МЕХАНИКА

УДК 539.3

К ТЕОРИИ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ КОМПОЗИТНЫХ СРЕД С АНИЗОТРОПНОЙ СТРУКТУРОЙ

 Академик РАН **В. А. Бабешко**[1,2,*], **О. В. Евдокимова**[2], **О. М. Бабешко**[1], **В. С. Евдокимов**[1]

Поступило 12.04.2024 г.
После доработки 12.04.2024 г.
Принято к публикации 18.06.2024 г.

Впервые строится точное решение контактной задачи о действии полосового жесткого штампа конечной ширины на композитный слоистый материал, имеющий анизотропную структуру. Задачи такого рода изучены достаточно глубоко для изотропных материалов. Контактные задачи для штампов неклассической формы, действующих на композитные материалы, изучены слабо. Применяемые численные методы для композитных материалов не учитывают возникающие на границе концентрации контактные напряжения, свойственные контактным задачам, не выявляют в полной мере податливость внедрения штампа в анизотропную среду при изменении размера штампа, сложны для анализа в динамических случаях. В отличие от изотропного случая, когда символ ядра интегрального уравнения описывается мероморфной функцией, в анизотропном случае приходится встречаться с аналитической функцией двух комплексных переменных сложного строения. Контактные задачи для анизотропных материалов возникают во многих областях при создании различных инженерных технических средств и изделий, в строительстве, при создании элементной базы электроники, а также в механике природных процессов. В работе на примере воздействия полосового жесткого штампа конечной ширины на композитный слоистый материал методом блочного элемента построено точное решение статической задачи для одного типа анизотропии. Практика построения точных решений граничных задач показывает, что с их помощью удается улавливать и выявлять свойства решений, изучение которых недоступно численным методам. Примерами являются выявления новых типов землетрясений, стартовых, нового типа трещин, ранее не описанных, новых типов предвестников землетрясений и резонансов конструкций. На основе точных решений удается строить высокоточные приближенные, применение к которым численных методов уже оказывается более эффективным, чем в результате прямого обращения объемных и граничных дифференциальных операторов граничных задач. Результат настоящего сообщения может быть полезен как в инженерной практике, так и в геофизике при описании поведения горной гряды на анизотропной коренной породе. Кроме того, метод открывает возможность исследовать анизотропные случаи в динамической постановке с помощью контурных интегралов в представлении решений.

Ключевые слова: контактная задача, композитный материал, анизотропная среда, интегральное уравнение, метод блочного элемента

DOI: 10.31857/S2686740024050047, **EDN:** HXSKDL

[1] *Кубанский государственный университет, Краснодар, Россия*
[2] *Южный научный центр Российской академии наук, Ростов-на-Дону, Россия*
**E-mail: babeshko41@mail.ru*

Теории анизотропных сред, описывающих композитные материалы, посвящено большое количество работ, в связи с их важностью в различных областях инженерной практики [1–15]. Анизотропные структуры имеют природное и техногенное происхождение. Они встречаются как природные образования в коре Земли, а также как результат создания новых композитных материалов. Сложно охватить весь комплекс анизотропных структур. Некоторые анизотропные структуры изучены достаточно глубоко, в связи с важностью их применения в отраслях ответственного назначения. Особенно это относится к кристаллам и полупроводниковым материалам, применяемым при создании элементной базы электроники. Важными, и одновременно сложными, являются исследования анизотропных граничных задач в пространственной постановке. Задачи рассматриваются в статическом и динамическом вариантах. Сложность решения пространственных анизотропных задач зачастую вынуждает исследователей ограничиваться случаями рассмотрения их плоских постановок. Они практически нивелируют пространственную анизотропию, поэтому рассмотрено лишь ограниченное количество контактных задач о действии полностью пространственных штампов на анизотропную среду. В большинстве своем это приближенные аналитические либо численные решения задач, в которых пренебрегают учетом концентраций контактных напряжений под штампами. В настоящей работе развитый в [16] метод обобщается на случай анизотропных структур и позволяет получить точное решение контактной задачи для полосового штампа произвольной ширины, действующего на композитную анизотропную среду для всего диапазона входных параметров.

ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ

Методом, описанным в работе [17], контактная задача о действии полосового конечной ширины жесткого штампа на анизотропную слоистую среду сводится к решению интегрального уравнения вида

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-a}^{a} k(x_1-\xi_1, x_2-\xi_2) q(\xi_1,\xi_2)\, d\xi_1 d\xi_2 = f(x_1,x_2),$$

$$-a \le x_1 \le a,\ |x_2| \le \infty,$$

$$k(x_1,x_2) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} K(u_1,u_2) e^{-i(u_1x_1+u_2x_2)} du_1 du_2,$$

$$K(u_1,u_2) > 0,\quad -\infty < u_1,u_2 < \infty. \qquad (1)$$

Здесь $q(x_1,x_2)$ – контактные напряжения под штампом, $f(x_1,x_2)$ – перемещения в зоне контакта, $k(x_1,x_2)$ – ядро интегрального уравнения, функция $K(u_1,u_2)$ – преобразование Фурье ядра интегрального уравнения.

Считаем, что функция $K(u_1,u_2)$ является аналитической, зависящей от двух комплексных переменных, не обращающейся в ноль на вещественной оси по обоим параметрам. Двумерное интегральное уравнение (1) сводится к одномерному с вещественным параметром u_2 применением преобразования Фурье по координате x_2.

В результате интегральное уравнение (1) оказывается представимо в виде

$$\int_{-a}^{a} k(x_1-\xi_1) q(\xi_1)\, d\xi_1 = f(x_1),$$

$$q(\xi_1) = q(\xi_1,u_2),\quad k(x_1) = k(x_1,u_2),$$

$$k(x_1) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} K(u_1) e^{-iu_1x_1} du_1,$$

$$K(u_1) = K(u_1,u_2),\quad f(x_1) = f(x_1,u_2). \qquad (2)$$

Ради краткости вещественный параметр u_2 временно опускается и возврат к нему будет осуществлен в конце сообщения. Считаем, что непрерывная аналитическая функция $K(u_1)$ на бесконечности обладает асимптотическим поведением $K(u_1) = O(u_1^{-1})$, $\operatorname{Im} u_1 = 0$. Таким свойством обладают ядра интегральных уравнений, построенные для статических смешанных задач на многослойной анизотропной среде [18]. Например, в случае термоэлектроупругого слоя уравнения состояния среды имеют вид

$$\sigma_y = c_{ykl}^{E,\theta} s_{kl} - e_{yk}^{\theta} E_k - \lambda_y^E \theta,$$
$$d_i = e_{ikl}^{\theta} s_{kl} + \varepsilon_y^{s,\theta} E_j + \rho_i^S \theta,$$
$$\eta = \lambda_{ij}^E s_y + \rho_i^S E_i + \alpha\theta.$$

Здесь σ – тензор напряжений; $c_{ijkl}^{E,\theta}$ – тензор упругих постоянных; s_{ij} – тензор деформаций упругой среды; E_i – компоненты вектора напряженности электрического поля; $\theta = T - T_0$; θ, T и T_0 – относительная, абсолютная и начальная температуры соответственно; η – плотность энтропии; d_i – компоненты вектора электрической индукции; e_{kij}^{θ} – тензор пьезомодулей; $\varepsilon_{ij}^{S,\theta}$ – тензор диэлектрических проницаемостей; ρ_i^S – пироэлектрические коэффициенты; $\alpha = \rho c_{\varepsilon}^E T_0^{-1}$; c_{ε}^E – удельная теплоемкость при постоянной деформации; ρ – плотность материала.

Система дифференциальных уравнений, описывающая такой материал, после сокращений и введения потенциалов принимает вид

$$c_{ijkl}\frac{\partial^2 w_k}{\partial x_l \partial x_j} + e_{kij}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_k \partial x_j} - \lambda_{ij}\frac{\partial \theta}{\partial x_j} + F_i = \rho\frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2},$$
$$e_{ik}\frac{\partial^2 w_k}{\partial x_i \partial x_i} - \varepsilon_{ik}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_k \partial x_i} + \rho_i\frac{\partial \theta}{\partial x_i} = 0,$$
$$k_{ij}\frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i \partial x_j} + W = T_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\lambda_{ij}\frac{\partial w_i}{\partial x_j} - \rho_i\frac{\partial \psi}{\partial x_i} + \alpha\theta\right),$$
$$i,\ j,\ k,\ l = 1, 2, 3,$$
$$S_{kl} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_k}{\partial x_l} + \frac{\partial w_l}{\partial x_k}\right),\quad g_i = -k_{ij}\frac{\partial T}{\partial x_j},$$
$$E_k = -\frac{\partial \psi}{\partial x_k}.$$

Применением преобразований Фурье в слоистой среде строится система интегральных уравнений для вектора неизвестных. Упростив постановку контактной задачи путем выделения отличной от нуля одной компоненты вектора, получаем отдельное интегральное уравнение относительно неизвестной компоненты.

Ниже развивается один из методов изучения и решения интегрального уравнения контактной задачи о действии полосового штампа на анизотропную слоистую среду. Для этого строится обобщенное решение интегрального уравнения.

ОБОБЩЕННОЕ РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим интегральное уравнение (2) с тремя типами ядер K_m, удовлетворяющими приведенным ниже свойствам.

Выберем положительные числа γ_1, γ_3 таким образом, чтобы имело место неравенство

$$0 < K_1(u_1) < K_2(u_1) < K_3(u_1). \tag{3}$$

Здесь приняты обозначения

$$K_1(u_1) = \gamma_1(u_1)^{-1}\operatorname{th}u_1,\quad K_2(u_1) = K(u_1,u_2),$$
$$K_3(u_1) = \gamma_3(u_1)^{-1}\operatorname{th}u_1,$$
$$0 < \gamma_1 < \gamma_3,\quad ,\quad \operatorname{Im}u_2 = 0,\quad |u_2| \le \infty. \tag{4}$$

Функция $K_2(u_1) = K(u_1,u_2)$, зависящая от параметра u_2, очевидно, представляет семейство функций при любом фиксированном u_2 на вещественной оси.

Введем в рассмотрение три комплексных гильбертовых пространства $\mathrm{H}_m(-a,a)$, $m = 1, 2, 3$, для функций, заданных на отрезке $[-a,a]$ со скалярным произведениями и нормой [17] вида

$$(\varphi,\psi)_m = \left(\sqrt{K_m(u_1)}\Phi(u_1)e^{iu_1}, \sqrt{K_m(u_1)}\Psi^*(u_1)e^{-iu_1}\right)_m =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{K_m(u_1)}\Phi(u_1)\sqrt{K_m(u_1)}\Psi^*(u_1)du_1,$$
$$\|\varphi\|_m^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\left|K_m(u_1)\Phi^2(u_1)\right|du_1,\quad \Phi(u_1) = \int_{-a}^{a}\varphi(x)e^{iu_1x}dx,$$
$$\Psi^*(u_1) = \int_{-a}^{a}\psi^*(x)e^{-iu_1x}dx. \tag{5}$$

Звездочка означает переход к комплексно сопряженному выражению.

В результате порождается семейство гильбертовых пространств для каждого фиксированного вещественного u_2. Очевидно, все введенные пространства эквивалентны, причем гильбертовы пространства являются негативными, содержащими, наряду с классическими, также и некоторые обобщенные функции. Построим обобщенные решения для интегральных уравнений [17]:

$$\mathbf{K}_m q_m \equiv \int_{-a}^{a} k_m(x-\xi) q_m(\xi) d\xi = f(x),$$

$$|x| \le a, \quad k_m(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_m(u) e^{-iux} du,$$

$$\operatorname{Re} K_m(u) > 0 \tag{6}$$

с ядрами $k_m(x)$.

Рассматривая их в пространствах $H_m(-a,a)$, взяв произвольные функции ψ из этих пространств, умножив на них уравнения (6) и проинтегрировав на отрезке $[-a,a]$, получим соотношения

$$(q_m, \psi)_m = (f, \psi),$$

$$(f, \psi) = \int_{-a}^{a} f(x) \psi^*(x) dx \equiv \int_{-\infty}^{\infty} F(u_1) \Psi^*(u_1) du_1.$$

Приведем выражение справа к виду скалярных произведений (5) во веденных гильбертовых пространствах за счет дополнительных требований свойств у функции $f(x)$ правой части интегрального уравнения (6) с учетом принадлежности функции $\psi(x)$ этим пространствам. Имеем

$$(f, \psi) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u_1) \Psi^*(u_1) du_1 =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{K_m(u_1)} F_m(u_1) \sqrt{K_m(u_1)} \Psi^*(u_1) du_1 = (f_m, \psi)_m,$$

$$F_m(u_1) = \int_{-\infty}^{\infty} K_m^{-1}(u_1) F(u_1) du_1. \tag{7}$$

Из (7) получаем равенство функционалов, справедливое для любой функции ψ из гильбертова пространства $(q_m, \psi)_m = (f_m, \psi)_m$. В результате из теоремы Рисса об общем виде линейного непрерывного функционала [16] следует доказательство существования и единственности решений интегральных уравнений (6) в каждом из введенных гильбертовых пространств. При этом $\|q_m\| = \|f_m\|$. Как следствие, из (4) получаем важные соотношения $\|q_3\|_3 < \|q_2\|_2 < \|q_1\|_1$, свидетельствующие о разрешимости интегрального уравнений (6) для любого вещественного u_2 в гильбертовых пространствах. Это относится ко всем классическим решениям, вложенным во введенные гильбертовы. Для получения существующего классического решения, вложенного в гильбертово, как доказано, единственного, необходимо построить оператор вложения в гильбертовы пространства. Это достигается использованием аппарата блочного элемента и факторизационных методов.

ПОСТРОЕНИЕ КЛАССИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Как и в предыдущем разделе, будем рассматривать интегральные уравнения (6) с ядрами $K_m(u_1)$, $m = 1,2,3$. Применим к ним метод блочного элемента, опирающийся на факторизационный подход [19]. Они приводятся к решению эквивалентной операторам интегральных уравнений (6) системы двух интегральных уравнений. Их построение детально описано в работе [19] и ниже не повторяется.

$$X_m(\zeta, \pm) = \mp \mathbf{M}_m(\zeta, a) X_m(u_1, \pm) + \alpha_m(\zeta, \pm),$$

$$\mathbf{M}_m(\zeta, a) X(u_1, \pm) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{K_{m-}(u_1) e^{-2aiu}}{K_{m+}(u_1)(u_1 + \zeta)} X_m(u_1, \pm) du_1,$$

$$\alpha_m(\zeta, \pm) =$$

$$= \pm \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \left[\frac{F_+(u_1)}{K_{m-}(u_1)(u_1 - \zeta)} \mp \frac{F_-(u_1)}{K_{m+}(u_1)(u_1 + \zeta)} \right] du_1,$$

$$F_+(u_1) = \int_{-a}^{a} f(x) e^{iu_1(x+a)} dx,$$

$$F_-(u_1) = \int_{-a}^{a} f(x) e^{iu_1(x-a)} dx,$$

$$\Phi_{m-}(u_1) = \int_{-\infty}^{-a} \varphi_{m-}(x) e^{iu_1(x+a)} dx,$$

$$\Phi_{m+}(u_1) = \int_{a}^{\infty} \varphi_{m+}(x) e^{iu_1(x-a)} dx,$$

$$X_m(\zeta, \pm) = \left[\Phi_{m+}(-\zeta) \pm \Phi_{m-}(\zeta) \right] K_{m-}^{-1}(\zeta), \tag{8}$$

$K_{m\pm}(u_1)$ – результат факторизации функции $K_m(u_1)$, $m = 1,3$, относительно вещественной оси [19]. Здесь непрерывный контур σ расположен в нижней комплексной полуплоскости, асимптотически уходит на бесконечность так, что содержит часть отрицательной мнимой полуоси, пересекая ее в одной точке. Главным его свойством является огибание сверху находящихся в нижней комплексной полуплоскости комплексных особенностей всех аналитических функций $K_m(u_1)$. Считаем, что контур расположен строго ниже вещественной оси, т.е. $0 > -c > \max \operatorname{Im} u_1, \quad u_1 \in \sigma, \quad c > 0$.

После обращения уравнений (8) представления решений интегральных уравнений (6) даются формулами [19]

$$q_m(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \begin{Bmatrix} \dfrac{F(u_1)}{K_m(u_1)} - \dfrac{X_{0m}^{-}(u_1)e^{-iau_1}}{K_{m+}(u_1)} - \\ -\dfrac{X_{2m}^{+}(u_1)e^{iau_1}}{K_{m-}(u_1)} \end{Bmatrix} e^{-ixu_1} du_1,$$

$$m = 1,2,3,$$

$$2X_{2m}^{+}(-u_1) = X_m(u_1,-) + X_m(u_1,+),$$

$$2X_{0m}^{-}(u_1) = X_m(u_1,-) - X_m(u_1,+). \qquad (9)$$

В работе [19] доказано, что операторы $\mathbf{M}_m(\zeta,a)$ в правой части (8), если рассматривать их на контуре σ, являются вполне непрерывными в пространстве $C(\lambda), \quad 0 \le \lambda < 1$, вводимом нормой $\|f\| = \max \left|u_1^{\lambda} f(u_1)\right|, \quad u_1 \in \sigma$.

Методами, детально описанными в работе [19], осуществим факторизацию в виде произведения каждой функции $K_m(u)$. Примем во внимание представление функций $K_m(u), \quad m = 1,3$, в виде

$$K_m(u) = \gamma_m \frac{\pi\Gamma(\frac{1}{2} + iu\pi^{-1})\Gamma(\frac{1}{2} - iu\pi^{-1})}{\Gamma(1 + iu\pi^{-1})\Gamma(1 - iu\pi^{-1})}, \quad m = 1,3,$$

$\Gamma(u)$ – гамма-функция. В результате будем иметь

$$K_m(u_1) = K_{m+}(u_1)K_{m-}(u_1),$$

$$K_{m\pm}(u_1) = \sqrt{\gamma_m}\, \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{1}{2} \mp iu_1\pi^{-1})}{\Gamma(1 \mp iu_1\pi^{-1})}, \quad m = 1,3,$$

$$K_{2\pm}(u_1) = \exp(\pm\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln K_2(\xi)}{\xi - u_1} d\xi), \quad u_1 \in \Pi_{\pm}. \qquad (10)$$

Здесь $\Pi_+, \quad \Pi_-$ – верхняя и нижняя комплексные полуплоскости. Из (10) для факторизованных функций следует свойство

$$K_{m-}(u_1)K_{m+}^{-1}(u_1) \to O(1), \quad |u_1| \to \infty, \quad u_1 \in \sigma.$$

Будем считать, что левая и правая ветви контура σ асимптотически, при $\tau_2 \to \infty$, сближаются с границами клина, описываемого прямыми

$$u_1 = (\pm\delta - i)\tau_2,\ 0 < \delta < 1,\ 0 < \tau_2 \le \infty,\ u_1 = \tau_1 + i\tau_2.$$

Внутри него расположены все особенности нижней полуплоскости функций $K_m^{\pm 1}(u_1)$.

Справедлива

Л е м м а. *Оператор* $\mathbf{M}(\zeta,a)$ *является аналитической функцией параметра* a, *регулярной в области* $\operatorname{Re} a > 0$. *Существует такое* $a_0 \ge 0$, *что имеет место неравенство* $\|\mathbf{M}_m(\zeta,a)\|_{C(\lambda)} < 1, \quad \operatorname{Re} a > a_0$.

Первое доказывается на основании наличия убывающей экспоненциальной функции под интегралом, представляющим оператор, вычисляемым по контуру σ, что позволяет его дифференцировать произвольное количество раз. Последнее возможно, поскольку функции $K_m(u_1)$ являются регулярными, не имеющими особенностей в зоне между вещественной осью и контуром σ. Второе следует из оценки нормы оператора, на основании учета поведения подынтегральной функции на всем контуре σ, т.е. $\|\mathbf{M}_m(\zeta,a)\|_{C(\lambda)} = O(e^{-ca}), \quad c > 0, \quad a \to \infty$.

Т е о р е м а. *Решение* (9), *основанное на использовании уравнений* (8), *справедливо для всех значений параметра* $0 < a \le \infty$.

Для доказательства рассмотрим интегральные уравнения (6) для случая $f(x) = 1$ и построим решения $q_{m0}(x_1)$ [20]. Вычислив правые части в уравнениях (8), рассмотрим область значений параметра $a > a_0$. В этом случае оператор будет сжимающим и уравнение можно решить методом последовательных приближений [16]. В результате решение представимо в виде

$$\mathbf{X}_m = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\mathbf{M}_m(\zeta,a)\right]^n A_m. \qquad (11)$$

В этом случае, используя метод Ньютона–Канторовича [21], решение можно представить в виде

$$\mathbf{X}_m = \left[1 - \mathbf{M}_m(\zeta,a)\right]^{-1} A_m. \qquad (12)$$

В работе [16] показано, что в изотропном случае слоистой среды, т.е. для $m = 1,3$, соотношение (12) справедливо во всем диапазоне $0 < a \le \infty$. Покажем, что это свойство имеет место также и в рассматриваемом анизотропном случае.

Рассмотрим интегральные уравнения (6) при $m = 1,3$. В этих случаях для рассматриваемых интегральных уравнений ряд (11) сходится в интервале $0 < a \le \infty$ и дает точное решение уравнения в форме (9), которое после преобразований имеет вид [20]

$$q_{m0}(x_1) = \frac{1}{\gamma_m \pi Q_{-\frac{1}{2}}(\mathrm{ch}a)\sqrt{2\mathrm{ch}a - 2\mathrm{ch}x_1}}, \quad m = 1,3.$$

Здесь $Q_{-\frac{1}{2}}(\mathrm{ch}a)$ – функция Лежандра с отрицательным дробным индексом. При $a \to 0$ она имеет поведение

$$Q_{-\frac{1}{2}}(\mathrm{ch}a) \sim \ln a + r, \quad r = \mathrm{const}. \tag{13}$$

Покажем, что подобным свойством обладает и решение интегрального уравнения при $m = 2$. Действительно, исследуя оператор $\mathbf{M}_m(\zeta, a)$ при $a \to 0$ в формуле (12), используя асимптотические разложения входящего в него интеграла на контуре σ, получаем соотношение

$$\|\mathbf{M}(\zeta,a)\| = max\left| e^{-2ai\tau_1}\int_\sigma \frac{K_-(\tau_1 - i\tau_2)e^{-2a\tau_2}d\tau_2}{K_+(\tau_1 - i\tau_2)(\tau_1 - i\tau_2 + \zeta)}\right| \sim$$

$$\sim \delta Ei(-2a\tau_{20}) \sim \delta(\ln a + c_0), \quad a \to 0, \quad \delta, c_0 = \mathrm{const},$$

где $Ei(-2a\tau_{20})$ – интегральная экспонента. Оно приводит в формуле (9) к аналогичной зависимости от параметра $a \to 0$, как и (12). В работах [16, 19] доказано, что построенное с использованием уравнений (8) решение q_{20} интегрального уравнения в форме (9) по краям штампа обладает концентрацией контактных напряжений вида $(a^2 - x_1^2)^{-1/2}$. Это значение совпадает с концентрацией контактных напряжений, даваемых точным решением $q_{m0}(x_1)$, $m = 1,3$. Решения, построенные для интегральных уравнений в гильбертовых пространствах, остаются в силе во всех пространствах, в них вложенных.

Выведенные выражения решений интегральных уравнений для единичной правой части, $f(x_1) = 1$, позволяют по формулам [20]

$$q_m(x_1) = \frac{1}{2M'(a)}\left[\frac{d}{da}\int_{-a}^{a} q_{m0}(s,a)f(s)ds\right]q_{m0}(x_1,a) -$$

$$-\frac{1}{2}\int_{|x_1|}^{a} q_{m0}(x_1,\xi)\frac{d}{d\xi}\left[\frac{1}{M'(\xi)}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{d}{d\xi}\int_{-\xi}^{\xi} q_{m0}(s,\xi)f(s)ds\right]d\xi -$$

$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dx_1}\int_{|x_1|}^{a}\frac{q_{m0}(x_1,\xi)}{M'(\xi)}\left[\int_{-\xi}^{\xi} q_{m0}(s,\xi)df(s)\right]d\xi,$$

$$|x_1| < a$$

построить решения $q_m(x_1)$ интегрального уравнения для произвольной правой части $f(x_1)$. Для построенных классических решений остаются справедливыми неравенства $\|q_3\|_3 < \|q_2\|_2 < \|q_1\|_1$, как для элементов, вложенных в гильбертовы пространства. Учтем, что решение интегрального уравнения $q_2(x_1)$ содержит скрытый вещественный параметр u_2, являющийся преобразованием Фурье по параметру x_2 интегрального уравнения (1). Тогда, в соответствии с соотношением $q_2(x_1) \equiv q_2(x_1, u_2)$ из (2), имеет место представление решения интегрального уравнения (1) в полосе в виде

$$q_2(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} q_2(x_1, u_2)e^{-u_2 x_2}du_2.$$

Оно является точным решением интегрального уравнения (1) во всем диапазоне $0 < a \le \infty$ изменения параметра a в контактной задаче о действии полосового штампа на композитный материал анизотропной слоистой среды.

ВЫВОД

Выполненное исследование представляет строго обоснованный метод решения контактных задач для полосового штампа конечной ширины, действующего на слой из композитного материала, имеющего анизотропную структуру. Такого рода задачи возникают при исследовании состояния сейсмичности территории, имеющей протяженную горную гряду. В инженерной практике подобные задачи возникают при конструировании изделий с применением композитных материалов анизотропной структуры. Метод допускает дальнейшее развитие, направленное на решение контактных задач для штампов иной неклассической формы.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда и Кубанского научного фонда, региональный проект Краснодарского края № 24-11-20006.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лехницкий С.Г.* Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 415 с.
2. *Кристенсен Р.* Введение в механику композитов. М.: Мир, 1982. 335 с.
3. *Kushch V.I.* Micromechanics of composites: multipole expansion approach. Oxford; Waltham: Elsevier Butterworth-Heinemann, 2013. 489 p.
4. *McLaughlin R.* A study of the differential scheme for composite materials // International Journal of Engineering Science. 1977. V. 15. P. 237–244.
5. *Garces G. Bruno G., Wanner A.* Load transfer in short fibre reinforced metal matrix composites // Acta Materialia. 2007. V. 55. P. 5389–5400.
6. *Levandovskiy A., Melnikov B.* Finite element modeling of porous material structure represented by a uniform cubic mesh // Applied Mechanics and Materials. 2015. V. 725. P. 928–936.
7. *Калинчук В.В., Белянкова Т.И.* Динамические контактные задачи для предварительно напряженных тел. М.: Физматлит, 2002. 240 с.
8. *Бребия* К. Методы граничных элементов / К. Бребия, Ж. Теллес, Л. Вроубел. М.: Мир, 1987. 524 с.
9. *Горячева И.Г.* Механика фрикционного взаимодействия. М.: Наука, 2001. 478 с.
10. *Kolesnikov V.I., Suvorova T.V., Belyak O.A.* Modeling antifriction properties of composite based on dynamic contact problem for a heterogeneous foundation // Materials Physics and Mechanics. 2020. № 3. P. 17–27.
11. *Айзикович С.М., Александров В.М., Белоконь А.В., Кренев Л.И., Трубчик И.С.* Контактные задачи теории упругости для неоднородных сред. М.: Физматлит, 2006. 240 с.
12. *Ватульян А.О.* Контактные задачи со сцеплением для анизотропного слоя // ПММ. 1977. Т. 40. Вып. 4. С. 727–734.
13. *Баженов В.Г., Игумнов Л.А.* Методы граничных интегральных уравнений и граничных элементов. М.: Физматлит, 2008. 352 с.
14. *Гуз А.Н., Томашевский А.Т., Шульга Н.А., Яковлев В.С.* Технологические напряжения и деформации в композитных материалах. Киев: Вища шк., 1988. 270 с.
15. *Акбаров А.Н., Гузь А.Н., Мовсумов Э.А., Мустафаев С.М.* Механика материалов с искривленными структурами. Киев: Наукова Думка, 1995. 320 с.
16. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М., Зарецкая М.В., Евдокимов В.С.* Точное решение уравнения Винера–Хопфа на отрезке для контактных задач теории трещин в слоистой среде // Доклады РАН. Физика, технические науки. 2023. Т. 509. С. 39–44.
17. *Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 456 с.
18. *Ворович И.И., Бабешко В.А., Пряхина О.Д.* Динамика массивных тел и резонансные явления в деформируемых средах. М.: Наука, 1999. 246 с.
19. *Ворович И.И., Бабешко В.А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 320 с.
20. *Гохберг И.Ц., Крейн М.Г.* Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения. М.: Наука, 1967. 508 с.
21. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1977. 742 с.

ON THE THEORY OF CONTACT PROBLEMS FOR COMPOSITE MEDIA WITH ANISOTROPIC STRUCTURE

Academician of the RAS V. A. Babeshko[a,b], O. V. Evdokimova[b], O. M. Babeshko[a], V. S. Evdokimov[a]

[a]*Kuban State University, Krasnodar, Russia*
[b]*Southern Scientific Center of the Russian Academy of Sciences, Rostov-on-Don, Russia*

For the first time, an exact solution to the contact problem of the action of a strip rigid stamp of finite width on a composite layered material having an anisotropic structure is constructed. Problems of this kind have been studied in sufficient depth for isotropic materials. Contact problems for non-classical shaped stamps acting on composite materials have been poorly studied. The applied numerical methods for composite materials do not take into account the contact stress concentrations occurring at the boundary, which are characteristic of contact problems, do not fully reveal the malleability of the stamp insertion into an anisotropic medium when the stamp size changes, and are difficult to analyze in dynamic cases. In contrast to the isotropic case, when the symbol of the kernel of the integral equation is described by a meromorphic function, in the anisotropic case one has to meet with an analytical function of two complex variables of complex structure. Contact problems for anisotropic materials arise in many areas when creating various engineering equipment and products, in construction, when creating an electronic element base, as well as in the mechanics of natural processes.. In this paper, using the example of the effect of a strip rigid stamp of finite width on a composite laminated material, an exact solution of a static problem for one type of anisotropy is constructed using the block element method. The practice of constructing exact solutions to boundary value problems shows that with their help it is possible to capture and identify properties of solutions, the study of which is inaccessible to numerical methods. Examples are the identification of new types of earthquakes, starting ones, a new type of cracks not previously described, new types of earthquake precursors and resonances of structures. On the basis of exact solutions, it is possible to build high-precision approximations, the application of numerical methods to which already turns out to be more effective than as a result of direct inversion of volumetric and boundary differential operators of boundary problems. The result of this article can be useful both in engineering practice and in geophysics in describing the behavior of a mountain range on an anisotropic bedrock. In addition, the method opens up the possibility to investigate anisotropic cases in a dynamic formulation using contour integrals in the representation of solutions.

Keywords: contact problem, composite material, anisotropic medium, integral equation, block element method