

УДК 517.977

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ДВИЖЕНИЯ В ЖИДКОСТИ ТЕЛА, УПРАВЛЯЕМОГО СИЛОЙ ЕГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ С ВНУТРЕННЕЙ МАССОЙ

© 2024 г. Т. В. Глазков^{1,*}, академик РАН Ф. Л. Черноусько^{1,**}

Поступило 25.06.2024 г.

После доработки 25.06.2024 г.

Принято к публикации 07.08.2024 г.

Рассматривается поступательное движение в жидкости тела (корпуса) с внутренней подвижной массой. Внешнее сопротивление пропорционально квадрату скорости тела и зависит от направления движения. Управление осуществляется при помощи силы взаимодействия внутреннего тела с корпусом. Построены и проанализированы движения с периодическим изменением скоростей. Оценена средняя скорость перемещения системы.

Ключевые слова: мобильные роботы, нелинейная динамика, квадратичное сопротивление, периодическое движение

DOI: 10.31857/S2686740024050062, EDN: HXMDFC

Динамика мобильных систем, управляемых при помощи внутренних подвижных масс, привлекает в последние годы значительное внимание. Роботы, движение которых основано на целенаправленном перемещении внутренних масс, часто называются капсульными роботами или вибророботами. Эти роботы не имеют внешних подвижных элементов, могут иметь гладкие и герметичные корпуса и способны перемещаться в трубах и различных средах, выполняя операции измерения и мониторинга. Миниатюрные капсульные роботы нашли применение в медицине для диагностики и доставки медикаментов.

Периодические движения виброробота в среде с квадратичным сопротивлением изучались в работах [1–3]. Динамика мобильных систем с внутренними подвижными массами в средах с сопротивлением, включая оптимизацию таких движений, исследовалась в работах [3–11].

В работе рассматривается поступательное прямолинейное движение в жидкости твердого тела (корпуса), управляемое при помощи внутренней подвижной массы. Сила внешнего сопротивления жидкости, действующая на корпус, предполагается зависящей от направления движения и пропорциональной квадрату скорости движения корпуса.

В отличие от работ [8–11], где рассматривается кинематическое управление, при котором управляющим воздействием служит скорость движения внутренней массы относительно корпуса, в данной работе рассматривается динамическое управление. Здесь в качестве управляющего воздействия выступает сила взаимодействия внутренней массы с корпусом. При этом все скорости изменяются непрерывно и отсутствуют ударные взаимодействия тел.

Построены и проанализированы управляемые движения с периодическим изменением скоростей. Оценена средняя скорость перемещения системы.

¹Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского
Российской академии наук, Москва, Россия

*E-mail: t.glazkov@bk.ru

**E-mail: chern@ipmnet.ru

УПРАВЛЯЕМАЯ СИСТЕМА

Рассматривается управляемая механическая система, способная передвигаться прямолинейно и поступательно в жидкости. Система состоит из двух тел: корпуса массы M и внутренней массы m , которая снабжена двигателем (актюатором) и может перемещаться относительно корпуса внутри некоторой полости длины l (рис. 1). Обозначим через R силу сопротивления жидкости, приложенную к корпусу, а через F — управляющую силу, приложенную к массе m и развиваемую актюатором; следовательно, к корпусу приложена сила $-F$.

Обозначим через x смещение корпуса относительно некоторой инерциальной системы координат, через v — скорость корпуса, через ξ — смещение внутренней массы относительно корпуса, а через η — скорость этой массы относительно корпуса. Кинематические соотношения имеют вид

$$\dot{x} = v, \quad \dot{\xi} = \eta, \quad (1)$$

динамические уравнения представим в виде

$$M\dot{v} = R - F, \quad m(\dot{v} + \dot{\eta}) = F. \quad (2)$$

Предполагаем, что сила сопротивления при движении корпуса вперед, т.е. при $v > 0$, направлена против скорости и квадратичным образом зависит от скорости. Имеем

$$R = -Mc v^2 \text{ при } v \geq 0, \quad (3)$$

где $c > 0$ — коэффициент сопротивления. Управляющую силу F представим в виде

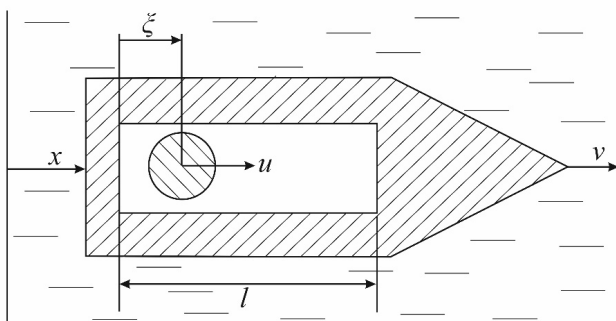


Рис. 1. Механическая система.

$$F = M F_0 u, \quad |u| \leq 1, \quad (4)$$

где F_0 — величина управляющей силы на единицу массы корпуса, u — управление, которое будем принимать равным ± 1 .

Для пояснения смысла введенных соотношений и последующего перехода к безразмерным переменным рассмотрим сначала пассивное движение корпуса по инерции. Положим $F = 0$ и получим из уравнений (1)–(3)

$$\dot{x} = v, \quad \dot{v} = -c v^2.$$

Разделив второе из этих уравнений на первое, получим

$$\frac{dv}{dx} = -c v.$$

Интегрируя это уравнение при начальном условии $v = 0$ при $x = 0$, найдем

$$v = v_0 e^{-cx}.$$

Отсюда следует, что коэффициент сопротивления c имеет размерность, обратную длине, и можно положить

$$c = L^{-1}, \quad (5)$$

где L — длина пути, на котором скорость движения по инерции уменьшается в e раз.

Рассмотрим теперь движение при максимальной по величине управляющей силе, приложенной к корпусу и направленной вдоль скорости v . Положим $u = -1$ и подставим равенства (4) и (5) в первое уравнение (2). Получим

$$\dot{v} = -c v^2 + F_0. \quad (6)$$

Интегрируя уравнение (6) при начальном условии $v(0) = 0$, находим

$$v(t) = v_* \frac{e^{2c v_* t} - 1}{e^{2c v_* t} + 1},$$

где введено обозначение

$$v_* = \sqrt{F_0/c}. \quad (7)$$

Отсюда следует, что $v(t) \rightarrow v_*$ при $t \rightarrow \infty$, где v_* — скорость, при которой правая часть уравнения (6)

обращается в нуль, т.е. предельная скорость, до которой может разогнаться корпус.

Для перехода к безразмерным переменным выберем в качестве единицы длины величину L из (5) и в качестве единицы скорости величину v_* из (7). В качестве единицы времени возьмем

$$T_0 = \frac{L}{v_*} = \sqrt{\frac{L}{F_0}}. \quad (8)$$

Введем безразмерные переменные соотношениями

$$t = T_0 t', \quad x = L x', \quad \xi = L \xi', \quad v = v_* v', \quad \eta = v_* \eta'. \quad (9)$$

В дальнейшем новые (безразмерные) переменные обозначаем теми же буквами, что и размерные, штрихи опускаем. Используя принятые единицы длины L и времени T_0 , введем безразмерные длину полости и период движения соотношениями, аналогичными (9):

$$l' = l/L, \quad T' = T/T_0.$$

Штрихи здесь также будем опускать.

Кинематические соотношения после замены (9) сохраняются в виде (1). Динамические уравнения (2) после перехода к безразмерным переменным с учетом соотношений (3)–(5), (7) примут вид

$$\dot{v} = -v^2 - u \quad \text{при } v \geq 0, \quad (10)$$

$$\kappa(\dot{v} + \dot{\eta}) = u, \quad \kappa = m/M. \quad (11)$$

При движении корпуса назад, т.е. при $v < 0$, сила сопротивления снова определяется формулой (3), в которой вместо коэффициента сопротивления c должен фигурировать другой коэффициент c_- . Так как форму корпуса естественно выбирать обтекаемой, имеем $c_- > c$. Положим

$$c_- = c/r, \quad r < 1. \quad (12)$$

После перехода к безразмерным переменным (9) первое уравнение (2) при $v < 0$ примет вид, аналогичный (10):

$$\dot{v} = \frac{v^2}{r} - u \quad \text{при } v < 0. \quad (13)$$

Таким образом, динамика рассматриваемой системы описывается соотношениями (1), (10), (11), (13).

Ранее динамика подобной системы, управляемой при помощи внутренней массы, рассматривалась в ряде работ [8, 10, 11] в предположении, что управление задается кинематическим образом, т.е. путем выбора скорости движения внутренней массы относительно корпуса. При резком изменении относительной скорости внутренней массы в системе происходят удары, в частности, при достижении подвижной массой концов полости. Рассматриваемая в данной работе математическая модель, в которой управление осуществляется силой взаимодействия внутренней массы с корпусом, свободна от этого недостатка — здесь все скорости изменяются непрерывно.

ПЕРИОДИЧЕСКОЕ ДВИЖЕНИЕ

Рассматриваем движения, при которых скорость корпуса $v(t)$ и относительная скорость внутренней массы $\eta(t)$, а также смещение внутренней массы относительно корпуса $\xi(t)$ изменяются периодически с периодом T . Так как движение корпуса в сопротивляющейся среде со скоростью, сохраняющей постоянное направление, невозможно, то обязательно есть моменты времени, в которых скорость $v(t)$ обращается в нуль. Один из таких моментов примем за начало отсчета времени. Условия периодичности скоростей примут вид

$$v(0) = v(T) = 0, \quad \eta(0) = \eta(T) = \eta_0, \quad (14)$$

где η_0 — пока неизвестная начальная скорость внутренней массы относительно корпуса.

Обозначим через ξ_0 начальное смещение внутренней массы относительно корпуса. Условие периодичности смещения запишем в виде

$$\xi(0) = \xi_0, \quad \xi(T) = \xi_0. \quad (15)$$

Будем рассматривать движения, при которых управление $u(t)$ всегда максимально по величине и принимает одно из крайних значений

$u = \pm 1$. Без нарушения общности полагаем, что $u = 1$ на начальном участке, и при этом $v < 0$. Периодическое изменение скорости $v(t)$ будет построено в соответствии со схемой, представленной на рис. 2, где моменты времени τ_1, τ_2, τ_3 , удовлетворяющие неравенствам

$$0 < \tau_1 < \tau_2 < \tau_3 < T, \quad (16)$$

являются границами участков, на которых сохраняются знаки скорости и управления.

Имеем соотношения:

$$\begin{aligned} t \in (0, \tau_1): \quad & v < 0, \quad u = 1, \\ t \in (\tau_1, \tau_2): \quad & v < 0, \quad u = -1, \\ t \in (\tau_2, \tau_3): \quad & v > 0, \quad u = -1, \\ t \in (\tau_3, T): \quad & v > 0, \quad u = 1. \end{aligned} \quad (17)$$

Сначала будут построены зависимости $v(t)$ и $\eta(t)$ для скоростей, а затем для смещений $x(t)$ и $\xi(t)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТЕЙ

На интервале $t \in (0, \tau_1)$, в соответствии с соотношениями (17), имеем в силу уравнения (13)

$$\dot{v} = \frac{v^2}{r} - 1. \quad (18)$$

Интегрируя уравнение (18) и удовлетворяя начальному условию $v(0) = 0$ из (14), получим

$$v(t) = -\sqrt{r} \frac{1 - e_1(t)}{1 + e_1(t)}, \quad e_1(t) = e^{-\frac{2t}{\sqrt{r}}} \quad \text{при } t \in [0, \tau_1]. \quad (19)$$

При $t = \tau_1$ имеем соотношения

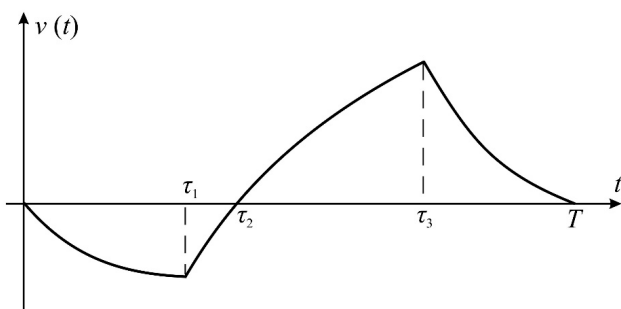


Рис. 2. Периодическое движение.

$$v(\tau_1) = -\sqrt{r} \frac{1 - e_{11}}{1 + e_{11}}, \quad e_{11} = e^{-\frac{2\tau_1}{\sqrt{r}}}. \quad (20)$$

На интервале $t \in (\tau_1, \tau_2)$, в соответствии с соотношениями (17), получим, согласно уравнению (13),

$$\dot{v} = \frac{v^2}{r} + 1. \quad (21)$$

Проинтегрируем уравнение (21) и найдем

$$\sqrt{r} \operatorname{arctg} \frac{v}{\sqrt{r}} = t + c_1 \quad \text{при } t \in [\tau_1, \tau_2]. \quad (22)$$

Для определения произвольной постоянной воспользуемся условием (20) при $t = \tau_1$ и получим

$$c_1 = \sqrt{r} \operatorname{arctg} \frac{v(\tau_1)}{\sqrt{r}} - \tau_1. \quad (23)$$

На основании равенств (22) и (23) находим

$$v(t) = \frac{v(\tau_1) + \sqrt{r} \operatorname{tg}[(t - \tau_1)/\sqrt{r}]}{1 - [v(\tau_1)/\sqrt{r}] \operatorname{tg}[(t - \tau_1)/\sqrt{r}]} \quad \text{при } t \in [\tau_1, \tau_2]. \quad (24)$$

В момент $t = \tau_2$ происходит смена знака $v(t)$ (см. рис. 2), так что $v(\tau_2) = 0$. Подставляя это условие в соотношение (24), получим равенство

$$\tau_2 = \tau_1 + \sqrt{r} \operatorname{arctg} \frac{1 - e_{11}}{1 + e_{11}}, \quad (25)$$

где e_{11} определено в соотношениях (20).

Докажем неравенство, полезное для некоторых оценок:

$$\tau_2 < 2\tau_1. \quad (26)$$

Введем обозначение

$$z = \tau_1/\sqrt{r}. \quad (27)$$

Тогда неравенство (26), как следует из равенств (25) и (20), эквивалентно неравенству

$$\operatorname{tg} z > f(z) = \frac{1 - e^{-2z}}{1 + e^{-2z}} \quad \text{при } z > 0. \quad (28)$$

Дифференцируя функцию $f(z)$, находим

$$f'(z) = \frac{4e^{-2z}}{(1 + e^{-2z})^2}, \quad f''(z) = \frac{8e^{-2z}(e^{-2z} - 1)}{(1 + e^{-2z})^3} < 0. \quad (29)$$

При $z = 0$ обе части неравенства (28) равны 0, а их производные также совпадают и равны 1. В силу второго неравенства (29) производная $f'(z)$ убывает при $z > 0$ и меньше производной левой части неравенства (28). Отсюда вытекает справедливость неравенства (28) и, следовательно, неравенства (26).

На интервале $t \in (\tau_2, \tau_3)$, согласно соотношениям (17), имеем уравнение (10) для v в виде

$$\dot{v} = -v^2 + 1. \quad (30)$$

Интегрируя уравнение (30) при начальном условии $v(\tau_2) = 0$, получим

$$v(t) = \frac{e_2 - 1}{e_2 + 1}, \quad e_2 = e^{2(t-\tau_2)} \quad \text{при } t \in [\tau_2, \tau_3]. \quad (31)$$

В конце интервала $[\tau_2, \tau_3]$ имеем

$$v(\tau_3) = \frac{e_{21} - 1}{e_{21} + 1}, \quad e_{21} = e^{2(\tau_3-\tau_2)}. \quad (32)$$

На последнем интервале $t \in [\tau_3, T]$, в силу соотношений (17), уравнение (10) представим в виде

$$\dot{v} = -v^2 - 1. \quad (33)$$

Проинтегрируем уравнение (11) при начальном условии (32) и получим, аналогично равенству (24), выражение для скорости в виде

$$v(t) = \frac{v(\tau_3) - \operatorname{tg}(t - \tau_3)}{1 + v(\tau_3) \operatorname{tg}(t - \tau_3)} \quad \text{при } t \in [\tau_3, T]. \quad (34)$$

В силу условия периодичности (14) для v имеем $v(T) = 0$. Тогда из соотношений (34) и (32) получим при $t = T$

$$T = \tau_3 + \operatorname{arctg} \frac{e_{21} - 1}{e_{21} + 1}, \quad (35)$$

где e_{21} определено в соотношениях (32).

Проинтегрируем уравнение (10) с учетом начальных условий (14) при $t = 0$. Получим

$$\kappa[v(t) + \eta(t)] = \kappa\eta_0 + \int_0^t u(t_1) dt_1. \quad (36)$$

Кусочно-постоянная функция $u(t)$ задана соотношениями (17). Вычисляя интеграл в (36), найдем

$$\kappa[v(t) + \eta(t) - \eta_0] = \varphi(t), \quad (37)$$

где функция $\varphi(t)$ определена формулами

$$\varphi(t) = \begin{cases} t & \text{при } t \in [0, \tau_1], \\ 2\tau_1 - t & \text{при } t \in [\tau_1, \tau_3], \\ 2\tau_1 - 2\tau_3 + t & \text{при } t \in [\tau_3, T]. \end{cases} \quad (38)$$

В силу условий (14) при $t = T$ из (37) вытекает равенство $\varphi(T) = 0$. Следовательно, согласно (38) имеем

$$T = 2(\tau_3 - \tau_1). \quad (39)$$

Таким образом, скорость корпуса $v(t)$ задана на всем интервале $[0, T]$ соотношениями (19), (24), (31) и (34), а относительная скорость внутренней массы $\eta(t)$ определена равенством (37).

Полученные соотношения содержат три неизвестных параметра — границы интервалов τ_1, τ_2 и τ_3 , для которых имеем три уравнения (25), (35) и (39). Эти параметры могут быть определены численно.

Использовался следующий алгоритм вычисления этих параметров. При помощи равенства (39) выразим τ_1 через τ_3 в виде

$$\tau_1 = \tau_3 - T/2, \quad (40)$$

а при помощи равенств (25) и (40) выразим τ_2 как функцию τ_3 . Тогда уравнение (35) будет представлять собой трансцендентное уравнение относительно одного неизвестного параметра τ_3 . Решая его численно, найдем все параметры τ_1, τ_2 и τ_3 . Некоторые результаты расчетов представлены ниже.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ

Проинтегрируем равенство (37), принимая во внимание второе уравнение (1) и начальные условия (14). Получим

$$\kappa[x(t) + \xi(t) - \xi_0 - \eta_0 t] = \Phi(t), \quad (41)$$

где введено обозначение

$$\Phi(t) = \int_0^t \varphi(t_1) dt_1. \quad (42)$$

Вычисляя интеграл (42) от кусочно-линейной функции $\Phi(t)$, заданной соотношениями (38), получим

$$\Phi(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{2} & \text{при } t \in [0, \tau_1], \\ 2\tau_1 t - \frac{t^2}{2} - \tau_1^2 & \text{при } t \in [\tau_1, \tau_3], \\ 2(\tau_1 - \tau_3)t + \frac{t^2}{2} - \tau_1^2 - \tau_3^2 & \text{при } t \in [\tau_3, T]. \end{cases} \quad (43)$$

Определим $\Phi(T)$, используя соотношения (43) и равенство (39). Получим

$$\Phi(T) = 4\tau_1\tau_3 - \tau_3^2 - 3\tau_1^2 = (\tau_3 - \tau_1)(3\tau_1 - \tau_3). \quad (44)$$

Подставим $t = T$ в соотношение (41) и примем во внимание условие $\xi(T) = \xi_0$ из (15) и равенство (44). В результате получим

$$\kappa[x(T) - \eta_0 T] = (\tau_3 - \tau_1)(3\tau_1 - \tau_3). \quad (45)$$

Обозначим через θ_1 и θ_2 моменты времени, в которых достигаются наименьшее и наибольшее значения функции $\xi(t)$ на интервале $[0, T]$ соответственно:

$$\theta_1 = \operatorname{argmin} \xi(t), \quad \theta_2 = \operatorname{argmax} \xi(t), \quad t \in [0, T]. \quad (46)$$

В эти моменты времени имеем

$$\eta(\theta_1) = 0, \quad \eta(\theta_2) = 0,$$

а подвижная масса достигает, соответственно, левого и правого концов полости, внутри которой она перемещается:

$$\xi(\theta_1) = 0, \quad \xi(\theta_2) = l. \quad (47)$$

Здесь l – безразмерная длина полости. Подставляя $t = \theta_1$ и $t = \theta_2$ в уравнение (41) и используя равенства (47), получим соотношения

$$\kappa[x(\theta_1) - \xi_0 - \eta_0\theta_1] = \Phi(\theta_1), \quad (48)$$

$$\kappa[x(\theta_2) + l - \xi_0 - \eta_0\theta_2] = \Phi(\theta_2). \quad (49)$$

В результате полный расчет искомого периодического движения на интервале $[0, T]$ состоит из следующих операций.

1. Определение трех параметров τ_1, τ_2 и τ_3 при помощи уравнений (25), (35) и (39), как описано выше.

2. Расчет скорости корпуса $v(t)$ по формулам (19), (24), (31) и (34).

3. Расчет перемещения корпуса $x(t)$ путем интегрирования скорости $v(t)$ согласно равенству

$$x(t) = \int_0^t v(t_1) dt_1, \quad t \in [0, T]. \quad (50)$$

4. Вычисление начальной скорости η_0 внутренней массы относительно корпуса при помощи равенства (45).

5. Определение относительной скорости $\eta(t)$ на интервале $[0, T]$ на основе соотношения (37).

6. Определение моментов времени θ_1 и θ_2 согласно соотношениям (46).

7. Вычисление начального перемещения внутренней массы ξ_0 на основе соотношения (48).

8. Определение перемещения внутренней массы $\xi(t)$ на интервале $[0, T]$ в соответствии с равенством (41).

Второе равенство (47) дает возможность вычислить максимальное перемещение внутренней массы, равное необходимой длине полости. Все эти вычисления зависят от безразмерных параметров κ , r и T . Если же период T не фиксирован, а длина полости l задана, то потребуются провести пересчет указанных выше операций с различными T и подобрать такое значение T , при котором выполняется второе условие (47).

Средняя скорость перемещения корпуса при построенном периодическом движении определяется соотношением

$$\bar{v} = \frac{x(T)}{T}.$$

ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Приведем некоторые численные результаты построенного периодического движения. Для этого положим:

$$m = 10 \text{ кг}, \quad M = 100 \text{ кг}, \quad c = 0.2 \text{ м}^{-1}, \quad c_- = 1 \text{ м}^{-1}, \\ F = 50 \text{ Н}.$$

Для данных значений параметров имеем, согласно равенствам (5), (4) и (8),

$$L = 5 \text{ м}, F_0 = 0.5 \text{ м/с}^2, T_0 = 3.16 \text{ с}.$$

Выберем период T в размерных переменных равный 13.75 с. Тогда имеем следующие значения безразмерных параметров:

$$\kappa = m/M = 0.1, r = c/c_- = 0.2, T = 4.35.$$

Из уравнений (25), (35) и (39) были определены моменты времени τ_1 , τ_2 и τ_3 (в безразмерных переменных):

$$\tau_1 = 1.42, \tau_2 = 1.77, \tau_3 = 3.59.$$

Графики функций $v(t)$ и $x(t)$ в безразмерных переменных изображены на рис. 3, 4.

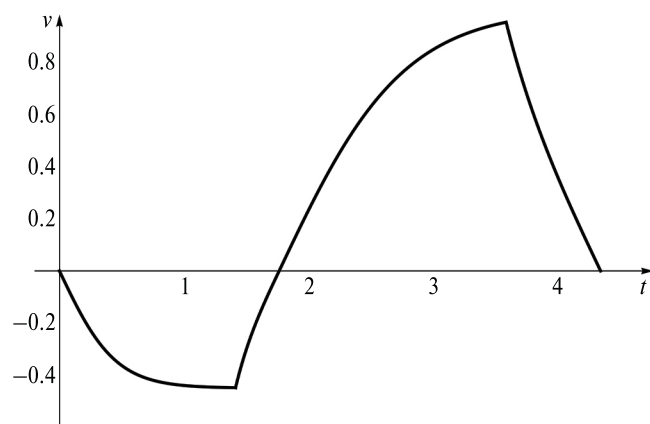


Рис. 3. Скорость корпуса.

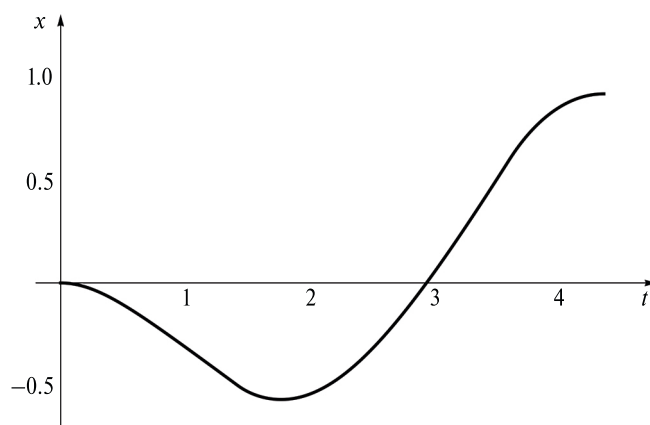


Рис. 4. Перемещение корпуса.

Полное перемещение корпуса за период $x(T)$ и средняя скорость перемещения корпуса $\bar{v}$ в безразмерных переменных равны

$$x(T) = 0.91, \bar{v} = 0.21.$$

На основе равенств (45) и (48) были определены начальная скорость внутренней массы η_0 и начальное смещение внутренней массы относительно левой границы полости ξ_0 . В рассматриваемом числовом примере они равны

$$\eta_0 = -3.07, \xi_0 = 0.43.$$

Графики функций $\eta(t)$ и $\xi(t)$ в безразмерных переменных изображены на рис. 5, 6.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследовано поступательное движение в жидкости твердого тела, управляемого силой его взаимодействия с внутренней массой.

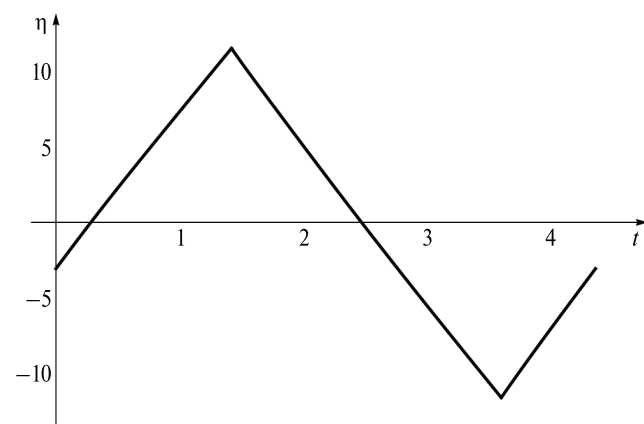


Рис. 5. Скорость внутренней массы.

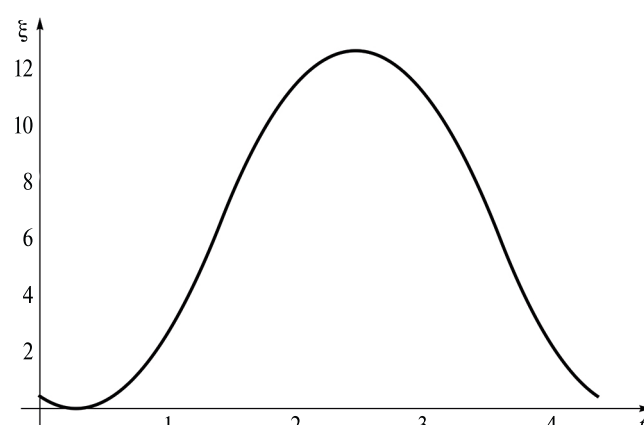


Рис. 6. Перемещение внутренней массы.

Построены движения с периодическим изменением скоростей движущихся тел. Дана оценка средней скорости перемещения. Полученные результаты могут представлять интерес для управления движением аппаратов, перемещающихся в жидкой среде.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-11-00128, <https://rscf.ru/project/23-11-00128/>.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Нагаев Р.Ф., Тамм Е.А. Вибрационное перемещение в среде с квадратичным сопротивлением движению // *Машиноведение*. 1980. № 4. С. 3–8.
2. Герасимов С.А. О вибрационном полете симметричной системы // *Известия вузов. Машиностроение*. 2005. № 8. С. 3–7.
3. Егоров А.Г., Захарова О.С. Оптимальное квазистационарное движение виброробота в вязкой среде // *Известия вузов. Математика*. 2012. № 2. С. 57–64.
4. Liu Y., Pavlovskaya E., Hendry D., Wiercigroch M. Optimization of the vibroimpact capsule system // *Journal of Mechanical Engineering*. 2016. V. 62. P. 430–439.
5. Fang H.B., Xu J. Dynamics of a mobile system with an internal acceleration-controlled mass in a resistive medium // *Journal of Sound and Vibration*. 2011. V. 330. P. 4002–4018.
6. Xu J., Fang H. Improving performance: recent progress on vibration-driven locomotion systems // *Nonlinear Dynamics*. 2019. V. 98. P. 2651–2669.
7. Tahmasian S. Dynamic analysis and optimal control of a drag-based vibratory systems using averaging // *Nonlinear Dynamics*. 2021. V. 104. P. 2201–2217.
8. Черноусько Ф.Л. Оптимальные периодические движения двухмассовой системы в сопротивляющейся среде // *Прикладная математика и механика*. 2008. Т. 72. Вып. 2. С. 202–215.
9. Черноусько Ф.Л., Болотник Н.Н. Динамика мобильных систем с управляемой конфигурацией. М.: Физматлит, 2022. 464 с.
10. Черноусько Ф.Л. Оптимизация движения тела с внутренней массой при квадратичном сопротивлении // *Доклады РАН. Физика, технические науки*. 2023. Т. 513. С. 80–86.
11. Глазков Т.В., Черноусько Ф.Л. Оптимальное движение тела, управляемого посредством внутренней массы, в среде с сопротивлением // *Прикладная математика и механика*. 2024. Т. 88. № 1. С. 53–66.

PERIODIC MOVEMENTS IN THE FLUID OF A BODY CONTROLLED BY THE FORCE OF ITS INTERACTION WITH THE INTERNAL MASS

T. V. Glazkov^a, Academician of the RAS F. L. Chernousko^a

^a*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

Progressive motion in the fluid of a body (housing) with an internal movable mass is considered. The external resistance is proportional to the squared velocity of the body and depends on the direction of motion. The control is implemented by the force of interaction of the internal body with the housing. Motions with periodic change of the velocities are obtained and analyzed. The average speed of the motion of the system is evaluated.

Keywords: mobile robots, nonlinear dynamics, quadratic resistance, periodic motion