

СИММЕТРИИ КЛАССИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ГЕЙЗЕНБЕРГА

© 2024 г. Член-корреспондент РАН А. Б. Борисов^{1,*}, Д. В. Долгих¹

Поступило 20.05.2024 г.

После доработки 20.05.2024 г.

Принято к публикации 05.08.2024 г.

Исследованы симметрии классической модели Гейзенберга. Показано, что такими симметриями являются группы конформных преобразований и вращений. Изучена инвариантность вихревых структур относительно группы вращений. Применение найденных преобразований группы вращений полей к уже найденным решениям модели Гейзенберга (таким как инстантоны, вихревые “мишени” и “спирали”) порождает другие структуры — также решения этой модели, свойства которых определяются исходными структурами.

Ключевые слова: модель Гейзенберга, ферромагнетик, вихрь, группы Ли

DOI: 10.31857/S2686740024060022, EDN: HWQVXR

К настоящему времени симметричные методы эффективны при изучении многих теоретических моделей. Особый интерес представляют свойства уравнений относительно преобразований групп Ли, зависящих от зависимых и независимых переменных. Детальное обсуждение и применение симметрий к различным дифференциальным уравнениям изложено, например, в монографиях [1–4]. Несмотря на интенсивное изучение этих модельных уравнений в различных областях физики, в теории магнитных явлений исследованы только законы сохранения и вариационные свойства динамических уравнений классической модели Гейзенберга [5].

Цель этой работы — исследовать инвариантные свойства стационарных уравнений классической модели Гейзенберга в плоскости. В континуальном приближении статические магнитные структуры определяются минимизацией энергии

$$E = \iint E_0 dx dy$$

с плотностью

$$E_0 = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2} J (\nabla n_i) (\nabla n_i) \quad (1)$$

в безразмерных переменных. Модель Гейзенберга (1) для классических спинов часто называется $O(3)$ -моделью в трехмерном пространстве. Она имеет многочисленные приложения в теории поля и физике жидких кристаллов [5].

Для описания структур удобно воспользоваться следующей параметризацией единичного вектора \mathbf{n} :

$$\mathbf{n} = (\cos \Phi \sin \theta, \sin \Phi \sin \theta, \cos \theta), \quad (2)$$

где Φ, θ — сферические координаты. Тогда уравнения модели (1) записываются в простом виде:

$$\Delta \theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta (\nabla \Phi)^2 = 0, \quad (3)$$

$$2 \cos \theta (\nabla \theta \cdot \nabla \Phi) + \sin \theta \Delta \Phi = 0. \quad (4)$$

Вихревые распределения параметра порядка (вихри) широко используются в физике конденсированных сред. В теории магнетизма к таким структурам относятся плоские вихри (мероны), инстантоны [6, 7] и скирмионы в несоизмеримых двумерных магнетиках, предсказанные много лет назад. Помимо академического интереса такие структуры важны для спинтронной промышленности, где они рассматриваются как перспективные объекты переноса и хранения информации.

В этой работе мы исследуем инвариантность магнитных структур-точных решений (3), (4), в частности вихревых структур. В первом разделе мы с помощью инфинитезимальных преобразований находим группы симметрии искомого уравнения. Они состоят из группы конформной группы и группы вращений. Во втором разделе мы изучаем преобразование вихревых структур поля Φ , зависящих от параметра $a \in \mathcal{R}$. Это позволяет по известным решениям построить новые. Выясняется, что для инстантонных структур преобразованное поле $\bar{\Phi}$ помимо начального состояния — вихря — включает антивихрь и бесконечное число вихрей и антивихрей для магнитной мишени и спирали.

¹ Институт физики металлов имени М. Н. Михеева Уральского отделения Российской академии наук, Екатеринбург, Россия

* E-mail: borisov@imp.uran.ru

1. ГРУППА СИММЕТРИИ МОДЕЛИ

Найдем группу симметрии уравнений (3), (4), т.е. обратимые локальные преобразования переменных θ, Φ, x_1, x_2 к новым переменным $\bar{\theta}(\bar{x}_1, \bar{x}_2), \bar{\Phi}(\bar{x}_1, \bar{x}_2), \bar{x}_1, \bar{x}_2$:

$$\begin{aligned}\bar{\theta} &= \bar{\theta}(\theta, \Phi, x_1, x_2, a), \\ \bar{\Phi} &= \bar{\Phi}(\theta, \Phi, x_1, x_2, a), \\ \bar{x}_1 &= \bar{x}_1(\theta, \Phi, x_1, x_2, a), \\ \bar{x}_2 &= \bar{x}_2(\theta, \Phi, x_1, x_2, a)\end{aligned}\quad (5)$$

с групповыми свойствами, при которых уравнения (3), (4) сохраняют свой вид в новых независимых переменных \bar{x}_1, \bar{x}_2 :

$$\begin{aligned}\Delta\bar{\theta} - \frac{1}{2} \sin 2\bar{\theta} (\nabla\bar{\Phi})^2 &= 0, \\ 2 \cos\bar{\theta} (\nabla\bar{\theta} \cdot \nabla\bar{\Phi}) + \sin\bar{\theta} \Delta\bar{\Phi} &= 0.\end{aligned}\quad (6)$$

Здесь $a \in \mathbb{R}$ — параметр. Построение группы симметрии эквивалентно определению инфинитезимальных преобразований (5) с параметром $a \ll 1$:

$$\begin{aligned}\bar{x}_1 &= \theta + aB_1(\theta, \Phi, x_1, x_2, a), \\ \bar{x}_2 &= \theta + aB_2(\theta, \Phi, x_1, x_2, a), \\ \bar{\theta} &= \theta + aB_3(\theta, \Phi, x_1, x_2, a), \\ \bar{\Phi} &= \Phi + aB_4(\theta, \Phi, x_1, x_2, a).\end{aligned}\quad (7)$$

Подстановка (7) в (6) позволяет найти функции B_i ($i = 1 \dots 4$) в следующем виде:

$$\begin{aligned}B_i(\theta, \Phi, x_1, x_2, a) &= B_i(x_1, x_2) \quad (i = 1, 2), \\ \partial_{x_2} B_1 &= -\partial_{x_1} B_2, \quad \partial_{x_1} B_1 = \partial_{x_2} B_2, \\ B_i(\theta, \Phi, x_1, x_2, a) &= B_i(\theta, \Phi) \quad (i = 3, 4), \\ B_3 &= a_1 \cos \Phi + a_2 \sin \Phi, \\ B_4 &= a_3 + \text{ctg} \theta (a_2 \cos \Phi - a_1 \sin \Phi).\end{aligned}\quad (8)$$

В итоге преобразования переменных x_1, x_2 , не зависящие от полей θ, Φ , и есть инфинитезимальные конформные преобразования:

$$\begin{aligned}\bar{z} &= z + aF(z), \quad \bar{z}^* = z^* + a(F(z))^* \\ (z &= x_1 + i x_2, \quad z^* = x_1 - i x_2),\end{aligned}$$

где $F(z)$ — произвольная функция. Преобразования (7) полей θ, Φ характеризуются генератором

$$G = B_3 \partial_\theta + B_4 \partial_\Phi \quad (9)$$

с тремя независимыми параметрами a_i ($i = 1, 2, 3$). Поэтому инфинитезимальные симметрии образуют трехмерную алгебру Ли с линейной оболочкой, состоящей из трех линейно независимых операторов M_i ($i = 1, 2, 3$)

$$\begin{aligned}M_1 &= \text{ctg} \theta \sin \Phi \frac{\partial}{\partial \theta} - \cos \Phi \frac{\partial}{\partial \Phi}, \\ M_2 &= \text{ctg} \theta \cos \Phi \frac{\partial}{\partial \theta} + \sin \Phi \frac{\partial}{\partial \Phi}, \\ M_3 &= \frac{\partial}{\partial \theta}\end{aligned}\quad (10)$$

с коммутационными соотношениями

$$[M_i, M_j] = \varepsilon_{ijk} M_k. \quad (11)$$

В итоге группа симметрии для полей θ, Φ — это группа вращений. Преобразование, соответствующее генератору M_1 , находится прямым интегрированием уравнений

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{\theta}(a)}{\partial a} &= B_3(\bar{\theta}, \bar{\Phi}, a), \\ \frac{\partial \bar{\Phi}(a)}{\partial a} &= B_4(\bar{\theta}, \bar{\Phi}, a),\end{aligned}\quad (12)$$

с постоянными $a_1 = 1, a_2 = a_3 = 0$ и начальными условиями

$$\bar{\theta}(a=0) = \theta, \quad \bar{\Phi}(a=0) = \Phi.$$

В итоге мы получаем новые решения

$$\begin{aligned}\bar{\Phi} &= \arctg(\sin a \text{ctg} \theta \sec \Phi + \cos a \text{tg} \Phi), \\ \cos \bar{\theta} &= \cos \Phi \sin \theta (\cos a \text{ctg} \theta \sec \Phi - \sin a \text{tg} \Phi),\end{aligned}\quad (13)$$

которые, как нетрудно проверить, удовлетворяют уравнениям (5).

2. СИММЕТРИИ СТРУКТУР МОДЕЛИ ГЕЙЗЕНБЕРГА

Формулы (12), (13) позволяют исследовать симметрии вихревых структур-точных решений модели (3), (4), наиболее популярными среди которых являются инстантоны. Широкий класс таких структур был найден в фундаментальной работе [8]. Авторы показали, что многие инстантоны описываются простой формулой

$$w = \text{ctg} \left(\frac{\theta}{2} \right) \exp[i\Phi] = F[z], \quad (14)$$

где $F(z)$ — рациональная функция, $z = x_1 + i x_2$. Положим $F(z) = z^Q$ ($Q \in \mathbb{Z}$). Тогда в полярной системе координат

$$\theta = 2 \arctg r^{-Q}, \quad \Phi = Q\varphi. \quad (15)$$

Поле Φ обладает вихревой структурой. Оно сингулярно в начале координат: $\partial_x \Phi \rightarrow \infty, \partial_y \Phi \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow 0$ и неоднозначно при обходе по замкнутому контуру, окружающему начало координат, против часовой стрелки:

$$\oint d\Phi = Q. \quad (16)$$

Обсудим случай $Q = 1$, когда структура (15) имеет топологический заряд

$$q = \iint \sin \theta (\partial_x \theta \partial_y \Phi - \partial_y \theta \partial_x \Phi), \quad (17)$$

равный -1 (антиинстантон). Исследуем вихревую структуру поля $\bar{\Phi}$ (12). Можно показать, что топологический заряд и плотность энергии инвариантны при преобразованиях (12), (13). Поэтому энергия полей $\bar{\theta}, \bar{\Phi}$ конечна несмотря на асимптотическое поведение $\cos \bar{\theta} \rightarrow \cos a$ ($r \rightarrow \infty$). Кроме того, величина \bar{w} имеет простое выражение в терминах z :

$$\bar{w} = \text{ctg} \frac{\bar{\theta}}{2} \exp \bar{\Phi} = \frac{z - i \text{tg} a/2}{1 - i \text{tg} a/2}. \quad (18)$$

Вихревая структура поля $\bar{\Phi}$ имеет неожиданный характер: помимо вихря V типа (15) с $Q = 1$ в орбите преобразования существует еще одна вихревая структура с $Q = -1$ — антивихрь A (см. рис. 1, 2). После детальных вычислений можно показать, что зависимость центра вихря от параметра a имеет вид

$$x = 0, \quad y = \operatorname{tg} \frac{a}{2}, \quad (19)$$

и

$$x = 0, \quad y = -\operatorname{ctg} \frac{a}{2} \quad (20)$$

для антивихря. При $a = 0$ вихрь с $Q = 1$ (V) находится в начале координат, другой вихрь с $Q = -1$ (A) находится в $y = -\infty$. Далее с ростом значения параметра a центр V смещается вдоль оси Oy и достигает $y = \infty$ при $a = \pi$, переходит в $y = -\infty$ и при $a = 2\pi$ достигает начального состояния $(x, y) = (0, 0)$. Центр A достигает начала координат при $a = \pi$ и $y = \infty$ при $a = 2\pi$. Зависимость расположения вихревых струк-

тур (12), (13), (15) от параметра $a \in [0; 2\pi]$ наглядно представлена в видеофильме [9].

Помимо инстантона точными решениями уравнений (3), (4) являются магнитные “мишени” и “спирали” [10, 11]. Магнитной мишени (рис. 3) соответствует система концентрических по переменной $\ln r$ кольцевых доменов, которая является бесконечной полосовой доменной структурой по переменной Θ :

$$\cos \theta = \operatorname{sn} \left[\frac{Q}{k^2} \ln r, k \right], \quad (21)$$

где $\operatorname{sn}[u, k]$ — эллиптическая функция Якоби с модулем k [12], и вихревой структурой поля Φ :

$$\Phi = Q\varphi. \quad (22)$$

Положим $Q = 1$. Поле $\bar{\Phi}$ имеет более сложный, чем для инстантона, вид (см. рис. 4). Помимо первоначального вихря (22) в начале координат, она включает отдельную группу из восьми бесконечных вихревых структур с координатами $x = 0$,

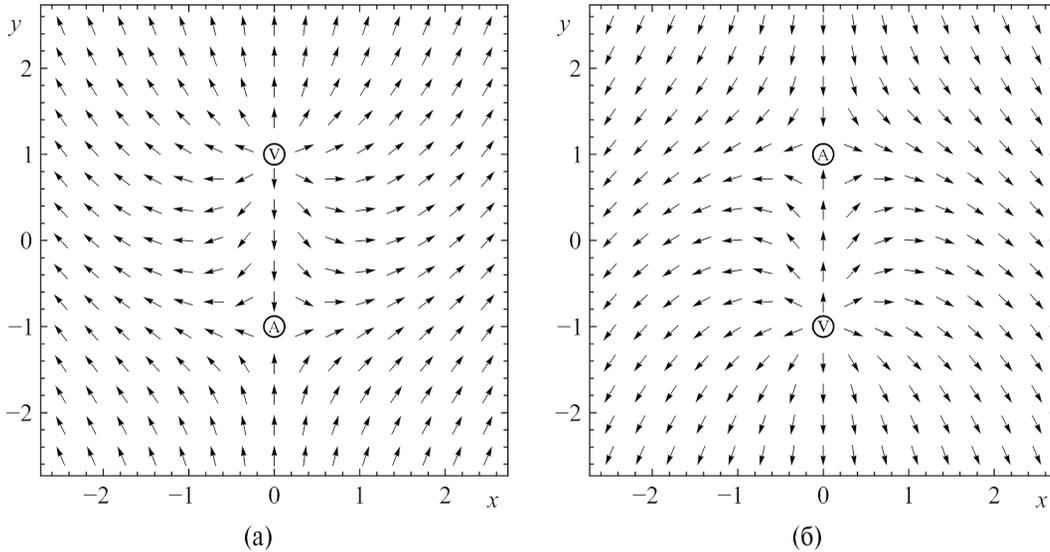


Рис. 1. Положение вихря (V) и антивихря (A) поля $Z = (\cos \Phi, \sin \Phi)$ при $a = \pi/2$ (а) и $a = 3\pi/2$ (б).

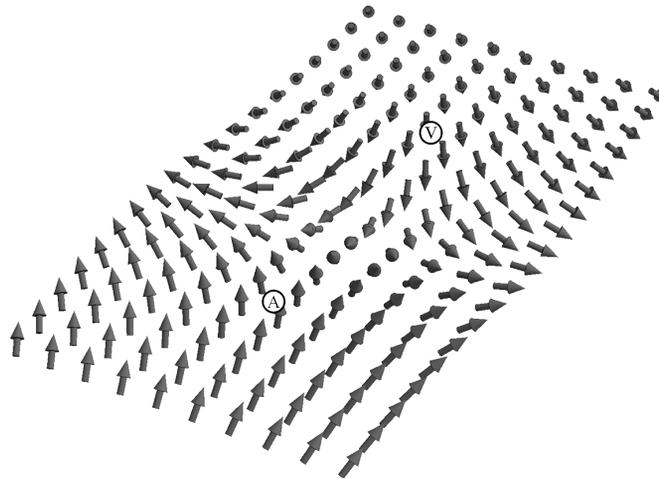


Рис. 2. Поле n (12), (13), (15) в окрестности центров вихревых структур при $a = \pi/2$.

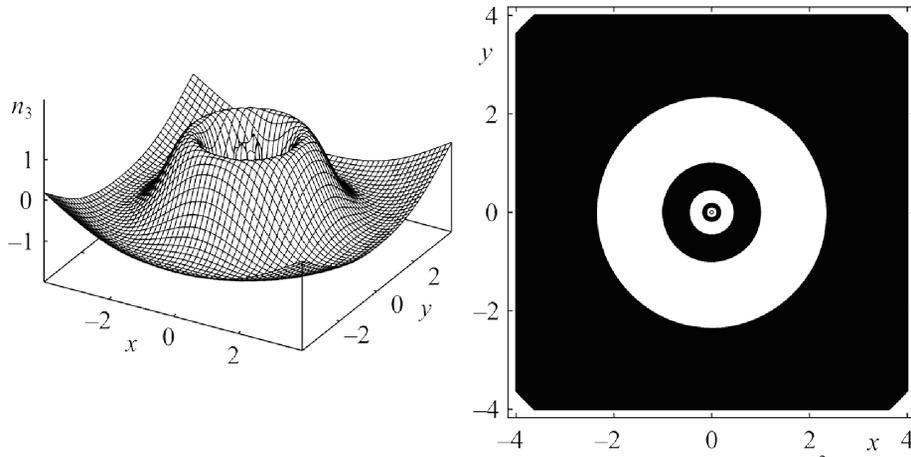


Рис. 3. Структура ядра (поверхность $n_3 = n_3(x, y)$), соответствующая магнитной мишени ($Q = 1, k^2 = 1/2$). Справа изображены области на плоскости (x, y) с положительными (белый цвет) и отрицательными (черный цвет) значениями компоненты поля n_3 .

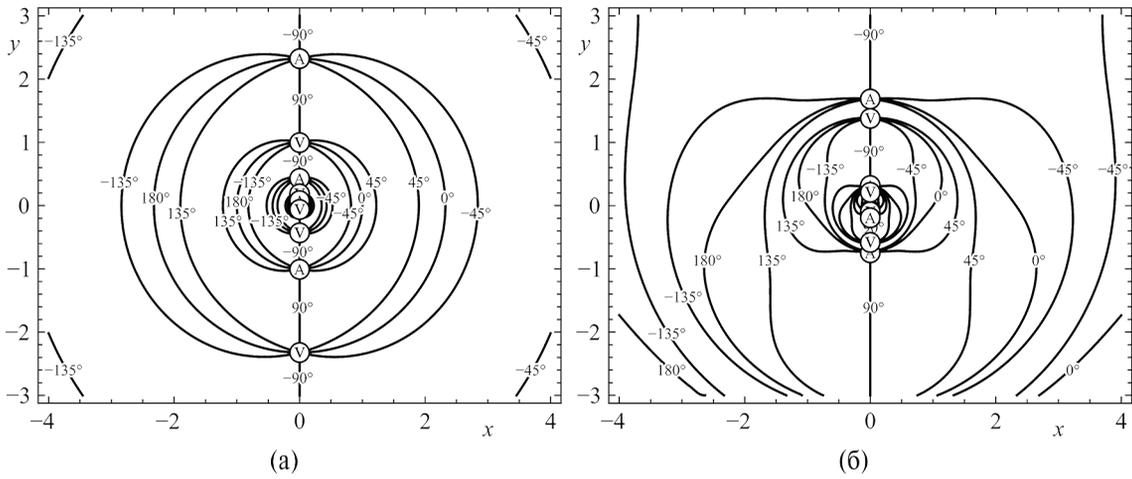


Рис. 4. Структура поля $\bar{\Phi}$ (12), (13), (21), (22) в виде линий уровня как совокупность вихрей V и антивихрей A, расположенных на оси Oy, при $a = \pi/2$ (а) и $a = 8\pi/9$ (б), $k^2 = 1/2$.

$y = r \sin[s \pi/2]$ ($s = \pm 1$). Для $s = 1$

$$r = \exp \left[-k^2 F \left(a - \frac{3\pi}{2}, k \right) + 4m_1 4k^2 K(k) \right], \quad (23)$$

$(m_1 \in \mathbb{Z}, \quad 0 < a < \pi),$

$$r = \exp \left[-k^2 F \left(a - \frac{5\pi}{2}, k \right) + 4m_2 4k^2 K(k) \right], \quad (24)$$

$(m_2 \in \mathbb{Z}, \quad \pi < a < 2\pi),$

$$r = \exp \left[k^2 F \left(a - \frac{\pi}{2}, k \right) + 4m_3 4k^2 K(k) \right], \quad (25)$$

$(m_3 \in \mathbb{Z}, \quad 0 < a < \pi),$

$$r = \exp \left[k^2 F \left(a - \frac{3\pi}{2}, k \right) + 4m_4 4k^2 K(k) \right], \quad (26)$$

$(m_4 \in \mathbb{Z}, \quad \pi < a < 2\pi),$

и для $s = -1$

$$r = \exp \left[k^2 F \left(a - \frac{\pi}{2}, k \right) + 4m_5 4k^2 K(k) \right], \quad (27)$$

$(m_5 \in \mathbb{Z}, \quad \pi < a < 2\pi),$

$$r = \exp \left[-k^2 F \left(a - \frac{\pi}{2}, k \right) + 4m_6 4k^2 K(k) \right], \quad (28)$$

$(m_6 \in \mathbb{Z}, \quad 0 < a < \pi),$

$$r = \exp \left[-k^2 F \left(a - \frac{3\pi}{2}, k \right) + 4m_7 4k^2 K(k) \right], \quad (29)$$

$(m_7 \in \mathbb{Z}, \quad \pi < a < 2\pi),$

$$r = \exp \left[-k^2 F \left(a - \frac{\pi}{2}, k \right) + 4m_8 4k^2 K(k) \right], \quad (30)$$

$(m_8 \in \mathbb{Z}, \quad 0 < a < \pi).$

Здесь $F[u, k]$ и $K(k)$ — неполный и полный эллиптические интегралы первого рода с модулем k [12]. Слагаемые $m_i k^2 K(k)$ ($i = 1, \dots, 8$) в (23)–(30) связаны с периодом $4K(k)$ эллиптической функции $sn[u, k]$ в (21). При этом величина $\ln r$ в заданном интервале меняется на $2K(k)$ или на $4K(k)$. Отметим, что выражения (23)–(30) определяют бесконечное количество вихрей/антивихрей на оси Oy, так как $m_i \in \mathbb{Z}$. На рис. 5 приведен вид ядра (21), трансформированного преобразованием (12), (13), для различных значений параметра a . С более подробной зависимо-

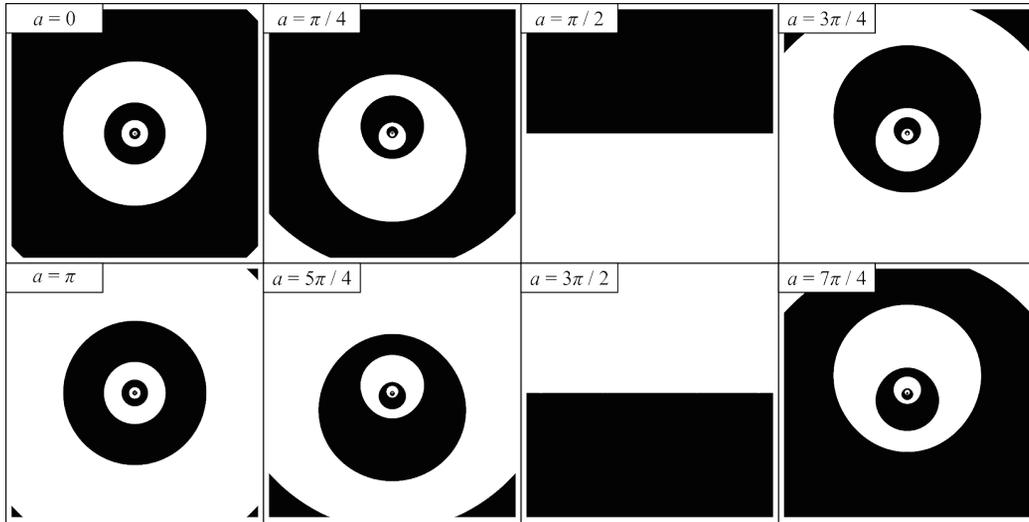


Рис. 5. Преобразованная “мишень” (21), (22), $k^2 = 1/2$ на плоскости xOy при некоторых значениях параметра a , $(x, y) \in [-4; 4] \times [-4; 4]$. Области белого цвета — положительные значения поля n_3 , области черного цвета — отрицательные значения.

стью компонента n_3 поля n от параметра $a \in [0; 2\pi]$ можно ознакомиться в видеофильме [13].

Когда $k \rightarrow 1$, уравнение “мишени” (21) переходит в инстантон (15). При этом траектории центров вихревых структур (25), (26) и (29), (30) при $m_i = 0$ переходят в траектории центров инстантонов (19), (20). Остальные же центры вихревых структур (23), (24), (27), (28) и (25), (26), (29), (30) при $m_i \neq 0$ в этом пределе стремятся к $y = \pm\infty$ или началу координат.

Преобразование (12), (13) можно применить также и к N -заходной магнитной “спирали”

$$\cos \theta = \operatorname{sn} \left[\frac{Q}{k^2} \ln r - \frac{2K(k)}{\pi} N\varphi, k \right], \quad (31)$$

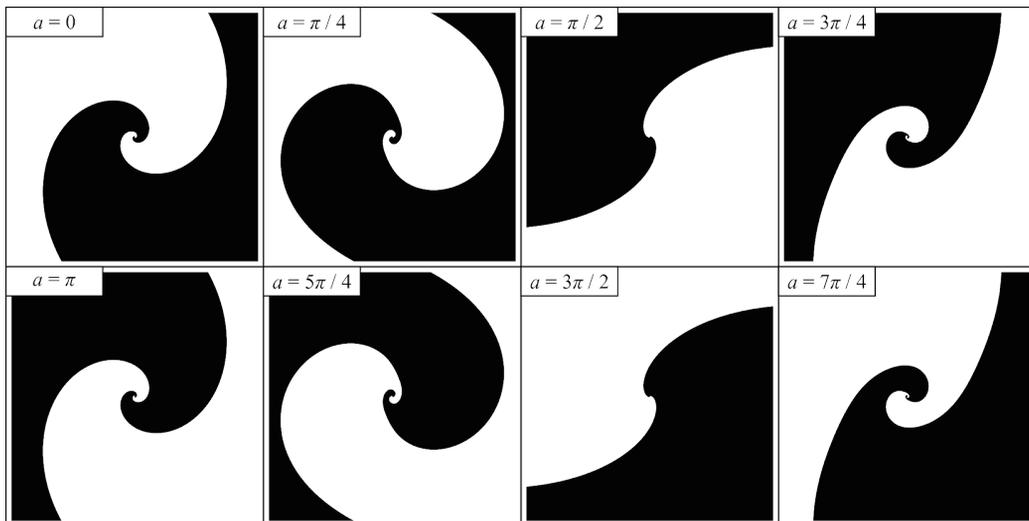


Рис. 6. Преобразованная “спираль” (31), (32) на плоскости при некоторых значениях параметра a , $Q = 1$, $N = 1$, $k^2 = 1/2$, $(x, y) \in [-4; 4] \times [-4; 4]$. Области белого цвета — положительные значения поля n_3 , области черного цвета — отрицательные значения.

$$\Phi = Q\varphi + \frac{2k^2 K(k)}{\pi} N \ln r. \quad (32)$$

Для простоты возьмем $Q = N = 1$. На рис. 6 приведено несколько состояний компонента n_3 (31), трансформированного преобразованием (12), (13), для различных значений параметра a .

Центры восьми бесконечных вихревых структур поля Φ (12), (31), (32) расположены на логарифмических спиралях

$$\varphi = \frac{\pi}{2} s - \frac{2k^2 K(k)}{\pi} \ln r \quad (s = \pm 1),$$

где r определяется уравнением

$$\cos \theta = \sin \left[-sK(k) + \frac{\pi^2 + 4k^2 K^2(k) \ln r}{\pi k^2}, k \right]$$

и

$$\theta = -a + \pi t, \quad t = 1, 2 \quad \text{для } s = 1,$$

$$\theta = a + \pi t, \quad t = -1, 0 \quad \text{для } s = -1.$$

Зависимость центров вихревых структур и областей спирали на плоскости xOy с положительными и отрицательными значениями поля n_3 от параметра a представлены в видеофильме [14].

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки России (тема “Квант”, номер г.р. 122021000038-7).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ибрагимов Н.Х.* Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983. 280 с.
2. *Олвер П.* Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1989. 639 с.
3. *Овсянников Л.В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 400 с.
4. *Egorov R.F., Bostrem I.G., Ovchinnikov A.S.* The variational symmetries and conservation laws in classical theory of Heisenberg (anti) ferromagnetic // *Phys. Lett. A.* 2002. V. 292. N. 6. P. 325–334. [https://doi.org/10.1016/S0375-9601\(01\)00813-1](https://doi.org/10.1016/S0375-9601(01)00813-1)
5. *Курик М.В., Лаврентович О.Д.* Дефекты в жидких кристаллах: гомотопическая теория и экспериментальные исследования // *УФН.* 1988. 154. № 3. С. 381–431. <https://doi.org/10.3367/UFNr.0154.198803b.0381>
6. *Борисов А.Б., Киселев В.В.* Двумерные и трехмерные топологические дефекты, солитоны и текстуры в магнетиках. Т. 2. Топологические солитоны, двумерные и трехмерные “узоры”. М.: Физматлит, 2022. 456 с.
7. *Kosevich A.M., Ivanov V.A., Kovalev A.S.* Magnetic Solitons // *Phys. Rep.* 1990. V. 194. N. 3–4. P. 117–238. [https://doi.org/10.1016/0370-1573\(90\)90130-T](https://doi.org/10.1016/0370-1573(90)90130-T)
8. *Белавин А.А., Поляков А.М.* Метастабильные состояния двумерного изотропного ферромагнетика // *Письма в ЖЭТФ.* 1975. Т. 22. № 10. С. 500–506.
9. Зависимость расположения вихревых структур на плоскости от параметра для трансформированного инстантона, видеофильм. <https://youtu.be/watch?v=pfmQ7lozw9I>
10. *Борисов А.Б.* Спиральные вихри в ферромагнетиках // *ДАН.* 2001. Т. 379. № 3. С. 319–321.
11. *Борисов А.Б.* Спиральные вихри в ферромагнетике // *Письма в ЖЭТФ.* 2001. Т. 73. № 5. С. 279–282.
12. *Byrd P.F., Friedman M.D.* Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Scientists. N.Y., Heidelberg, B.: Springer-Verlag, 1971. 358 p.
13. Зависимость компонента n_3 трансформированной “мишени” от параметра a , видеофильм. <https://youtu.be/watch?v=cR-2KQnnd20>
14. Зависимость компонента n_3 трансформированной “спирали” от параметра a , видеофильм. <https://youtu.be/watch?v=jXwVPLacug0>

SYMMETRIES OF THE CLASSICAL HEISENBERG MODEL

Corresponding Member of the RAS **A. B. Borisov^a, D. V. Dolgikh^a**

^a*M. N. Mikheev Institute of Metal Physics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, Russia*

The symmetries of the classical Heisenberg model are examined. It is shown that such symmetries are groups of conformal transformations and rotations. The invariance of vortex structures with respect to a group of rotations is studied. The application of the found transformations of the group of field rotations to the already known solutions of the Heisenberg model (such as instantons, vortex “targets” and “spirals”) generates other structures, which are also solutions of this model, with the properties being determined by the original structures.

Keywords: Heisenberg model, ferromagnet, vortex, Lee groups