $u(x, y, v, z)$, которое удовлетворяет условию (4) и обеспечивает приведение системы (3) в начало координат за минимальное время.*

Согласно принципу максимума для любого начального состояния оптимальное управление представляет собой кусочно-постоянную функцию времени, принимающую значения 1 и -1 . В дальнейшем будем называть траектории движения системы с управлением $u = 1$ положительными, а с управлением $u = -1$ — отрицательными. Преобразование центральной симметрии относительно начала координат, что соответствует одновременной смене знака у всех фазовых переменных x, y, v, z и управления u , переводит положительные траектории в отрицательные и наоборот.

Собственные числа системы (3) равны $-1, 1, 0, 0$. Известно [7], что для системы порядка n , все собственные числа которой вещественны, оптимальное по быстродействию управление имеет не более $n - 1$ переключений. Следовательно, в сформулированной задаче оптимальное управление имеет не более 3 переключений. Предложенное ниже решение состоит в указании областей фазового пространства, где управление принимает значение $+1$, где -1 , а также в описании множеств, на которых происходит переключение управления.

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ПОДСИСТЕМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Найдем сначала оптимальное по быстродействию управление $u(x, y)$, удовлетворяющее условию (4) и приводящее в начало координат систему второго порядка

$$\dot{x} = -x - u, \quad \dot{y} = y - u, \quad (5)$$

содержащую только два первых уравнения (3). Данная система неустойчива по переменной y , так как соответствующее y собственное число равно 1. Следовательно, при ограничении (4) множество начальных состояний, из которых возможно приведение системы в начало координат, представляет собой полосу $G = \{(x, y) \in R^2: |y| < 1\}$.

Собственные числа системы (5) вещественны, поэтому оптимальное управление имеет одно переключение, принимает значения 1 и -1 , а приведение системы в начало координат состоит из двух этапов: на первом этапе $u = -1$, а на втором $u = 1$ (первый сценарий), либо наоборот, сначала $u = 1$, затем $u = -1$ (второй сценарий). Преобразование центральной симметрии относительно начала координат переводит один сценарий движения в другой.

Решения системы (3) имеют вид

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 e^{-t} + 1, & y(t) &= c_2 e^t - 1, & \text{если } u &= -1; \\ x(t) &= c_1 e^{-t} - 1, & y(t) &= c_2 e^t + 1, & \text{если } u &= 1. \end{aligned} \quad (6)$$

Отрицательные траектории, вдоль которых система (5) приходит в начало координат, лежат на кривой Γ_-^1 , заданной уравнением

$$x = \frac{y}{1 + y}, \quad y < 0,$$

а положительные траектории, идущие в начало координат, лежат на кривой Γ_+^1 , заданной уравнением

$$x = \frac{y}{1 - y}, \quad y > 0.$$

Вместе эти кривые составляют кривую $\Gamma^1 = \Gamma_-^1 \cup \Gamma_+^1$, на которой происходит переключение управления.

Рассмотрим первый сценарий оптимального движения, при котором сначала система (5) с управлением $u = -1$ приходит на кривую Γ_+^1 , а затем вдоль этой кривой под действием управления $u = 1$ — в начало координат. Множество начальных состояний (x_0, y_0) для такого движения составляет область G_- , заключенную между прямой $y = -1$ и кривой Γ^1 .

Пусть в момент времени $t_3 > 0$ отрицательное решение системы (5) с начальным состоянием $(x_0, y_0) \in G_-$ попадает на кривую Γ_+^1 в точке $x_1 = x(t_3)$, $y_1 = y(t_3)$. Зададим в области G_- функции C_- и D_- :

$$\begin{aligned} C_-(x, y) &= (x - 1)(y + 1), \\ D_-(x, y) &= (C_-(x, y) + 1)(C_-(x, y) + 9). \end{aligned} \quad (7)$$

Из (6) следует, что рассматриваемое решение проходит по гиперболе $(x - 1)(y + 1) = C_-(x_0, y_0)$, поэтому

$$x_1 = \frac{y_1}{1 - y_1}, \quad (x_1 - 1)(y_1 + 1) = C_-(x_0, y_0).$$

Отсюда вытекает, что

$$y_1 = \frac{-(C_-(x_0, y_0) + 1) + \sqrt{D_-(x_0, y_0)}}{4} > 0,$$

а время движения из точки (x_0, y_0) до кривой переключений Γ^1 как функция переменных x_0, y_0 задается выражением

$$t_3(x_0, y_0) = \ln \frac{3 - C_-(x_0, y_0) + \sqrt{D_-(x_0, y_0)}}{4(1 + y_0)}. \quad (8)$$

В момент прихода траектории на кривую Γ^1 происходит переключение управления на $u = 1$. Время движения вдоль кривой Γ^1 до начала координат как функция переменных x_0, y_0 вычисляется так:

$$t_4(x_0, y_0) = \ln \frac{C_-(x_0, y_0) + 5 + \sqrt{D_-(x_0, y_0)}}{4}. \quad (9)$$

Если же начальное состояние (x_0, y_0) лежит в области G_+ , заключенной между прямой $y = 1$ и кривой Γ^1 , то применяется второй сценарий. В этом случае время движения t_3 до кривой Γ^1 и время движения t_4 вдоль этой кривой до начала координат

задаются выражениями

$$t_3 = \ln \frac{3 - C_+(x_0, y_0) + \sqrt{D_+(x_0, y_0)}}{4(1 - y_0)},$$

$$t_4 = \ln \frac{C_+(x_0, y_0) + 5 + \sqrt{D_+(x_0, y_0)}}{4}.$$

Здесь

$$C_+(x, y) = (x + 1)(y - 1),$$

$$D_+(x, y) = (C_+(x, y) + 1)(C_+(x, y) + 9),$$

$$(x, y) \in G_+.$$

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ПОДСИСТЕМЫ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Рассмотрим теперь задачу быстрогодействия для системы, состоящей из первых трех уравнений (3):

$$\dot{x} = -x - u, \quad \dot{y} = y - u, \quad \dot{v} = u. \quad (10)$$

Оптимальное управление для данной системы имеет не более двух переключений и состоит из трех этапов: на первом этапе $u = 1$, на втором $u = -1$, на третьем $u = 1$ (первый сценарий), или сначала $u = -1$, затем $u = 1$, а на заключительном этапе снова $u = -1$ (второй сценарий).

Решение системы (10) имеет вид

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 e^{-t} + 1, \quad y(t) = c_2 e^t - 1, \\ v(t) &= -t + c_3, \end{aligned} \quad \text{если } u = -1;$$

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 e^{-t} - 1, \quad y(t) = c_2 e^t + 1, \\ v(t) &= t + c_3, \end{aligned} \quad \text{если } u = 1. \quad (11)$$

Поскольку первые два уравнения у систем (3) и (10) совпадают, то совпадают и выражения для переменных $x(t)$, $y(t)$ в (6) и (11), т.е. траектории движения системы (3) представляют собой проекции на плоскость $v = 0$ траекторий системы (10).

Опишем оптимальное движение системы при первом сценарии управления. На третьем, заключительном, этапе система (10) приходит в начало координат под действием управления $u = 1$ вдоль кривой Γ_+^2 , которая задается уравнениями

$$x = \frac{y}{1 - y}, \quad v = \ln(1 - y), \quad y \geq 0. \quad (12)$$

Кривая Γ_+^2 представляет собой проекцию кривой Γ_+^1 на плоскость $v = 0$.

На втором этапе система движется под действием управления $u = -1$ вдоль поверхности S_-^1 до кривой Γ_+^2 . Эта поверхность образована семейством полутраекторий системы (10) с управлением $u = -1$, оканчивающихся на кривой Γ_+^2 , и задается в параметрической форме соотношениями

$$\begin{aligned} x(t_3, t_4) &= e^{t_3+t_4} - 2e^{t_3} + 1, \\ y(t_3, t_4) &= -e^{-(t_3+t_4)} + 2e^{-t_3} - 1, \\ v(t_3, t_4) &= t_3 - t_4, \quad t_3 > 0, \quad t_4 \geq 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь t_3 — время движения на втором этапе, т.е. из точки $(x(t_3, t_4), y(t_3, t_4), v(t_3, t_4)) \in S_-$ до кривой Γ_+^2 , а t_4 — время движения вдоль кривой Γ_+^2 до нуля на третьем этапе. Эти времена равны временам движения системы (5) на первом и втором этапах соответственно и вычисляются по формулам (8) и (9), в которых $x_0 = x(t_3, t_4)$, $y_0 = y(t_3, t_4)$.

В декартовых координатах поверхность S_-^1 представляет собой график функции

$$f_-(x, y) = \ln \frac{3 - C_- + \sqrt{D_-}}{(C_- + 5 + \sqrt{D_-})(y + 1)}, \quad (14)$$

$$(x, y) \in G_- \cup \Gamma_-^2,$$

величины $C_-(x, y)$ и $D_-(x, y)$ задаются выражениями (7).

При втором сценарии управления на третьем этапе, где $u = -1$, траектории системы (10) приходят в начало координат вдоль кривой Γ_-^2 , которая симметрична кривой Γ_+^2 относительно нуля и задается уравнением

$$x = \frac{y}{1 + y}, \quad z = -\ln(1 + y), \quad y \leq 0.$$

С учетом симметрии поверхность S_+^1 , вдоль которой система (10) при $u = 1$ движется на втором этапе при втором сценарии управления, может быть описана как график функции

$$f_+(x, y) = -f_-(-x, -y), \quad (x, y) \in G_+ \cup \Gamma_+^2.$$

Поверхности S_-^1 и S_+^1 “склеиваются” на кривой $\Gamma^2 = \Gamma_+^2 \cup \Gamma_-^2$ и образуют поверхность $S^1 = S_-^1 \cup S_+^1$, которая представляет собой график непрерывной функции f , заданной на множестве G соотношениями:

$$f(x, y) = \begin{cases} f_-(x, y), & \text{если } (x, y) \in G_- \cup \gamma_-; \\ f_+(x, y), & \text{если } (x, y) \in G_+ \cup \gamma_+. \end{cases}$$

Поверхность S^1 в декартовых координатах описывается уравнением

$$v = f(x, y) \quad (15)$$

и разбивает область допустимых начальных состояний

$$Q = G \times R^1 = \{(x, y, v): -\infty < x, v < \infty, |y| < 1\}$$

на две подобласти, одна из которых лежит выше S^1 , обозначим ее через Q_+ , а другая — ниже, обозначим ее через Q_- .

В [11] установлено, что положительные траектории пересекают поверхность S^1 сверху вниз, т.е. из области Q_+ в область Q_- , а отрицательные — снизу вверх. Там же сформулирован следующий алгоритм оптимального по быстродействию приведения системы (10) в начало координат: если $v > f(x, y)$, т.е. начальное состояние (x, y, v) лежит выше поверхности переключений S^1 , то на первом этапе следует

выбирать $u = 1$; если $v < f(x, y)$, т.е. начальное состояние лежит ниже поверхности S^1 , то на первом этапе должно быть $u = -1$. В случае, если начальное состояние лежит на поверхности S^1 , т.е. $v = f(x, y)$, первый этап отсутствует. Когда траектория системы попадет на поверхность S^1 , управление меняет знак и движение продолжается по этой поверхности до достижения траекторией кривой переключений Γ^2 . Здесь управление вновь меняет знак, и система приходит в начало координат вдоль кривой Γ^2 .

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ИСХОДНОЙ СИСТЕМЫ

Оптимальное движение для системы (3) состоит из четырех этапов. Рассмотрим подробнее один из двух возможных сценариев управления, а именно тот, при котором на первом и третьем этапах $u = -1$, а на втором и четвертом $u = 1$. Здесь, как и выше, преобразование центральной симметрии относительно начала координат переводит один сценарий управления в другой. Через t_i обозначим время движения на i -м этапе, $i = 2, 3, 4$.

Поскольку первые три уравнения систем (3) и (10) совпадают, то текущие координаты x, y, v решений обеих систем задаются выражениями (11). Следовательно, траектории движения системы (10) представляют собой проекции на подпространство $z = 0$ траекторий системы (3). Поведение координаты z решения системы (3) определяется соотношениями

$$\begin{aligned} z(t) &= c_4 z + c_3 vt - t^2/2, & \text{если } u = -1; \\ z(t) &= c_4 z + c_3 vt + t^2/2, & \text{если } u = 1. \end{aligned}$$

Описание оптимального движения начнем с последнего, четвертого, этапа. На этом этапе система (10) приходит в начало координат по положительной траектории, которая лежит на кривой Γ_+^3 , задаваемой уравнениями

$$x = \frac{y}{1-y}, \quad v = \ln(1-y), \quad z = \ln^2(1-y), \quad 0 \leq y \leq 1. \quad (16)$$

Сравнивая (12) и (16), можем заключить, что кривая Γ_+^2 представляет собой проекцию кривой Γ_+^3 на подпространство $z = 0$.

Оптимальное управление на четвертом этапе для полной системы совпадает с управлением на последнем этапе для рассмотренных выше подсистем второго и третьего порядка, оптимальная траектория проецируется на соответствующие траектории этих подсистем, а время движения всех систем на последнем этапе одинаково и равно t_4 .

На третьем этапе система движется по отрицательной траектории вдоль двумерной поверхности S_-^2 до кривой Γ_+^3 в течение времени t_3 . Эта поверхность образована семейством полутраекторий системы (3) с управлением $u = -1$, оканчивающихся

на кривой Γ_+^2 , и задается в параметрической форме так:

$$\begin{aligned} x(t_3, t_4) &= e^{t_3+t_4} - 2e^{t_3} + 1, \\ x(t_3, t_4) &= -e^{-(t_3+t_4)} + 2e^{-t_3} - 1, \\ v(t_3, t_4) &= t_3 - t_4, \\ z(t_3, t_4) &= \frac{t_4^2}{2} + t_4 t_3 - \frac{t_3^2}{2}, \quad t_4 > 0, \quad t_3 \geq 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь первые три соотношения совпадают с соотношениями (13), поэтому поверхность S_-^1 представляет собой проекцию поверхности S_-^2 на подпространство $z = 0$. Кроме того, оптимальная траектория полной системы на этом предпоследнем этапе проецируется на соответствующие оптимальные траектории на предпоследних этапах рассмотренных выше подсистем, а управления и времена движения совпадают.

Для описания поверхности S_-^2 в декартовых координатах необходимо к уравнению (15) добавить выражение для координаты z , подставив в последнее соотношение (17) следующие значения величин t_3 и t_4 :

$$\begin{aligned} t_3 &= \ln \frac{3 - C_-(x, y) + \sqrt{D_-(x, y)}}{4(y+1)}, \\ t_4 &= \ln \frac{C_-(x, y) + 5 + \sqrt{D_-(x, y)}}{4}. \end{aligned}$$

На втором этапе оптимальное движение происходит по положительной траектории вдоль трехмерного многообразия M_+ до поверхности S_-^2 в течение времени t_2 . Многообразие M_+ образовано семейством полутраекторий системы (3) с управлением $u = 1$, оканчивающихся на поверхности S_-^2 , и задается в параметрической форме соотношениями:

$$\begin{aligned} x(t_2, t_3, t_4) &= e^{t_2+t_3+t_4} - 2e^{t_2+t_3} + 2e^{t_2} - 1, \\ y(t_2, t_3, t_4) &= -e^{-(t_2+t_3+t_4)} + 2e^{-(t_2+t_3)} - 2e^{-t_2} + 1, \\ v(t_2, t_3, t_4) &= -t_4 + t_3 - t_2, \\ z(t_2, t_3, t_4) &= \frac{(t_4 + t_2)^2}{2} - \frac{t_3^2}{2} + (t_4 - t_2)t_3, \\ t_4 &> 0, \quad t_2, t_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

Пусть $(x, y, v, z) \in M_+$ — точка, в которой траектория впервые попадает на многообразие M_+ , происходит первое переключение управления и начинается второй этап. Время движения на втором этапе t_2 как функция переменных x, y, v равняется единственному положительному корню уравнения

$$v + t_2 = f_-((x+1)e^{-t_2} - 1, (y-1)e^{t_2} + 1), \quad (18)$$

функция f_- определена в (14). Времена движения на третьем и четвертом этапах t_3 и t_4 как функции

переменных x, y, v вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} t_3 &= \ln \frac{3 - P(x, y) + \sqrt{Q(x, y)}}{4((y-1)e^{t_2} + 2)}, \\ t_4 &= \ln \frac{P(x, y) + 5 + \sqrt{Q(x, y)}}{4}. \end{aligned} \quad (19)$$

Здесь

$$\begin{aligned} P(x, y) &= C_-((x+1)e^{-t_2} - 1, (y-1)e^{t_2} + 1), \\ Q(x, y) &= (P(x, y) + 1)(P(x, y) + 9). \end{aligned}$$

Многообразие M_+ описывается уравнением $z = F_+(x, y, v)$ и представляет собой график функции $F_+(x, y, v)$, заданной в области Q_+ с помощью выражения

$$F_+(x, y, v) = \frac{(t_4 + t_2)^2}{2} - \frac{t_3^2}{2} + (t_4 - t_2)t_3,$$

в которое нужно подставить значения t_2, t_3 и t_4 , вычисленные с помощью соотношений (18), (19).

При втором сценарии переключение управления происходит на множествах M_- , S_+^2 и Γ_-^3 , которые симметричны относительно начала координат множествам M_+ , S_-^2 и Γ_+^3 соответственно. Многообразие M_- , вдоль которого система (3) при $u = -1$ движется на втором этапе при втором сценарии управления, может быть описано как график функции

$$F_-(x, y, v) = -F_+(-x, -y, -v), \quad (x, y, v) \in Q_-.$$

Многообразия M_- и M_+ “склеиваются” на поверхности $S^2 = S_+^2 \cup S_-^2$ и образуют многообразие $M = M_- \cup M_+$, которое представляет собой график непрерывной функции F , заданной на множестве Q формулой

$$F(x, y, v) = \begin{cases} F_-(x, y, v), & \text{если } (x, y, v) \in Q_- \cup S_-^2; \\ F_+(x, y, v), & \text{если } (x, y, v) \in Q_+ \cup S_+^2. \end{cases}$$

Многообразие M разбивает область допустимых начальных состояний

$$H = \{(x, y, v, z): -\infty < x, v, z < \infty, |y| < 1\}$$

на две подобласти, одна из которых, обозначим ее через H_+ , лежит выше M , т.е. там выполнено неравенство $z > F(x, y, v)$, а другая, которую обозначим через H_- , лежит ниже M , там $z < F(x, y, v)$.

Утверждение 1. *Отрицательные траектории системы (3) пересекают многообразие M на участке M_+ сверху вниз, т.е. из области H_+ в область H_- , а положительные — на участке M_- снизу вверх, т.е. из области H_- в область H_+ .*

Доказательство этого утверждения основано на том, что скалярное произведение нормали к многообразию M и векторного поля системы (3) на участке M_+ отрицательно, а на участке M_- положительно.

Сформулируем теперь алгоритм оптимального по быстродействию управления полной системой.

Если точка (x, y, v, z) не лежит на многообразии M , то

$$u(x, y, v, z) = \begin{cases} -1, & \text{если } z > F(x, y, v); \\ 1, & \text{если } z < F(x, y, v). \end{cases}$$

Оптимальное движение из этой точки состоит из четырех этапов. Первый этап заканчивается, когда траектория достигнет многообразия M , здесь происходит первое переключение управления. На втором этапе движение продолжается по многообразию M .

Если (x, y, v, z) лежит на многообразии M , но не принадлежит поверхности S^2 , то

$$u(x, y, v, z) = \begin{cases} -1, & \text{если } v > f(x, y); \\ 1, & \text{если } v < f(x, y). \end{cases}$$

В этом случае первый этап отсутствует, а оптимальное движение состоит из трех этапов. Вторым этапом заканчивается, когда траектория достигнет поверхности S^2 . Здесь происходит переключение управления, дальнейшее движение продолжается вдоль поверхности S^2 .

Если (x, y, v, z) лежит на поверхности S^2 , но не принадлежит кривой Γ^3 , то

$$u(x, y, v, z) = \begin{cases} -1, & \text{если } x > \frac{y}{1 - |y|}; \\ 1, & \text{если } x < \frac{y}{1 - |y|}. \end{cases}$$

В этом случае оптимальное движение состоит только из третьего и четвертого этапов и третий этап заканчивается, когда траектория достигнет кривой Γ^3 . На кривой Γ^3 управление задается так:

$$u(x, y, v, z) = \begin{cases} -1, & \text{если } x < 0; \\ 1, & \text{если } x > 0. \end{cases}$$

Отсюда система достигает начала координат за один этап без переключения управления.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена в рамках Госзадания 124012500443-0 в ИПМех РАН.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Формальский А.М.* Управление движением неустойчивых объектов. М.: Физматлит, 2014. 229 с.
2. *Лавровский Э.К.* О быстродействии в задаче управления вертикальным положением маятника с помощью перемещения его основания // Изв. РАН. ТиСУ. 2021. № 1. С. 42–51.
3. *Решмин С.А., Черноусько Ф.Л.* Оптимальное по быстродействию управление перевернутым маятником в форме синтеза // Изв. РАН. ТиСУ. 2006. № 3. С. 51–62.

4. Черноусько Ф.Л., Акуленко Л.Д., Соколов Б.Н. Управление колебаниями. М.: Наука, 1980. 384 с.
5. Chernousko F.L., Ananievski I.M., Reshmin S.A. Control of Nonlinear Dynamical Systems. Methods and Applications. Berlin, Heidelberg: Springer, 2008. 396 p.
6. Ананьевский И.М. Управление линейной системой четвертого порядка при смешанных ограничениях // ПММ. 2000. Т. 64. Вып. 6. С. 901–908.
7. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983. 392 с.
8. Милютин А.А., Дмитрук А.В., Осмоловский Н.П. Принцип максимума в оптимальном управлении. М.: Изд-во мехмата МГУ, 2004. 168 с.
9. Фельдбаум А.А. О синтезе оптимальных систем с помощью фазового пространства // Автомат. и телемех. 1955. Т. 16. № 2. С. 129–149.
10. Kalman R.E., Falb P.L., Arbib M.A. Topics in Mathematical System Theory. N.Y.: McGraw-Hill, 1969. 358 p.
11. Ананьевский И.М., Дунаев И.А. Наискорейшее успокоение линейного обратного маятника с помощью динамического гасителя // Изв. РАН. ТиСУ. 2024. № 3. С. 11–25.

SYNTHESIS OF TIME-OPTIMAL CONTROL FOR A INVERTED PENDULUM WITH A DYNAMIC ABSORBER

I. M. Ananievski^a

^a*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

Presented by Academician of the RAS F. L. Chernousko

We consider a fourth-order linear system that describes the dynamics of a linearized inverted pendulum controlled by an active dynamic absorber. The control variable is the force of interaction between the pendulum and the moving mass of the absorber, limited in magnitude. Using Pontryagin's maximum principle, the problem of synthesizing an optimal control that brings the system to a state of rest in a minimum time is solved.

Keywords: linear controlled system, inverted pendulum, active dynamic absorber, time-optimal control, maximum principle