

УДК 517.958:539.3(5):517.956.227

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ СТРОЕНИЕ СПЕКТРА
ТОНКОЙ ОДНОТАВРОВОЙ БАЛКИ ДИРИХЛЕ© 2024 г. С. А. Назаров^{1,*}Представлено академиком РАН Н.Ф. Морозовым 25.05.2023 г.

Поступило 07.01.2024 г.

После доработки 07.01.2024 г.

Принято к публикации 09.04.2024 г.

Исследуется асимптотическое поведение собственных чисел и функций задачи Дирихле для системы Ламе и оператора Лапласа в тавровом сочленении двух тонких пластин-параллелепипедов. Обнаружен эффект сугубой локализации собственных функций около зоны соединения пластин. При сравнении с асимптотическими результатами для аналогичной задачи Неймана обнаружено существенное различие в асимптотическом строении спектров.

Ключевые слова: спектр задач Дирихле и Неймана на сочленении тонких пластин, асимптотика собственных чисел, локализация собственных функций

DOI: 10.31857/S2686740024050094, EDN: HXJICG

1. МОТИВИРОВКА
И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Настоящее сообщение инициировано работой [1] и имеет своей целью показать колоссальное различие в поведении собственных чисел и функций задач Неймана и Дирихле в тонких областях и их сочленениях, часто игнорируемое в обзорных статьях при сравнении спектров сеток квантовых и акустических (или упругих) волноводов. В упомянутой работе изучена смешанная краевая спектральная задача для оператора Лапласа в сочленении $\Omega^h = \Omega_3^h \cup \Omega_2^h$ двух тонких ($h \ll 1$), горизонтального и вертикального, параллелепипедов

$$\Omega_3^h = \{x = (x_1, x_2, x_3): |x_i| < a_i, i = 1, 2, x_3 \in (0, h)\}, \quad (1)$$

$$\Omega_2^h = \{x: |x_1| < a_1, |x_2| < hH/2, x_3 \in (0, a_3)\},$$

которое в инженерии именуется однотоавровой балкой (см. рис. 1а и справочник [2]). Здесь $a_j > 0$ — фиксированные размеры, $j = 1, 2, 3$, причем масштабированием полудлина a_1 нескольких ребер сведена к единице, т.е. сделаны безразмерными декартова система координат x и все геометрические размеры, в частности малый $h > 0$ и варьируемый $H > 0$.

В сообщении в основном рассматривается задача Дирихле

$$-\Delta_x u^h(x) = \lambda u^h(x), \quad x \in \Omega^h, \quad (2)$$

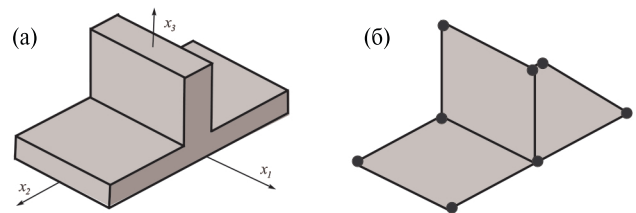


Рис. 1. Трехмерное (а) и двумерное (б) сочленения.

¹Институт проблем машиноведения
Российской академии наук,
Санкт-Петербург, Россия
*E-mail: srgnazarov@yahoo.co.uk

$$u^h(x) = 0, x \in \partial\Omega^h, \quad (3) \quad \text{на трех } (\alpha = 0, \pm) \text{ прямоугольниках}$$

а также обсуждается уравнение (2) с краевыми условиями Неймана

$$\partial_\nu u^h(x) = 0, x \in \partial\Omega^h \setminus \Upsilon^h. \quad (4)$$

Вместе с тем все результаты без особых изменений приспособляются к пространственной системе уравнений Ламе, которая описывает изотропную тавровую балку с фиксированной поверхностью. Впрочем, переход к векторной задаче вызывает существенное загромождение формул, которые по этой причине не приводятся (см. разд. 6).

В формулах (2)–(4) и далее Δ_x — оператор Лапласа, ∂_ν — производная вдоль внешней нормали, а Υ^h — объединение ребер многогранника Ω^h . Все задачи обладают дискретным спектром

$$\lambda_1^h < \lambda_2^h \leq \lambda_3^h \leq \dots \leq \lambda_m^h \leq \dots \rightarrow +\infty, \quad (5)$$

а соответствующие собственные функции можно подчинить условиям ортогональности и нормировки:

$$(u_m^h, u_n^h)_{\Omega^h} = \delta_{m,n}, \quad m, n \in \mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}.$$

При этом $(\cdot, \cdot)_{\Omega^h}$ — натуральное скалярное произведение в пространстве Лебега $L^2(\Omega^h)$, а $\delta_{m,n}$ — символ Кронекера.

2. СРАВНЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ АСИМПТОТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

В спектральной задаче из работы [1] на широких гранях многогранника Ω^h поставлены условия Неймана, но для простоты на узких гранях (T -образная глубоко тонирована на рис. 1а) — условия Дирихле, однако асимптотические формулы в целом такие же, как и в задаче (2), (4). Один из результатов [1] состоит в том, что при любом зафиксированном параметре H собственные пары $\{\lambda_m^h; u_m^h\}$ сходятся при $h \rightarrow +0$ по некоторой метрике к собственным парам уравнений

$$-\Delta_{y^\alpha} v(y^\alpha) = \mu v(y^\alpha), y^\alpha \in \varpi^\alpha \quad (6)$$

$$\varpi^\pm = \{y^\pm = (x_1, x_2): |x_1| < a_1, \pm x_2 \in (0, a_2)\}, \quad (7)$$

$$\varpi^0 = \{y^0 = (x_1, x_3): |x_1| < a_1, \pm x_3 \in (0, a_3)\},$$

причем их одиночные стороны снабжены условиями Неймана, а на общей стороне

$$v = \{x: |x_1| < a_1, x_2 = x_3 = 0\} \quad (8)$$

выставлены весовые условия сопряжения Кирхгофа [4, 5]

$$H \frac{\partial v^0}{\partial x_3}(x_1, 0) + \frac{\partial v^+}{\partial x_2}(x_1, 0) - \frac{\partial v^-}{\partial x_2}(x_1, 0) = 0, \quad (9)$$

$$v^0(x_1, 0) = v^+(x_1, 0) = v^-(x_1, 0), \quad x_1 \in (-a_1, a_1).$$

Иными словами, предельной для задачи Неймана (2), (4) служит задача на двумерном сочленении $\omega^\perp = \varpi^0 \cup v \cup \varpi^+ \cup \varpi^-$ (рис. 1б), собственные числа (5) остаются ограниченными при $h \rightarrow +0$, а собственные функции u_m^h распределены по всей трехмерной конструкции Ω^h .

В сообщении показано, что собственные пары задачи Дирихле (2), (3) обладают совершенно иными свойствами. Именно, обнаружены такие величины

$$H_* \in (1, 2) \text{ и } H_\# \in (1, H_*], \quad (10)$$

что при $H \in (0, H_\#)$ предельной задачей служит задача Дирихле для обыкновенного дифференциального уравнения на отрезке (8):

$$-\frac{d^2 w}{dx_1^2}(x_1) = \beta w(x_1), x_1 \in (-a_1, a_1), \quad (11)$$

$$w(\pm a_1) = 0, \quad (12)$$

а собственные функции u_m^h , локализованные вблизи отрезка (8), изменяются как $\sin\left(\frac{\pi m}{2a_1}(x_1 + a_1)\right)$ вдоль него и затухают со скоростью $O(e^{-\delta_m \text{dist}(x, v)/h})$, $\delta_m > 0$, на остальной части сочленения Ω^h . Если же множитель H в формуле (2) выбран на луче $(H_*, +\infty)$, то предельной служит задача Дирихле для уравнения (6) на изолированном вертикальном

прямоугольнике $\mathfrak{w}^0$, и концентрация собственных функций происходит на вертикальной пластине $\Omega_2^h \setminus \Omega_3^h$. Случай $H \in [H_*, H_*)$ остался неизученным из-за изъянов спектрального анализа в разд. 3 (даже в скалярной задаче; см. обсуждение в разд. 3, 4).

В статье [1] также рассмотрена ситуация, в которой скорости утончения множеств (2) разнятся, — смоделируем ее соотношением

$$H = H_0 h^\theta \text{ при } \theta \in (-1, +\infty) \setminus \{0\}. \quad (13)$$

В случае $\theta \in (-1, 0)$ вертикальная пластина толще горизонтальной и предельный спектр $\{\lambda_m^0\}_{m \in \mathbb{N}}$ получается в результате объединения спектров трех разрозненных задач на прямоугольниках (7), причем уравнения (6) снабжаются условиями Неймана на всех сторонах прямоугольников, кроме сторон $\nu \subset \mathfrak{w}^\pm$, где появляются условия Дирихле. Если же $\theta \in (0, +\infty)$, т.е. более толстой оказывается горизонтальная пластина, в пределе прямоугольники $\mathfrak{w}^\pm$ сливаются в больший прямоугольник $\mathfrak{w}^\square = (-a_1, a_1) \times (-a_2, a_2)$, а условия Дирихле появляются только на стороне $\nu \subset \partial \mathfrak{w}^0$. В итоге концентрация собственных функций u_m^h задачи Неймана в Ω^h , отвечающих ее упорядоченным собственным числам (5), чередуется, т.е. происходит то в одной, то в другой частях сочленения Ω^h . Отметим еще, что собственное число $\lambda_1^h = 0$ исходной задачи (2), (4) обязательно появляется у одной из предельных задач.

Для задачи Дирихле (2), (3) в ситуации (13) собственные числа из низкочастотного диапазона спектра приобретают асимптотику

$$\lambda_m^h = h^{-2} \pi^2 + \mu_m^\square + O(h^{\delta_\square})$$

в случае $\theta \in (-1, 0)$, т.е. $H \ll H_*$,

$$\lambda_m^h = h^{-2(1+\theta)} \frac{\pi^2}{h_0^2} + \mu_m^0 + O(h^{\delta_0})$$

в случае $\theta \in (0, +\infty)$, т.е. $H \gg H_*$,

где δ_α — положительные показатели, а $\{\mu_m^\alpha\}_{m \in \mathbb{N}}$ — последовательности собственных чисел задачи Дирихле для уравнения (6) на прямоугольнике $\mathfrak{w}^\alpha$ при $\alpha = \square, 0$. Кроме того, собственные функции концентрируются

на параллелепипедах $\Omega_\square^h = \Omega_3^h \setminus \overline{\Omega_2^h}$ и $\Omega_2^h \setminus \overline{\Omega_3^h}$ соответственно, однако в отличие от случая $H \in (0, H_*)$ скорость затухания на множествах $\Omega^h \setminus \Omega_\square^h$ и $\Omega^h \setminus \Omega_2^h$ становится степенной, а не экспоненциальной.

3. МОДЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ В Т-ОБРАЗНОМ КВАНТОВОМ ВОЛНОВОДЕ

Сообщим извлеченные из работы [3] сведения о спектре задачи Дирихле

$$-\Delta_\xi W(\xi) = MW(\xi), \xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{T}^H = \Pi_1 \cup \Pi_2^H, \quad (14)$$

$$W(\xi) = 0, \xi \in \partial \mathbb{T}, \quad (15)$$

на объединении единичной полосы $\Pi_1 = \{\xi: \xi_1 \in (0, 1), \xi_2 \in \mathbb{R}\}$ и полубесконечной полосы $\Pi_2^H = \{\xi: |\xi_1| < H/2, \xi_2 > 0\}$ шириной $H > 0$ (рис. 2а). Непрерывный спектр $\wp_c^H$ задачи (14), (15) занимает луч $[M_\dagger^H, +\infty)$ с точкой отсечки

$$M_\dagger^H = \pi^2 \min\{1, H^{-2}\}. \quad (16)$$

В силу неравенства Пуанкаре–Фридрихса на прямоугольнике $\mathfrak{w}_H = (0, H) \times (0, 1)$

$$\|\nabla_\xi W; L^2(\mathfrak{w}_H)\|^2 \geq \frac{\pi^2}{4} \|W; L^2(\mathfrak{w}_H)\|^2$$

при $W \in H^1(\mathfrak{w}_H)$, $W(\xi_1, 0) = 0$ при $|\xi_1| < \frac{H}{2}$

и формулы (16) для точки отсечки дискретный спектр $\wp_d^H$ заведомо пуст при $H \geq 2$. Вместе с тем в статье [3] проверено, что при $H \leq 1$ существует единственное собственное число $M_1^H \in (0, \pi^2)$ задачи (14), (15), которое как функция параметра H является строго монотонно

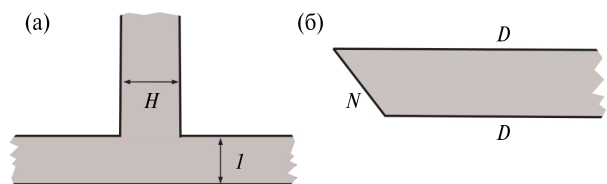


Рис. 2. Т-образный волновод (а). Полуполоса со скошенным торцом (б) — литеры D и N указывают тип краевого условия на боковых сторонах и торце.

убывающей. Таким образом, найдутся такие величины (10), что в случае $H \geq H_*$ дискретный спектр пустой, а в случае $H < H_*$ его кратность равна единице. Отвечающую M_1^H собственную функцию $W_1^H \in H_0^1(\mathbb{T}^H)$ нормируем в пространстве Лебега $L^2(\mathbb{T}^H)$.

При $H = H_*$ наблюдается пороговый резонанс [6–9], т.е. у задачи (14), (15) с пороговым значением спектрального параметра $M = M_1^{H*}$ имеется нетривиальное ограниченное решение

$$W_1^{H*}(\xi) = \widetilde{W}_1^{H*}(\xi) + \chi(\xi_2)K \cos\left(\frac{\pi\xi_1}{H}\right) \quad (17)$$

с экспоненциально затухающим при $|\xi| \rightarrow +\infty$ остатком $\widetilde{W}_1^{H*}(\xi)$, коэффициентом $K \in \mathbb{R}$ и срезающей функцией $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$, равной единице при $\xi_2 > 3$ и нулю при $\xi_2 < 2$. К сожалению, остается неизвестным качество этого порогового резонанса, а именно значение коэффициента K : в случае $K = 0$ функция (14) попадает в пространство Соболева $H_0^1(\mathbb{T}^H)$ и вместе с M_1^{H*} образуют истинную собственную пару задачи (14), но при $K \neq 0$ функция W_1^{H*} — почти стоячая волна, а пороговый резонанс правильный (терминология [9]). При $H \in (0, H_*) \cup (H_*, +\infty)$ феномен резонанса отсутствует.

Классификация пороговых резонансов имеет принципиальное значения для постановки краевых условий в процедуре понижения размерности для эллиптических задач в тонких областях (см. публикации [10, 7] и др.). Так, именно наличие простого правильного порогового резонанса в задаче Неймана для уравнения (14) в T -образном акустическом волноводе $\mathbb{T}^H$ (постоянные функции и только они являются ограниченными решениями этой задачи при $M = 0$) привело к возникновению условий сопряжения Кирхгофа (9), а исчезновение резонанса в ситуациях (13) обеспечило условие Дирихле на стороне (8) некоторых прямоугольников. Далее предельные задачи замыкаются условиями Дирихле потому, что пограничные слои около точек, помеченных значком $\bullet$ на рис. 1б, описываются решениями спектральных задач в полуполосе с прямым торцом, четверти слоя и ее сочленении с перпендикулярной половиной слоя, в которых (задачах) нетрудно проверить отсутствие пороговых резонансов при помощи классического приема [11]. Исключение составляет задача (14),

(15) при $H = H_*$, так как автору не удалось аналитическими методами выявить качество порогового резонанса — оказалось бесполезным достаточное условие [8] его отсутствия (ср. разд. 6, 4), и поэтому в разд. 5 приходится обсуждать две ситуации.

4. ЛОКАЛИЗАЦИЯ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ОКОЛО ОТРЕЗКА $\mathbf{v}$

При $H \in (0, H_*)$ асимптотику собственных пар задачи (2), (3) ищем в виде

$$\lambda_m^h = h^{-2}M_1^H + \beta_m + \dots, \quad (18)$$

$$u_m^h(x) = \chi_\perp(x_2, x_3)w(x_1)W_1^H(h^{-1}x_2, h^{-1}x_3) + \dots, \quad (19)$$

где $\{M_1^H; W_1^H\}$ — собственная пара задачи (14), (15), многочлен замещает младшие асимптотические члены, а $\chi_\perp \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ — срезающая функция, равная единице в случае $|x_j| \leq a_j/3$ при $j = 2, 3$ и нулю, если $|x_j| \geq 2a_j/3$ для какого-нибудь j . Предельная задача (11), (12) для определения собственной пары $\{\beta_m; w_m\}$ получается подстановкой анзацев (18) и (19) в дифференциальное уравнение (3) и выделения слагаемых порядка h^{-2} , причем условия Дирихле в точках $x_2 = \pm a_2$ назначены по причине, указанной в конце разд. 3.

При помощи приема из работы [12] можно убедиться в экспоненциальном затухании собственных функций, отвечающих собственным числам $\lambda_m^h \leq h^{-2}(\pi^2 - d)$ с положительной величиной d . Поскольку асимптотическая конструкция (18) удовлетворяет этому ограничению, классическая лемма о “почти собственных” числах и векторах (см. первоисточник [13] и спектральное разложение резольвенты в книге [14, гл. 6]) и легкодоступное утверждение о сходимости нормированных собственных пар позволяют доказать оценку погрешности

$$|\lambda_m^h - h^{-2}M_1^H - \beta_m| \leq c_m h^{-2} e^{-\delta_m/h} \quad \text{при } h \in (0, h_m] \quad (20)$$

с некоторыми зависящими от номера $m \in \mathbb{N}$ положительными числами c_m , δ_m и h_m .

5. ЛОКАЛИЗАЦИЯ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ НА ВЕРТИКАЛЬНОЙ ПЛАСТИНЕ

В случае $H > H_*$ асимптотические анзацы на параллелепипеде $\Xi_2^h \setminus \Xi_3^h$ для собственных пар задачи (2), (3) выглядят так:

$$\lambda_m^h = h^{-2}\pi^2 H^{-2} + \mu_m + \dots, \quad (21)$$

$$u_m^h(x) = \cos\left(\frac{\pi x_2}{hH}\right)v(x_1, x_3) + \dots \quad (22)$$

Как обычно, подстановка анзацев (21) и (22) в соотношение (2) приводит к дифференциальному уравнению (6). Условия Дирихле на границе $\omega^0 \setminus \bar{v}$ вытекают, например, из формулы (3), но то же условие на стороне v предопределено отсутствием порогового резонанса в квантовом волноводе $\mathbb{T}^H$ для $H > H_*$.

Если $M_1^{H*} = \pi^2 H_*^{-2}$ — собственное число задачи (14), (15) и W_1^{H*} — соответствующая экспоненциально затухающая на бесконечности собственная функция, в окрестности точки $h^{-2}M_1^{H*}$ появляются две асимптотические серии собственных чисел исходной задачи (2), (3) в Ω^h , описываемые анзацами (21) и (18), а сомножители v и w из главных членов асимптотик (22) и (19) находятся соответственно из задач Дирихле для уравнений (11) и (6), $\alpha = 0$. Если же в точке $M = \pi^2 H_*^{-2}$ реализуется правильный пороговый резонанс и у задачи (14), (15) есть ограниченное незатухающее ($K \neq 0$) решение (17), то сохраняются только анзацы (21) и (22) для собственных пар $\{\lambda_m^h, u_m^h\}$, однако определяющие их “предельные” пары $\{\mu_m; v_m\}$ находятся из смешанной краевой задачи для уравнения (6), $\alpha = 0$, а именно, на стороне (8) ставится условие Неймана

$$-\frac{\partial v}{\partial x_3}(x_1, 0) = 0, \quad x_1 \in (-a_1, a_1), \quad (23)$$

а на остальной части границы прямоугольника $\omega^0 = (-a_1, a_1) \times (0, a_3)$ — условие Дирихле.

При помощи метода сращиваемых асимптотических разложений (см. монографии [15, 16] и др.) поясним, как качество порогового резонанса влияет на тип предельного краевого условия на отрезке v . Согласно процедуре

сращивания нужно согласовать старший член формулы Тейлора

$$v(x_1, x_3) = v(x_1, 0) + x_3 \frac{\partial v}{\partial x_3}(x_1, 0) + \dots, \quad (24)$$

умноженный на $\cos\left(\frac{\pi x_2}{hH}\right)$, с каким-либо решением задачи (14), (15), параметрически зависящим от переменной x_1 . В случае правильного порогового резонанса искомый главный член внутреннего разложения принимает вид

$$K^{-1}v(x_1, 0)W_{\dagger}^{H*}(h^{-1}x_2, h^{-1}x_3). \quad (25)$$

Вместе с тем при исчезновении резонанса нет решения, стабилизирующегося при $\xi_2 = h^{-1}x_3 \rightarrow +\infty$, и приходится принять условие Дирихле

$$v(x_1, 0) = 0, \quad x_1 \in (-a_1, a_1), \quad (26)$$

аннулирующее первое слагаемое в правой части (24) и делающее возможным сращивание разнородных разложений в главном. Напротив, незатухающий главный член (25) внутреннего разложения оставляет след $v(x_1, 0)$ произвольным и вместо (26) требуется назначить на отрезке v парное (в смысле формулы Грина) краевое условие (23).

Если $H > H_*$, то по стандартной схеме выводится аналогичная (20) оценка погрешности:

$$|\lambda_m^h - h^{-2}H^{-2} - \beta_m| \leq c_m h^{1/2} \quad \text{при } h \in (0, h_m]. \quad (27)$$

Она же верна в случае правильного порогового резонанса, однако при его отсутствии первая асимптотическая серия собственных чисел описывается формулами (18) и (20), а асимптотический анзац (21) порождает вторую, расположенную выше первой, асимптотическую серию $\{\lambda_{N^h(m)}^h\}_{m \in \mathbb{N}}$, члены которой удовлетворяют оценке вида (27), но их номера $N^h(m)$ в упорядоченной последовательности (5) неограниченно возрастают при $h \rightarrow +0$, так как ниже $\lambda_{N^h(m)}^h$ располагаются собственные числа (18) и их количество неограниченно возрастает при утончении пластин (1).

6. НЕСКОЛЬКО ЗАМЕЧАНИЙ

1. В работе [1] доказано лишь утверждение о сходимости $\lambda_m^h \rightarrow \lambda_m^0$ собственных чисел (5) задачи (2), (4), однако с некоторыми упрощениями асимптотические процедуры, разработанные для условий Дирихле, позволяют установить асимптотические разложения собственных пар задачи Неймана и тем самым выяснить скорость сходимости.

2. Полученные результаты без особого труда приспособляются к задаче Дирихле (2), (3) для косой однотавровой и прямой двутавровой балок на рис. 3.

3. Если на узких гранях (часть их глубоко тонированы на рис. 1а и рис. 3б) многогранников Ω^h заменить условие Дирихле условием Неймана, то в целом полученные асимптотические результаты сохраняются, однако для скошенной конструкции на рис. 3а, возникают и другие предельные задачи, порождающие эффект локализации собственных функций около глубоко тонированной и симметричной ей граней, поскольку, как и в задаче (14), (15), дискретный спектр смешанной краевой задачи на скошенной полуполосе (рис. 2б) содержит по крайней мере одно изолированное собственное число (см. публикацию [17]).

4. Вопрос об асимптотическом строении спектра задачи (2), (3) при $H \in (H_\#, H_*)$ остался открытым исключительно из-за отсутствия исчерпывающей информации о спектре задачи (14), (15) в бесконечной области, в частности о пороговом резонансе. Для восполнения сведений о спектре φ^H нужны численные эксперименты — вычислительные методы, позволяющие строго доказать отсутствие захваченных и почти стоячих волн, известны.

5. Рассуждения и выводы с понятными изменениями сохраняются для однородных

изотропных тавровых упругих балок с полностью зафиксированной поверхностью (фрагмент шовной прослойки кирпичной кладки на рис. 1а и 3б), однако из-за векторного характера задачи Дирихле для системы уравнений Ламе выкладки усложняются существенно. Обратим внимание лишь на одно обстоятельство: задача теории упругости о пограничном слое в T -образном изотропном волноводе T^h распадается на две, плоскую и антиплоскую. При этом собственное число последней — скалярной задачи Дирихле (14), (15) для деформации — заведомо строго меньше собственного числа аналогичной двумерной упругой задачи, а значит, при тонкой стенке асимптотические анзацы из разд. 4 остаются без каких-либо изменений, но в нижнечастотном диапазоне пространственной задачи для упругого сочленения Ω^h возникает еще одна асимптотическая серия собственных чисел, порожденная плоской задачей в T^h .

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект № 124041500009-8).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gaudiello A., Gomez D., Perez-Martinez M.-E. A spectral problem for the Laplacian in joined thin films // *Calc. Var.* 2023. V. 62. 129.
2. Штейнберг Б.И. Справочник молодого инженера-конструктора. М.: ЕЕ Медиа, 2012.
3. Назаров С.А. Ограниченные решения в T -образном волноводе и спектральные свойства лестницы Дирихле // *ЖВММФ.* 2014. Т. 54. № 8. С. 1299–1318.
4. Kirchhoff G.R. Ueber der Durchgang eines elektrischen Stromes durch eine Ebene, insbesondere durch eine kreisförmige // *Annalen der Physik und Chemie.* 1845. B. 64. S. 32.
5. Pauling L. The diamagnetic anisotropy of aromatic molecules // *J. Chem. Phys.* 1936. V. 4. P. 672–678.
6. Molchanov S., Vainberg B. Scattering solutions in networks of thin fibers: small diameter asymptotics // *Comm. Math. Phys.* 2007. V. 273. № 2. P. 533–559.
7. Grieser D. Spectra of graph neighborhoods and scattering // *Proc. London Math. Soc.* 2008. V. 97. № 3. P. 718–752.

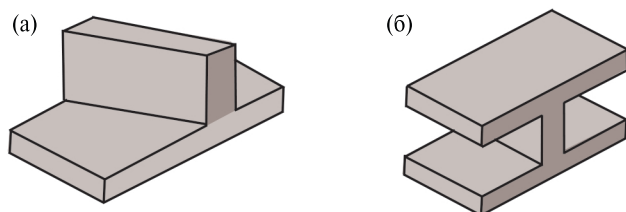


Рис. 3. Скошенная однотавровая (а) и прямая двутавровая (б) балки.

8. *Pankrashkin K.* Eigenvalue inequalities and absence of threshold resonances for waveguide junctions // *J. Math. Anal. Appl.* 2017. V. 449. № 1. P. 907–925.
9. *Назаров С.А.* Пороговые резонансы и виртуальные уровни в спектре цилиндрических и периодических волноводов // *Известия РАН. Серия матем.* 2020. Т. 84. № 6. С. 73–130.
10. *Назаров С.А.* Структура решений эллиптических краевых задач в тонких областях // *Вестник ЛГУ. Серия 1.* 1982. Вып. 2(7). С. 65–68.
11. *Rellich F.* Über das asymptotische Verhalten der Lösungen von $\Delta u + \lambda u = 0$ in unendlichen Gebiete // *Jahresber. Dtsch. Math.-Ver.* 1943. V. 53. № 1. P. 57–65.
12. *Назаров С.А.* Двумерные асимптотические модели тонких цилиндрических упругих прокладок // *Дифференциальные уравнения.* 2022. Т. 58. № 6. С. 738–755.
13. *Вишик М.И., Люстерник Л.А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // *Успехи матем. наук.* 1957. Т. 12. № 5. С. 3–122.
14. *Бирман М.Ш., Соломяк М.З.* Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. Л.: изд-во Ленингр. ун-та, 1980.
15. *Ван Дайк М.Д.* Методы возмущений в механике жидкостей. М.: Мир, 1967.
16. *Ильин А.М.* Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989.
17. *Назаров С.А.* Дискретный спектр коленчатых, разветвляющихся и периодических волноводов // *Алгебра и анализ.* 2011. Т. 23. № 2. С. 206–247.

ASYMPTOTIC STRUCTURE OF THE SPECTRUM OF A THIN DIRICHLET SINGLE-TEE BEAM

S. A. Nazarov^a

^a*Institute of Mechanical Engineering Problems of the Russian Academy of Sciences, Saint-Petersburg, Russia*

Presented by Academician of RAS N.F. Morozov

The asymptotic behaviour of eigenvalues and eigenfunctions of the Dirichlet problem for the Laplace operator in a tee-type junction of two thin parallelepiped plates is examined. The effect of a strong localization is observed for eigenfunctions near junction zones. Comparing with asymptotic results for analogous Neumann problem, the crucial difference between asymptotic behaviour of their spectra is observed.

Keywords: spectra of the Dirichlet and Neumann problems on junctions of thin plates, asymptotics of eigenvalues, localization of eigenfunctions