

УДК 534.16

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЛАСТИНОК ИЗ БИМОДУЛЬНОГО МАТЕРИАЛА С УЧЕТОМ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ

© 2024 г. Член-корреспондент РАН Д. А. Губайдуллин^{1,*}, А. В. Крысько^{1,**},
А. Д. Тебякин², Т. В. Яковлева², В. А. Крысько^{2,***}

Поступило 27.04.2024 г.

После доработки 27.04.2024 г.

Принято к публикации 01.08.2024 г.

Построена математическая модель напряженно-деформированного состояния пластинок из бимодульного материала с учетом упругопластических деформаций по деформационной теории пластичности. Напряженно-деформированное состояние пластинок исследовали методом вариационных итераций – расширенным методом Канторовича. Полученные численным методом решения близки к точным. Выявлено, что нейтральная плоскость является поверхностью разделения зон сжатия и растяжения для прямоугольных в плане пластинок при действии равномерно распределенной нагрузки.

Ключевые слова: бимодульный материал, метод вариационных итераций, метод переменных параметров упругости, нейтральная поверхность

DOI: 10.31857/S2686740024050073, EDN: NXJWMW

Большинство материалов, например керамика, бетон, резина, графит и некоторые биомедицинские материалы, характеризуются существенным различием пределов прочности материала при действии растягивающих и сжимающих напряжений одинаковой величины. Материал, характеризующийся существенным расхождением значения модуля упругости и коэффициента Пуассона при растяжении и при сжатии, называется бимодульным материалом. В целом в теоретическом анализе инженерных профессий широко используются

несколько моделей. Первая модель предложена Bert [1] и основана на критерии положительных/отрицательных знаков продольной деформации волокон. Модель Bert широко используется при анализе ортотропных материалов и слоистых композитов. Вторая модель – модель Амбарцумяна [2], созданная на основе критерия положительных/отрицательных знаков главных напряжений, применима к изотропным материалам. Модель Амбарцумяна имеет особое значение в структурном анализе, поскольку именно этот критерий определяет, является ли определенная точка конструкции растяжением или сжатием. Аналитические решения доступны в нескольких простых случаях, хотя они касаются только отдельных компонентов, например балок и пластинок [3–5]. Существует еще третья упрощенная модель, где определение сжатия и растяжения опирается на знак и величину интенсивности деформации в каждой точке исследуемого объекта. Данный подход реализуется с помощью метода переменных параметров упругости И.А. Биргера [6, 7], доказательство

¹Федеральный исследовательский центр
“Казанский научный центр Российской академии наук”,
Институт механики и машиностроения –
структурное подразделение ФИЦ КазНЦ РАН,
Казань, Россия

²Саратовский государственный технический
университет имени Ю.А. Гагарина, Саратов, Россия

*E-mail: gubaidullin@imm.knc.ru

**E-mail: kryskoav@sstu.ru

***E-mail: tak@san.ru

сходимости которого приведено в работе [8]. За счет изменения интенсивности деформации пересчитываются физические константы, такие как модуль Юнга и коэффициент Пуассона, определяющие дальнейшее поведение материала. В этой же работе предлагается учесть смещение нейтральной поверхности [9, 10]. Данные методы просты, но при этом позволяют показать влияние бимодульности и учета смещения нейтральной поверхности на поведение материала. Поэтому они будут рассмотрены в данной работе.

Для нахождения решения, как известно, используются численные и численно-аналитические методы. В работе [11] представлен обширный обзор методов упрощения нелинейных дифференциальных уравнений в системы разрешимых уравнений с упором на их надежность, обоснованность, точность и вычислительную эффективность. В обзор включены различные методы, в том числе методы Фурье, методы типа Бубнова–Галёркина (МБГ), вариационные и другие. Количественная оценка и сравнение этих методов были проведены на основе модифицированного конечно-разностного уравнения Жермен–Лагранжа [12], статики пластинок и сопоставлены с точными результатами, полученными с помощью метода Навье. Обоснование вариационных итерационных методов для класса уравнений, описываемых положительно определенными операторами, приведено в работе [11].

В отличие от всех известных подходов в данной работе исследуется влияние бимодульности материала и учета смещения нейтральной поверхности при анализе упругопластических деформаций пластинки под действием равномерно распределенных нагрузок. Задача решается методом вариационных итераций (МВИ) – расширенным методом Канторвича.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим изотропную прямоугольную в плане пластинку с размерами $a, b, 2h_0$ вдоль осей x, y, z соответственно. Начало координат расположено в левом верхнем углу пластинки в ее срединной поверхности, оси x, y параллельны сторонам пластинки, ось z направлена вниз (рис. 1).

В указанной системе координат пластинка как трехмерная область Ω определяется $\Omega = \{x, y, z / (x, y, z) \in [0, a] \times [0, b] \times [-h_0, h_0]\}$. Срединная поверхность при этом обозначена как $\Gamma = \{x, y / (x, y) \in [0, a] \times [0, b]\}$. В основу построенной математической модели положены следующие гипотезы:

1. Кинематическая модель первого приближения Кирхгофа.

2. Материал, из которого изготовлена пластинка, считается изотропным, но неоднородным; физические константы: модуль Юнга $E(x, y, z, \epsilon_0, \epsilon_i)$, модуль сдвига $G(x, y, z, \epsilon_0, \epsilon_i)$, коэффициент объемной деформации $K(x, y, z, \epsilon_0, \epsilon_i)$, коэффициент Пуассона $\nu(x, y, z, \epsilon_0, \epsilon_i)$, $\sigma_s(x, y, z, \epsilon_0, \epsilon_i)$, $e_s(x, y, z, \epsilon_0, \epsilon_i)$ – зависят от пространственных координат, интенсивности деформации и объемной деформации.

3. Используется критерий пластичности Мизеса.

4. Учитывается степень свободы перехода от растяжений к сжатию, т.е. учитывается смещение нейтральной поверхности Γ .

Из вариации энергии деформации и энергии внешних сил получено уравнение упругопластической пластинки:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} M_x + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} H + \frac{\partial^2}{\partial y^2} M_y = q(x, y), \quad (1)$$

$$\text{где } D_j(x, y) = \int_{-h_0}^{h_0} E \left(\frac{z^2 \nu^{j-1}}{1 - \nu^2} \right) dz, \quad i = 1, 2,$$

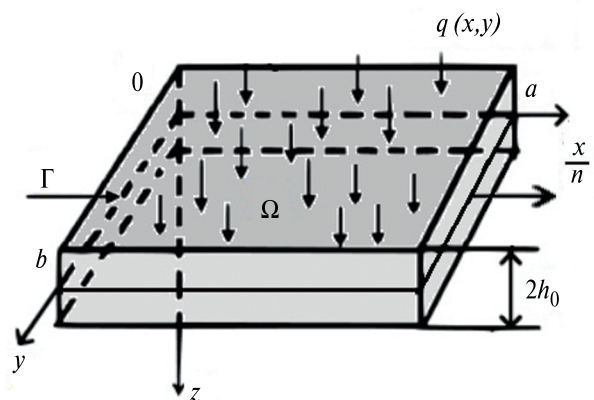


Рис. 1. Расчетная схема.

$$D_{20}(x, y) = \int_{-h_0}^{h_0} \frac{E}{1+\nu} z^2 dz, \quad H = D_{20}(x, y) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y},$$

$$M_x = D_1(x, y) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_2(x, y) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2},$$

$$M_y = D_2(x, y) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_1(x, y) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}.$$

Полученное уравнение является обобщением уравнения Жермен–Лагранжа.

С помощью безразмерных параметров

$$\bar{x} = \frac{x}{a}, \quad \bar{y} = \frac{y}{b}, \quad \bar{z} = \frac{z}{2h_0}, \quad \bar{w} = \frac{w}{2h_0}, \quad \lambda_1 = \frac{a}{2h_0},$$

$$\lambda_2 = \frac{b}{2h_0}, \quad \lambda = \frac{a}{b}, \quad q(x, y) = \frac{G_0}{\lambda_1^2 \lambda_2^2}, \quad \varepsilon_{xx} = \lambda_1^{-2} \bar{\varepsilon}_{xx},$$

$$\varepsilon_{yy} = \lambda_2^{-2} \bar{\varepsilon}_{yy}, \quad \varepsilon_{xy} = \lambda \lambda_1^{-2} \bar{\varepsilon}_{xy}, \quad e_i = \lambda_1^{-2} \bar{e}_i,$$

$$\bar{\sigma}_{si} = \sigma_{si} G_0^{-1} \lambda_1^{-2}, \quad e_{si} = \lambda_1^{-2} \bar{e}_{si}, \quad G = G_0 \bar{G}, \quad K = G_0 \bar{K},$$

$$E = G_0 \bar{E}, \quad D_i = G_0 8h_0^3 \bar{D}_i, \quad D_{20} = G_0 8h_0^3 \bar{D}_{20}$$

уравнение (1) записано в безразмерном виде:

$$\lambda^{-2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[D_1(x, y) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \lambda^2 D_2(x, y) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] +$$

$$+ \lambda^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[\lambda^{-2} D_2(x, y) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_1(x, y) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] +$$

$$+ 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[D_{20}(x, y) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] = q(x, y). \quad (2)$$

К уравнению (2) следует присоединить одно из краевых условий: 1) защемление по контуру $w|_{\Gamma} = \partial w / \partial n|_{\Gamma} = 0$; 2) шарнирное опирание по контуру $w|_{\Gamma} = \partial^2 w / \partial n^2|_{\Gamma} = 0$. Возможны другие краевые условия, как однородные, так и неоднородные.

ПРОЦЕДУРА ВЫЧИСЛЕНИЯ

Для решения системы нелинейных уравнений в частных производных (2) применялся МВИ. Эффективность этого метода описана и обсуждена в работах [13–16]. Этот метод является обобщением метода Канторовича–Власова.

Основное внимание исследователей направлено на сравнение и учет смещения нейтральной поверхности и ее искривления [3–5]. С этой целью применялось изменение границ

интегрирования в (2) для каждой точки пластинки по x и y . Верхний (h_p) и нижний (h_n) пределы интегрирования определены по формулам

$$h_p = \frac{\sqrt{E_n}}{\sqrt{E_n} + \sqrt{E_p}} 2h_0, \quad h_n = \frac{\sqrt{E_p}}{\sqrt{E_n} + \sqrt{E_p}} 2h_0,$$

где $2h_0$ – толщина пластинки.

При решении уравнения пластинки как трехмерного тела пространство пластинки разбивалось на трехмерную сетку. В узлах сетки определялся модуль Юнга. Модуль Юнга индивидуален в каждой точке пространства за счет пересчета физических параметров с опорой на значения интенсивности деформации, получаемые при решении. После применения МВИ и пересчета физических параметров модуль Юнга не являлся константой по толщине пластинки. В этом случае находился E_p – среднеарифметический модуль Юнга по толщине в точках, где интенсивность деформации принимала положительные значения. Соответственно, E_n – модуль, в котором принимались отрицательные значения. Так как $h_p + h_n = 2h_0$, нахождение новых пределов задавало смещение нейтральной поверхности Γ , что для всех точек пластинки по x и y индивидуально, т.е. $\Gamma(x, y)$ – функция от x и y и она является поверхностью. После смены пределов интегрирования пересчитывались E , ν , G .

На рис. 2 представлены графики нагрузка–прогиб в центре пластинки под действием равномерно распределенной нагрузки.

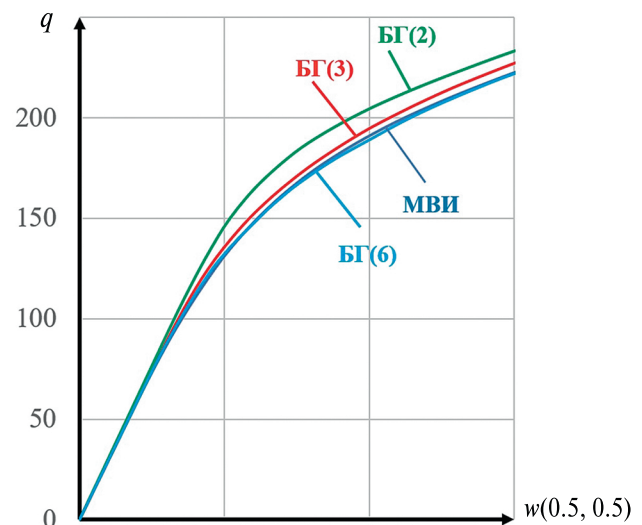


Рис. 2. Зависимость $q[w(0.5, 0.5)]$ для пластинки, полученная методами МВИ и МБГ в различных приближениях.

Задача решалась двумя методами: методом Бубнова–Галёркина (МБГ) во втором ($N = 2$), третьем ($N = 3$) и шестом ($N = 6$) приближениях и МВИ во втором приближении, тем самым снималась гипотеза Фурье о разделении переменных. Приближение N для МБГ указывает на количество членов ряда N^2 , которые определяют найденное решение. Можно видеть, что решение МБГ при увеличении количества членов ряда сходится к решению найденного МВИ. Также сравнение методов показало, что для расчета поведения пластинки под действием больших нагрузок МБГ сильно уступает в затратах по времени. Например, для нагрузки $q = 200$ решение МБГ ($N = 6$) потребовало 147 с, а для МВИ – 20 с. Для дополнительного подтверждения значимости данного метода ранее был представлен ряд сравнений МВИ с другими численными методами [11].

ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Численное исследование проведено для пластинки из серого железа, шарнирно опертой по контуру, при действии равномерно распределенной нагрузки $q(x, y) = q$. Для моделирования упругопластического изгиба применялись диаграммы $\sigma_i(e_i)$ для бимодульного материала, где e_i – интенсивность деформации. На рис. 3 изображены две аппроксимации зависимости

интенсивности напряжений от интенсивности деформации $\sigma_i(e_i)$ для серого железа. Модель 2 взята из работы [17], она построена по точкам с использованием кубической интерполяции. Модель 1 представляет собой аппроксимацию модели 2 в виде ломаных линий, описывающие физические данные аппроксимации представлены в табл. 1. Красными точками обозначен переход от линейной задачи к физически нелинейной (предел деформаций e_{si}^+ – при растяжении, e_{si}^- – при сжатии).

На рис. 4 представлены результаты численного эксперимента в виде графиков нагрузка – прогиб в центре. Тип кривой (сплошная линия – модель 1, штриховая – модель 2) определяет используемый тип аппроксимации, соответствующий рис. 3.

На рис. 4 цвет кривой указывает учет типа бимодульности. Синий цвет соответствует решению задачи для пластинки из одномодульного материала, красный и зеленый

Таблица 1. Физические константы для аппроксимации зависимости напряжения от деформаций модели 1 [17]

Серое железо	E , МПа	ν^+	G , МПа	G_1 , МПа	e_{si}
+ (растяжение)	114000	0.29	44186	4364	3.21×10^{-3}
– (сжатие)	114000	0.29	44186	2181	1.636×10^{-3}

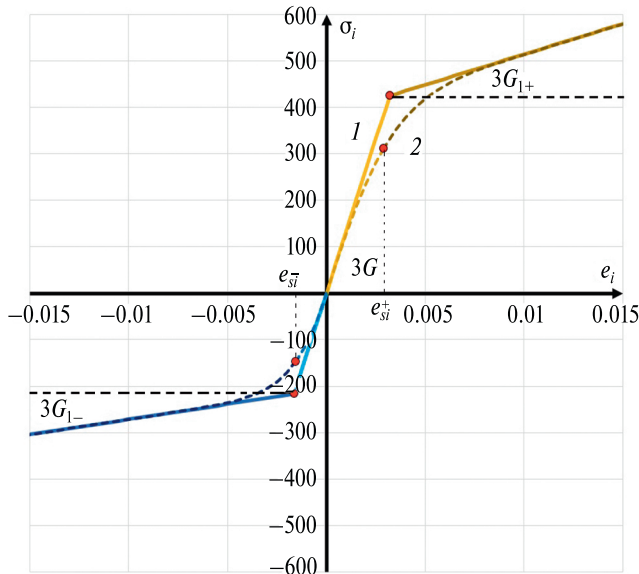


Рис. 3. Зависимость $\sigma_i(e_i)$ для серого железа для аппроксимации моделей 1 и 2.

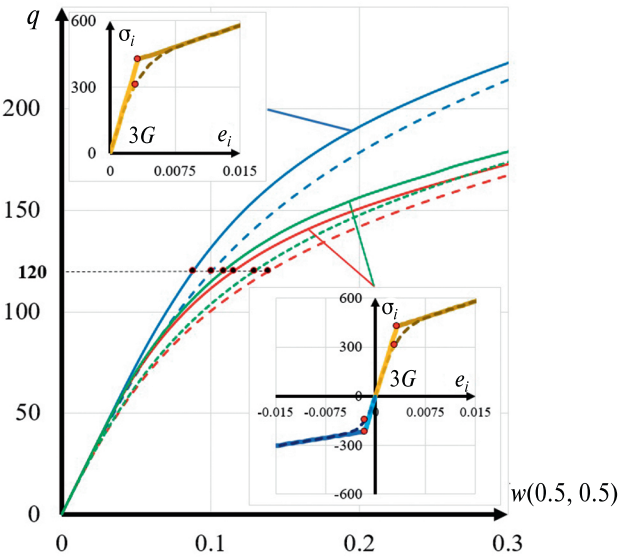


Рис. 4. Зависимость $q[w(0.5, 0.5)]$ для пластинки из одномодульного и бимодульного материалов и смещения нейтральной поверхности.

цвета — решению для пластинки из бимодульного материала без учета смещения нейтральной поверхности и с учетом соответственно. Решение задачи для пластинки из одномодульного материала значительно отличается от решений задачи для пластинки из бимодульного материала. Также видно, что присутствует влияние учета смещения нейтральной поверхности. В табл. 2 представлены данные для нагрузки 120, показывающие это влияние.

С увеличением нагрузки учет физической нелинейности приводит к смещению нейтральной поверхности.

На рис. 5–8 представлены распределения интенсивности деформации e_i по всей пластинке для значения нагрузки $q = 120$, указанного на рис. 4. На всех рисунках слева изображена пластинка с аппроксимацией, соответствующей сплошной линии графика, а справа — соответствующей штриховой. На рис. 5 представлены распределения e_i в пластинке

из одномодульного материала, а на рис. 6–8 показаны распределения e_i в пластинке из бимодульного материала. На рис. 7 и 8 показаны распределения e_i в пластинке из бимодульного материала и с учетом смещения нейтральной поверхности в разной проекции.

Для визуализации представлены 4 цвета интенсивности деформации e_i , указывающие на величину деформации, превышающую или не превышающую предел деформации. Коричневый цвет обозначает превышение предела прочности при растяжении, оранжевый — интенсивность деформации ниже предела прочности. Для синего и голубого цветов обозначения аналогичны, но только для сжатия. Красная линия обозначает нейтральную поверхность пластинки.

На рис. 8 показано смещение нейтральной поверхности и всех линий интенсивности деформации. За счет физической нелинейности

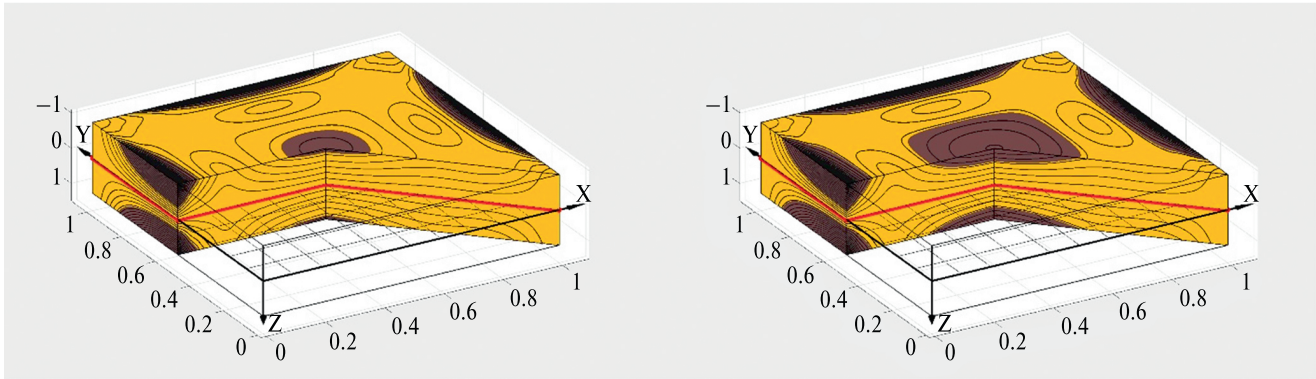


Рис. 5. Распределение e_i в пластинке из одномодульного материала при $q = 120$ для аппроксимации моделей 1 и 2.

Таблица 2. Сравнение значений $w(0.5, 0.5)$ между различными аппроксимациями с учетом и без учета смещения нейтральной поверхности при $q = 120$

Сравниваемые величины	Модель 1		Модель 2	
	С учетом смещения нейтральной поверхности	Без учета смещения нейтральной поверхности	С учетом смещения нейтральной поверхности	Без учета смещения нейтральной поверхности
$w(0.5, 0.5)$	0.108840	0.115695	0.129583	0.139040
%	0	6.29	0	7.29
$e_i(0, 0.5, 1)$	7.52627975	7.88271314	8.71190737	9.14242645
%	0	4.73	0	4.94
$e_i(0, 0.5, -1)$	-7.20807024	-8.28402154	-8.34977758	-9.57423535
%	0	14.92	0	14.66
$e_i(0.5, 0.5, 1)$	2.23155298	2.27738092	2.83854833	2.91208290
%	0	2.05%	0	2.59
$e_i(0.5, 0.5, -1)$	-2.32552900	-2.68600785	-2.86449363	-3.33031129
%	0	15.5	0	16.26

нейтральная поверхность здесь является криволинейной.

ВЫВОДЫ

В работе построена математическая модель напряженно-деформированного состояния пластинок из бимодульного материала с учетом упругопластических деформаций по деформационной теории пластичности.

Предложена общая итерационная процедура решения указанных задач, основанная на МВИ, методе переменных параметров упругости И.А. Биргера, методе Ньютона–Рафсона. Итерационные процедуры вложены одна в другую, для каждой из которых доказана их сходимость. Это дает возможность утверждать, что получены решения, близкие к точным.

Предложенная методология является эффективной с точки зрения точности и быстро-

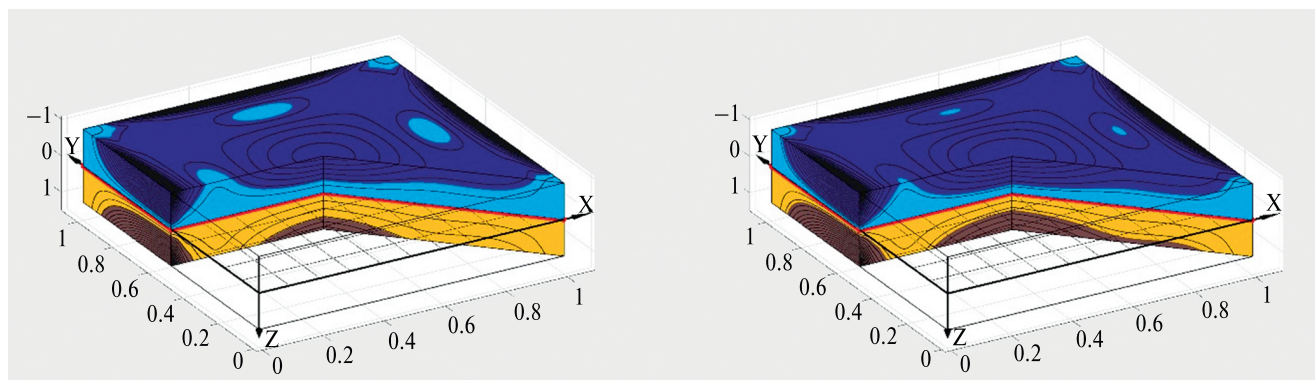


Рис. 6. Распределение e_z в пластинке из бимодульного материала при $q = 120$ для аппроксимации моделей 1 и 2.

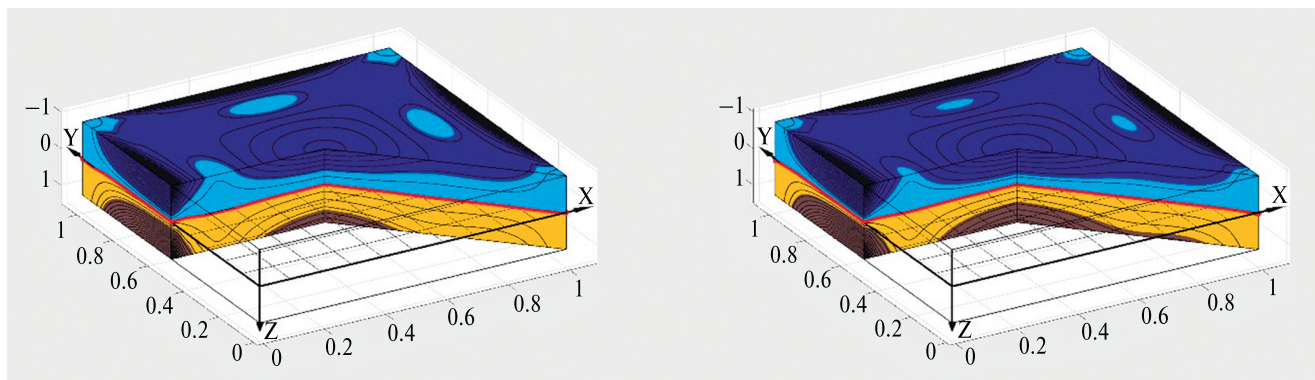


Рис. 7. Распределение e_z в пластинке при $q = 120$ с учетом бимодульности и смещения нейтральной поверхности для аппроксимации моделей 1 и 2.

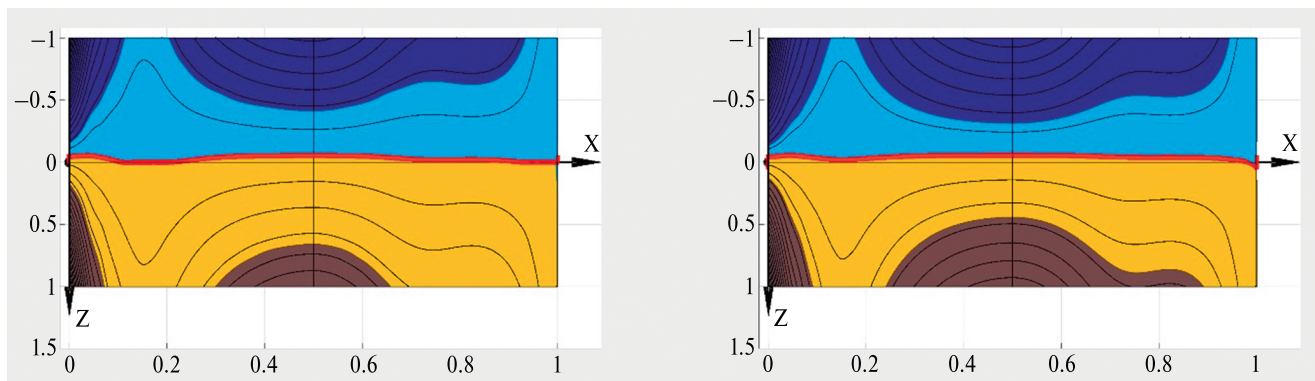


Рис. 8. Смещение нейтральной поверхности.

действия расчета прямоугольных в плане пластинок при действии поперечной нагрузки.

Выявлено, что нейтральная плоскость является поверхностью разделения зон сжатия и растяжения для прямоугольных в плане пластинок при действии равномерно распределенной нагрузки.

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ (№ 22-71-10083, https://rscf.ru/prjcard_int?22-71-10083/) в части построения математической модели, методологии, визуализации полученных результатов (Т.В. Яковлева), в части создания программного обеспечения и валидации результатов (А.Д. Тебякин), в рамках госзадания ФИЦ КазНЦ РАН в части концепции исследования, анализа и визуализации полученных результатов (Д.А. Губайдуллин), в части подхода к исследованию, анализа полученных результатов, написания оригинального текста (А.В. Крысько) и при поддержке Саратовского государственного технического университета в части концепции итерационной процедуры, методологии, анализа полученных результатов (В.А. Крысько).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bert C.W. Models for fibrous composites with different properties in tension and compression // ASME J. Eng. Mater. Technol. 1977. V. 99. P. 344–349. <https://doi.org/10.1115/1.3443550>
2. Ambartsumyan S.A. Elasticity Theory of Different Modulus. Beijing (China): China Railway Publishing House, 1986.
3. Li X., Sun J.-Y., Dong J., He X.-T. One-dimensional and two-dimensional analytical solutions for functionally graded beams with different moduli in tension and compression // Materials. 2018. V. 11. P. 830. <https://doi.org/10.3390/ma11050830>
4. He X.-T., Li W.-M., Sun J.-Y., Wang Z.-X. An elasticity solution of functionally graded beams with different moduli in tension and compression // Mech. Adv. Mater. Struct. 2018. V. 25. P. 143–154. <https://doi.org/10.1080/15376494.2016.1255808>
5. He X.-T., Pei X.-X., Sun J.-Y., Zheng Z.-L. Simplified theory and analytical solution for functionally graded thin plates with different moduli in tension and compression // Mech. Res. Commun. 2016. V. 74. P. 72–80. <https://doi.org/10.1016/j.mechrescom.2016.04.006>
6. Демьянушко И.В., Биргер И.А. Расчет на прочность вращающихся дисков. М.: Машиностроение, 1978. 247 с.
7. Биргер И.А., Мавлютов Р.Р. Сопротивление материалов. М.: Наука, 1986. 560 с.
8. Ворович И.И., Красовский Ю.П. О методе упругих решений // ДАН СССР. 1959. Т. 126. № 4. С. 740–743.
9. Kropiowska D., Mikulski L., Szeptyński P. Optimal design of a Kirchhoff-Love plate of variable thickness by application of the minimum principle // Structural and Multidisciplinary Optimization. 2018. V. 59(5). P. 1581–1598. <https://doi.org/10.1007/s00158-018-2148-3>
10. Xue X.-Y., Du D.-W., Sun J.-Y., He X.-T. Application of Variational Method to Stability Analysis of Cantilever Vertical Plates with Bimodular Effect // Materials. 2021. V. 14. 6129. <https://doi.org/10.3390/ma14206129>
11. Awrejcewicz J., Krysko-Jr. V.A., Kalutsky L.A., et al. Review of the Methods of Transition from Partial to Ordinary Differential Equations: From Macro to Nano-structural Dynamics // Arch. Computat. Methods Eng. 2021. V. 28. P. 4781–4813. <https://doi.org/10.1007/s11831-021-09550-5>
12. Канторович Л.В. О методе Ньютона // Труды МИАН СССР им. В.А. Стеклова. 1949. Т. 28. С. 104–144.
13. Tebyakin A.D., Kalutsky L.A., Yakovleva T.V., Krysko A.V. Application of Variational Iterations Method for Studying Physically and Geometrically Nonlinear Kirchhoff Nanoplates: A Mathematical Justification // Axioms. 2023. V. 12(4). P. 355. <https://doi.org/10.3390/axioms12040355>
14. Tebyakin A.D., Krysko A.V., Zhigalov M.V., Krysko V.A. Elastic-plastic deformation of nanoplates. The method of variational iterations (extended Kantorovich method) // Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatic. 2022. V. 22(4). P. 494–505. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-4-494-505>
15. Krysko-jr V.A., Tebyakin A.D., Zhigalov M.V., Krysko V.A., Awrejcewicz J. Mathematical model of physically non-linear Kirchhoff plates: Investigation and analysis of effective computational iterative methods // International Journal of Non-Linear Mechanics. 2023. V. 150. 104346. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2022.104346>
16. Awrejcewicz J., Krysko V.A. Elastic and thermoelastic problems in nonlinear dynamics of structural members. Applications of the Bubnov–Galerkin and Finite Difference Methods. 2nd ed. Cham: Springer, 2020. XX. 602 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-37663-5>
17. Tamarin Y. Atlas of Stress-Strain Curves. Asm Intl. 2nd ed. 2002. 816 p.

MODELLING OF PLATES MADE FROM BIMODULAR MATERIAL TAKING INTO ACCOUNT ELASTIC-PLASTIC DEFORMATIONS

Corresponding Member of the RAS D. A. Gubaidullin^a, A. V. Krysko^a, A. D. Tebyakin^b,
T. V. Yakovleva^b, V. A. Krysko^b

^a*Institute of Mechanics and Engineering, FRC "Kazan Scientific Center, Russian Academy of Sciences", Kazan, Russia*

^b*Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Saratov, Russia*

A mathematical model of the stress-strain state of plates made of bimodular material with elastic-plastic deformations according to the deformation theory of plasticity is constructed. The stress-strain state of plates is studied by the variational iterations method or the extended Kantorovich method. The solutions obtained are close to exact. For rectangular plates subjected to a uniformly distributed load, the neutral plane is found to be the interface between the compression and tension zones.

Keywords: bimodular material, variational iteration method, Birger's variable parameter method, neutral surface, exact solutions