ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. ФИЗИКА, ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ, 2024, том 518, с. 3–9

ФИЗИКА

УДК 531.62, 531.011, 531.314.2

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИЕ ЗАКОНУ СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ

© 2024 г. Член-корреспондент РАН Н. А. Винокуров[1,*]

Поступило 15.04.2024 г.
После доработки 15.04.2024 г.
Принято к публикации 01.08.2024 г.

Обычный вывод уравнений движения в механике и уравнений поля в теории поля основан на принципе наименьшего действия с подходящей функцией Лагранжа. При независимой от времени функции Лагранжа функция координат и скоростей, называемая энергией, постоянна. Данное сообщение представляет другой подход – вывод общей формы уравнений движения, которые обеспечивают постоянство энергии, заданной в виде функции обобщенных координат и соответствующих скоростей. Показано, что это – уравнения Лагранжа с добавочными гироскопическими силами. При выводе явно использовано то, что энергия задана как функция на касательном расслоении конфигурационного многообразия. По известной функции энергии находится функция Лагранжа. Обобщенные уравнения Лагранжа и Гамильтона выводятся без использования вариационных принципов. Новый метод вывода проиллюстрирован на примере некоторых уравнений.

Ключевые слова: сохранение энергии, уравнения Лагранжа, гироскопические силы

DOI: 10.31857/S2686740024050017, **EDN:** HYDNQA

Для широкого класса механических систем и полей уравнения движения выводятся из вариационных принципов (см., например, [1–5]). С одной стороны, этот факт отражает некоторые специальные свойства соответствующих дифференциальных уравнений и может рассматриваться как более компактная запись этих уравнений. С другой стороны, такие специальные свойства и вариационные принципы используются при переходе к квантовой теории этих систем. При таком способе вывода закон сохранения энергии следует из отсутствия явной зависимости функции Лагранжа от времени. В данном сообщении предложен другой подход. По заданной сохраняющейся функции обобщенных координат и скоростей (энергии) находятся уравнения движения, обобщающие уравнения Лагранжа. При выводе использовано, что энергия задана как функция на касательном расслоении конфигурационного пространства.

1. ОБОБЩЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА

Пусть $E(\mathbf{q},\mathbf{v}) = const$ – энергия системы, зависящая от обобщенных координат q^i, $i = 1,\ldots N$, и обобщенных скоростей $v^i = dq^i/dt$, жирным шрифтом обозначены наборы переменных: $\mathbf{q} = (q^1, \ldots, q^N)$. Для однозначного определения энергии обычно используют свойство аддитивности энергий невзаимодействующих подсистем. Состояние системы описывается точкой с координатами $(\mathbf{q}, \mathbf{v})$ на касательном расслоении $\mathbf{TQ}$ N-мерного многообразия $\mathbf{Q} = \{\mathbf{q}\}$ [5]. Сохранение энергии вдоль траектории движения может быть записано как

$$0 = \frac{dE(\mathbf{q},\mathbf{v})}{dt} = \frac{\partial E}{\partial q^i} v^i + \frac{\partial E}{\partial v^i} \dot{v}^i . \tag{1}$$

[1] *Институт ядерной физики им. Г.И. Будкера Сибирского отделения Российской академии наук, Новосибирск, Россия*
**E-mail: N.A.Vinokurov@inp.nsk.su*

Мы попытаемся найти уравнения движения, сохраняющие энергию. Уравнение (1) должно удовлетворяться для любой скорости **v**. Следовательно, оно является тождеством. Одно скалярное тождество $v^i f_i(\mathbf{q}, \mathbf{v}) = 0$ на касательном расслоении **TQ** эквивалентно N тождествам $f_i(\mathbf{q}, \mathbf{v}) = C_{ij}(\mathbf{q}, \mathbf{v}) v^j$ для любого антисимметричного тензора C_{ij}.

Чтобы использовать это замечание, представим $\partial E / \partial v^i$ в виде

$$\frac{\partial E}{\partial v^i} = v^j F_{ij}. \tag{2}$$

Подстановка (2) в (1) дает

$$0 = v^i \left(\frac{\partial E}{\partial q^i} + F_{ji} \dot{v}^j \right). \tag{3}$$

Из (3) следует N уравнений

$$\frac{\partial E}{\partial q^i} + F_{ji} \dot{v}^j = C_{ij}(\mathbf{q}, \mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}}, t) v^j, \tag{4}$$

где $C_{ij} = -C_{ji}$ — антисимметричный тензор. В аргументы тензора C_{ij} включены ускорение и время, так как это не нарушает равенства $C_{ij} v^i v^j = 0$. Включение следующих производных координат по времени повысило бы порядок дифференциальных уравнений и нарушило бы предположение о том, что состояние системы описывается точкой касательного расслоения **TQ**.

Будем искать решение уравнения (2) при помощи функции Лагранжа L, удовлетворяющей известному уравнению [1]

$$E = v^i \frac{\partial L}{\partial v^i} - L. \tag{5}$$

В учебниках по механике уравнение (5) используется для определения энергии E по заданной функции Лагранжа L. Чтобы найти функцию Лагранжа при заданной энергии, надо решить уравнение в частных производных (5). Так как в данной работе не используются вариационные принципы, (5) является определением (дифференциальным уравнением для отыскания) функции Лагранжа L. Его полное решение можно записать в виде [6]

$$L = \int_1^\infty \left[E\left(\mathbf{q}, \frac{\mathbf{v}}{x}\right) - E(\mathbf{q}, 0) \right] dx - E(\mathbf{q}, 0) + a_i(\mathbf{q}) v^i. \tag{6}$$

Оно содержит N произвольных коэффициентов $a_i(\mathbf{q})$, описывающих гироскопические силы (например, действие магнитного поля на движущийся точечный заряд).

Дифференцирование (5) дает

$$v^j F_{ij} = \frac{\partial E}{\partial v^i} = v^j \frac{\partial^2 L}{\partial v^i \partial v^j}. \tag{7}$$

Из (7) следует, что

$$F_{ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial v^i \partial v^j} + v^k D_{ijk}(\mathbf{q}, \mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}}, t), \tag{8}$$

где $D_{ijk} = -D_{ikj}$ — антисимметричный по последним индексам тензор. В аргументы тензора D_{ijk} включены ускорение и время, так как это не нарушает равенства $D_{ijk} v^j v^k = 0$. Включение следующих производных координат по времени повысило бы порядок дифференциальных уравнений и нарушило бы предположение о том, что состояние системы описывается точкой касательного расслоения **TQ**.

Подставляя (8) в (4), получим

$$\frac{\partial E}{\partial q^i} + \frac{\partial^2 L}{\partial v^i \partial v^j} \dot{v}^j = \left[C_{ij}(\mathbf{q}, \mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}}, t) - D_{ikj}(\mathbf{q}, \mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}}, t) \dot{v}^k \right] v^j. \tag{9}$$

Используя определение функции Лагранжа (5), можно исключить энергию из правой части (9):

$$\frac{\partial^2 L}{\partial q^i \partial v^j} v^j + \frac{\partial^2 L}{\partial v^i \partial v^j} \dot{v}^j - \frac{\partial L}{\partial q^i} = \\ = \left[C_{ij}(\mathbf{q}, \mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}}, t) - D_{ikj}(\mathbf{q}, \mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}}, t) \dot{v}^k \right] v^j. \tag{10}$$

Уравнения (10) можно записать в стандартной форме уравнений Лагранжа с дополнительными гироскопическими силами

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} = G_{ij}(\mathbf{q}, \mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}}, t) v^j, \tag{11}$$

где

$$G_{ij}(\mathbf{q}, \mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}}, t) = C_{ij}(\mathbf{q}, \mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}}, t) - D_{ikj}(\mathbf{q}, \mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}}, t) \dot{v}^k + \\ + \frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial v^i} - \frac{\partial^2 L}{\partial q^i \partial v^j} \tag{12}$$

есть произвольный антисимметричный тензор. Появление правой части в обобщенных уравнениях Лагранжа (11) не удивительно, так как они выведены только из закона сохранения энергии, который является более слабым ограничением, чем вариационные принципы.

Обобщенные уравнения Лагранжа (11) дают общий вид уравнений движения, удовлетворяющих закону сохранения энергии с заданной функцией $E(\mathbf{q},\mathbf{v})$. Правая часть (11) описывает гироскопические силы, которые не меняют энергию системы. Если форма гироскопических сил G_{ij} не зависит от скоростей и ускорений и точна, то, как видно из (6) и (12), такие гироскопические силы можно учесть, добавив в функцию Лагранжа слагаемое $a_i v^i$ с "векторным потенциалом" a_i, зануляющим правую часть (12). В общем случае форма гироскопических сил G_{ij} не точна. Следовательно, закон сохранения энергии допускает "нелагранжевы" (не описываемые соответствующими членами в функции Лагранжа) взаимодействия. Отметим, что обобщенные уравнения Лагранжа получены без использования вариационных принципов и в общем случае их решения не удовлетворяют какому-либо интегральному вариационному принципу. Уравнения (11) были приведены без вывода в статье [6], чтобы показать, что стандартные уравнения Лагранжа не являются наиболее общим видом уравнений движения, сохраняющих энергию. Связь обобщенных уравнений Лагранжа (11) с принципом Даламбера отмечена в работе [7].

С точки зрения теории дифференциальных уравнений решенную выше задачу о нахождении уравнений движения, удовлетворяющих закону сохранения энергии, можно сформулировать следующим образом: найти общий вид системы N дифференциальных уравнений второго порядка с заданным первым интегралом $E(y_1, \dots y_N, y'_1, \dots y'_N) = \text{const}$, не содержащим независимой переменной. Ответ, полученный в предположении дифференцируемости всех функций, естественно, содержит произвольные функции, но нетривиален.

2. ОБОБЩЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ ГАМИЛЬТОНА

В разделе 1 по заданной энергии $E(\mathbf{q},\mathbf{v})$ была определена функция Лагранжа (6). Преобразование Лежандра

$$L(\mathbf{q},\mathbf{v},t) + H(\mathbf{q},\mathbf{p},t) = p_i v^i \tag{13}$$

переводит обобщенные уравнения Лагранжа (11) в обобщенные уравнения Гамильтона:

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}p_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i} + \\ + G_{ij}\left(\mathbf{q}, \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \frac{\partial H}{\partial p_k}\frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{p}\partial q^k} - \frac{\partial H}{\partial q^k}\frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{p}\partial p_k}, t\right)\frac{\partial H}{\partial p_j} = \\ = \{p_i, H\}, \\ \frac{d}{dt}q^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \{q^i, H\}\end{gathered} \tag{14}$$

с обобщенными импульсами $p_i = \partial L/\partial v^i$, гамильтонианом $H = v^i\,\partial L/\partial v^i - L(\mathbf{q},\mathbf{v},t) = E\left[\mathbf{q},\mathbf{v}(\mathbf{p},\mathbf{q},t)\right]$ и скобками

$$\{f,g\} = \frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial q^i}\frac{\partial f}{\partial p_i} + G_{ij}\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial p_j}. \tag{15}$$

Как видно из (14) и (15), $(2N\times 2N)$-матрица этих скобок имеет вид

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \|G_{ij}\| & -\mathbf{E} \\ \mathbf{E} & \mathbf{0}\end{pmatrix}, \tag{16}$$

где $\mathbf{E}$ – $(N\times N)$ единичная матрица. Скобки (15) являются скобками Пуассона, если для них выполнено тождество Якоби [8]

$$\sum_{\delta=1}^{2N}\left(J^{\alpha\delta}\frac{\partial J^{\beta\gamma}}{\partial x^\delta} + J^{\gamma\delta}\frac{\partial J^{\alpha\beta}}{\partial x^\delta} + J^{\beta\delta}\frac{\partial J^{\gamma\alpha}}{\partial x^\delta}\right) = 0, \tag{17}$$

где греческие индексы меняются от 1 до $2N$ и $x_i = p_i$; $x_{N+i} = q^i$. В рассматриваемом случае эти условия дают

$$\frac{\partial G_{ij}}{\partial p_k} = 0 \tag{18}$$

и

$$\frac{\partial G_{jk}}{\partial q^i} + \frac{\partial G_{ij}}{\partial q^k} + \frac{\partial G_{ki}}{\partial q^j} = 0. \tag{19}$$

Последнее означает, что форма $\mathbf{C}$ замкнута на многообразии $\mathbf{Q}$. Тогда она локально точна, т.е. может быть сведена к нулю выбором подходящих a_i в (6). Таким образом, выполнение тождеств Якоби обеспечивает возможность сведения уравнений движения к соответствующей вариационной задаче.

Интересно потребовать только сохранения фазовой плотности:

$$0 = \frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i} + \frac{\partial \dot{q}^j}{\partial q^j} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial p_i}\left[G_{ij}\left(\begin{array}{l}\mathbf{q}, \dfrac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \dfrac{\partial H}{\partial p_k}\dfrac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{p}\partial q^k} - \\ -\dfrac{\partial H}{\partial q^k}\dfrac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{p}\partial p_k}, t\end{array}\right)\frac{\partial H}{\partial p_j}\right] =$$

$$= \frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial}{\partial p_i}G_{ij}\left(\mathbf{q}, \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \frac{\partial H}{\partial p_k}\frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{p}\partial q^k} - \frac{\partial H}{\partial q^k}\frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{p}\partial p_k}, t\right). \quad (20)$$

Это равенство можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial p_j}G_{ij}\left(\mathbf{q}, \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \frac{\partial H}{\partial p_k}\frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{p}\partial q^k} - \frac{\partial H}{\partial q^k}\frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{p}\partial p_k}, t\right) =$$

$$= \frac{\partial H}{\partial p_j}d_{ij}\left(\mathbf{q}, \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \frac{\partial H}{\partial p_k}\frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{p}\partial q^k} - \frac{\partial H}{\partial q^k}\frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{p}\partial p_k}, t\right) \quad (21)$$

с произвольным антисимметричным тензором d_{ij}. Одним из простейших решений (20) является

$$G_{ij} = K_{ij}\left[H(\mathbf{p},\mathbf{q}),\mathbf{q},t\right] = K_{ij}\left[E(\mathbf{q},\mathbf{v}),\mathbf{q},t\right] \quad (22)$$

с произвольным антисимметричным тензором K_{ij}. Обобщенные уравнения движения (11), (14) с гироскопическими силами, удовлетворяющими условию (22), не противоречат основным законам статистической механики.

В трехмерном пространстве при помощи символа Леви–Чивиты e_{ijk} можно выразить форму **G** через вектор:

$$G_{ij} = e_{ijk}B^k. \quad (23)$$

Тогда (18) дает независимость **B** от импульсов, а (19) эквивалентно $\operatorname{div}\mathbf{B} = 0$, что по теореме Гельмгольца позволяет ввести “векторный потенциал” **A**, такой, что $B^i = e^{ijk}\,\partial A_k / \partial q^j$ и

$$G_{ij} = \frac{\partial A_j}{\partial q^i} - \frac{\partial A_i}{\partial q^j}, \quad (24)$$

т.е. форма **G** точна и, согласно (6), может быть сведена к нулю добавкой члена **vA** к функции Лагранжа. Если же требовать только сохранения (21) фазовой плотности, то поле $\mathbf{B}[E(\mathbf{q},\mathbf{v}),\mathbf{q},t]$ произвольно. В частности, это может быть поле $\mathbf{B}(\mathbf{q},t)$ с ненулевой дивергенцией.

3. УРАВНЕНИЯ ГАМИЛЬТОНА И ШРЁДИНГЕРА

В этом и следующем разделах мы выведем из закона сохранения энергии некоторые известные уравнения, применяя обобщенные уравнения Лагранжа, описанные в разд. 1. Рассмотрим случай $E(\mathbf{q}) = U(\mathbf{q})$, когда энергия не зависит от скоростей. Тогда (6) дает $L = -U(\mathbf{q})$, и обобщенные уравнения Лагранжа (11) принимают вид

$$\frac{\partial U(\mathbf{q})}{\partial q^i} = G_{ij}(\mathbf{q},\mathbf{v},\dot{\mathbf{v}},t)v^j. \quad (25)$$

Случай, когда G_{ij} не зависит от ускорения, требует отдельного изучения, так как начальные условия для системы дифференциальных уравнений первого порядка задаются в виде точки с координатами **q** на многообразии **Q**. В этом случае, как следует из (1), вектор **v** ортогонален градиенту энергии:

$$\frac{dq^i}{dt} = J^{ij}(\mathbf{q},\mathbf{v},\dot{\mathbf{v}},t)\frac{\partial U(\mathbf{q})}{\partial q^j}, \quad (26)$$

где J^{ij} – произвольный антисимметричный тензор. Эти уравнения являются уравнениями Гамильтона, если J^{ij} зависит только от координат **q** и для него выполнено тождество Якоби, похожее на (17), но с суммированием от 1 до N. Следует заметить, что размерность N конфигурационного пространства здесь может быть и нечетной.

В частном случае квадратичной зависимости $U(\mathbf{q}) = h_{ij}q^iq^j$ $(h_{ij} = h_{ji})$ и постоянного J^{ij} уравнение (26) линейно:

$$\frac{dq^i}{dt} = 2J^{ij}h_{jk}q^k. \quad (27)$$

Потребуем, чтобы кроме энергии $U(\mathbf{q})$ уравнение (24) сохраняло еще одну квадратичную форму – квадрат нормы $g_{ij}q^iq^j = 1$ вектора **q** с постоянным метрическим тензором **g**:

$$0 = \frac{d}{dt}g_{ij}q^iq^j = 4g_{ij}J^{jk}h_{kl}q^iq^l. \quad (28)$$

Это значит, что тензор **gJh** в правой части (28) должен быть антисимметричным. Будем далее считать матрицу тензора **g** единичной, т.е. норму вектора – евклидовой. Это значит, что мы требуем, чтобы траектория движения, описываемого уравнением (27), лежала на сфере единичного радиуса. Тогда $\mathbf{Jh} = -(\mathbf{Jh})^{\mathrm{T}} = \mathbf{hJ}$.

Для четной размерности $N = 2M$ ортогональным преобразованием координат можно привести неособенную антисимметричную матрицу **J** к виду

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{D} \\ -\mathbf{D} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \tag{29}$$

с неособенной диагональной квадратной матрицей **D**. Выражая симметричную матрицу **h** через четыре блока, можно записать условие коммутации как

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{D} \\ -\mathbf{D} & \mathbf{0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{H}_1 & \mathbf{H}_2^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{H}_2 & \mathbf{H}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{DH}_2 & \mathbf{DH}_3 \\ -\mathbf{DH}_1 & -\mathbf{DH}_2^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} \mathbf{H}_1 & \mathbf{H}_2^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{H}_2 & \mathbf{H}_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{D} \\ -\mathbf{D} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbf{H}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{D} & \mathbf{H}_1\mathbf{D} \\ -\mathbf{H}_3\mathbf{D} & \mathbf{H}_2\mathbf{D} \end{pmatrix}. \tag{30}$$

Следовательно, $\mathbf{H}_1\mathbf{D} = \mathbf{DH}_3$, $\mathbf{DH}_2 = -(\mathbf{DH}_2)^{\mathrm{T}}$ и $\mathbf{H}_2\mathbf{D} = -(\mathbf{H}_2\mathbf{D})^{\mathrm{T}}$. Из двух последних равенств следует, что $\mathbf{D}^2\mathbf{H}_2 = \mathbf{H}_2\mathbf{D}^2$. Чтобы это условие выполнялось при произвольной $\mathbf{H}_2$, $\mathbf{D}^2$ должно быть пропорционально единичной матрице. Тогда $D_{ij} = \pm\kappa\delta_{ij}$. Перестановкой координат q^j и q^{M+j} можно добиться одинаковых знаков: $D_{ij} = \kappa\delta_{ij}$. Тогда $\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_3$, $\mathbf{H}_2 = -\mathbf{H}_2^{\mathrm{T}}$, и матрица $\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 + i\mathbf{H}_2$ – эрмитова. Определив комплексный вектор $\psi^j = q^j + iq^{M+j}$ для $j = 1, \dots M$, можно привести уравнение (27) к виду

$$i\frac{d\psi}{dt} = \kappa\mathbf{H}\psi. \tag{31}$$

Это – уравнение Шрёдингера, полученное из сохранения нормы (полной вероятности) $\psi^\dagger\psi = 1$ и энергии $U(\mathbf{q}) = h_{ij}q^iq^j = \psi^\dagger\mathbf{H}\psi$. Здесь $\psi = \left(\psi^1, \dots, \psi^M\right)^{\mathrm{T}}$ – столбец, а $\psi^\dagger = \left(\psi^{1*}, \dots, \psi^{M*}\right)$ – строка комплексно сопряженных чисел.

4. УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ПОЛЕЙ

Вышеизложенный метод может быть применен и к полям. В этом случае номер степени свободы i заменяется непрерывными координатами **r**. Пусть, например, $\varphi(\mathbf{r},t)$ – скалярное поле в трехмерном пространстве и

$$E\left(\varphi, \frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) = \frac{1}{2}\int\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2 + c^2(\nabla\varphi)^2 + m^2\varphi^2\right]d^3\mathbf{r}. \tag{32}$$

Производные по φ и $\partial\varphi/\partial t$, используемые при выводе уравнений движения, должны быть вариационными. В соответствии с уравнением (6)

$$L\left(\varphi, \frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) = \frac{1}{2}\int\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2 - c^2(\nabla\varphi)^2 - m^2\varphi^2\right]d^3\mathbf{r}. \tag{33}$$

Тогда из (11) следует

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - c^2\Delta\varphi + m^2\varphi =$$
$$= \int G\left(\{\varphi\}, \left\{\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right\}, \left\{\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right\}, \mathbf{r}, \mathbf{r}', t\right)\frac{\partial\varphi(\mathbf{r}',t)}{\partial t}d^3\mathbf{r}', \tag{34}$$

где фигурными скобками обозначена функциональная зависимость, а $G(\mathbf{r},\mathbf{r}',t) = -G(\mathbf{r}',\mathbf{r},t)$. При локальном взаимодействии

$$G\left(\{\varphi\}, \left\{\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right\}, \left\{\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right\}, \mathbf{r} - \mathbf{r}', t\right) =$$
$$= f_i\left(\{\varphi\}, \left\{\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right\}, \left\{\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right\}, \mathbf{r}\right)\frac{\partial}{\partial r_i}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') +$$
$$+ g_{ijk}\left(\{\varphi\}, \left\{\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right\}, \left\{\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right\}, \mathbf{r}\right)\frac{\partial^3}{\partial r_i\partial r_j\partial r_k}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + \dots \tag{35}$$

Здесь и далее латинские индексы меняются от 1 до 3. Удерживая только первый член разложения (35), получим

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - c^2\Delta\varphi + m^2\varphi =$$
$$= \mathbf{f}\left(\{\varphi\}, \left\{\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right\}, \left\{\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right\}, \mathbf{r}\right)\nabla\frac{\partial\varphi}{\partial t} +$$
$$+ \frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\operatorname{div}\mathbf{f}\left(\{\varphi\}, \left\{\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right\}, \left\{\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right\}, \mathbf{r}\right). \tag{36}$$

В простейшем случае $\mathbf{f} = 2\nabla\varphi$ и

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - c^2\Delta\varphi + m^2\varphi = 2\nabla\varphi\cdot\nabla\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial t}\Delta\varphi. \tag{37}$$

Легко проверить, что правая часть (37) может быть получена добавкой $-(\nabla\varphi)^2\,\partial\varphi/\partial t$ в подынтегральное выражение (33). Если же $\mathbf{f} = 2\partial\nabla\varphi/\partial t$, то

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - c^2\Delta\varphi + m^2\varphi = 2\left(\nabla\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2 + \frac{\partial\varphi}{\partial t}\Delta\frac{\partial\varphi}{\partial t}. \quad (38)$$

Уравнение (38) дает пример скалярного поля с “нелагранжевым” самодействием.

Для

$$E = \int_{-\infty}^{\infty}\left(u^3 - \frac{u_x^2}{2}\right)dx \quad (39)$$

получим

$$-\frac{\delta E}{\delta u} = 3u^2 + u_{xx} = \int_{-\infty}^{\infty} G(u,x,x',t)u_t(x',t)dx'. \quad (40)$$

При $G = \operatorname{sgn}(x'-x)/2$ (40) после дифференцирования по x переходит в уравнение Кортевега–де Вриза:

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0. \quad (41)$$

При $G = \delta'(x'-x)$ (40) дает

$$u_{xt} + 3u^2 + u_{xx} = 0. \quad (42)$$

В калибровке $\varphi = 0$ энергия частиц и электромагнитного поля может быть записана как

$$E = \frac{1}{8\pi}\iiint\left[\left(\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right)^2 + (\operatorname{rot}\mathbf{A})^2\right]d^3\mathbf{r} + \sum_\alpha \frac{m_\alpha c^2}{\sqrt{1-\mathbf{v}_\alpha^2/c^2}}, \quad (43)$$

где $\mathbf{A}$ – векторный потенциал, m_α, Q_α, $\mathbf{r}_\alpha$ и $\mathbf{v}_\alpha$ – масса, заряд, положение и скорость частицы с номером α, а c – скорость света.

С помощью уравнения (6) получим

$$L_0 = \frac{1}{8\pi}\iiint\left[\left(\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right)^2 - (\operatorname{rot}\mathbf{A})^2\right]d^3\mathbf{r} - \sum_\alpha m_\alpha c^2\sqrt{1-\mathbf{v}_\alpha^2/c^2}. \quad (44)$$

Так как

$$\delta L_0 = \frac{1}{4\pi}\iiint\left[\frac{1}{c^2}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\frac{\partial\delta\mathbf{A}}{\partial t} - \operatorname{rot}\mathbf{A}\operatorname{rot}\delta\mathbf{A}\right]d^3\mathbf{r} + \ldots = \frac{1}{4\pi}\iiint\left[\frac{1}{c^2}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\frac{\partial\delta\mathbf{A}}{\partial t} - \delta\mathbf{A}\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\mathbf{A})\right]d^3\mathbf{r} + \ldots, \quad (45)$$

уравнение (11) дает

$$\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A_i}{\partial t^2} - \Delta A_i + \partial_i \operatorname{div}\mathbf{A}\right) = \int G_{ij}\left(\mathbf{A},\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t},\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2},\mathbf{r}_\alpha,\mathbf{v}_\alpha,\dot{\mathbf{v}}_\alpha,\mathbf{r},\mathbf{r}',t\right)\frac{\partial A_j(\mathbf{r}',t)}{\partial t}d^3\mathbf{r}' + \sum_\beta G_{i\beta k}\left(\mathbf{A},\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t},\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2},\mathbf{r}_\alpha,\mathbf{v}_\alpha,\dot{\mathbf{v}}_\alpha,\mathbf{r},t\right)v_{k\beta} \quad (46)$$

и

$$\frac{d}{dt}\frac{m_\alpha v_{\alpha i}}{\sqrt{1-\mathbf{v}_\alpha^2/c^2}} = -\int G_{k\alpha i}\left(\mathbf{A},\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t},\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2},\mathbf{r}_\gamma,\mathbf{v}_\gamma,\dot{\mathbf{v}}_\gamma,\mathbf{r}',t\right)\frac{\partial A_k(\mathbf{r}',t)}{\partial t}d^3\mathbf{r}' + \sum_\beta G_{\alpha i\beta j}\left(\mathbf{A},\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t},\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2},\mathbf{r}_\gamma,\mathbf{v}_\gamma,\dot{\mathbf{v}}_\gamma,t\right)v_{\beta j} \quad (47)$$

с условиями симметрии

$$G_{ij}\left(\mathbf{A},\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t},\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2},\mathbf{r}_\alpha,\mathbf{v}_\alpha,\dot{\mathbf{v}}_\alpha,\mathbf{r},\mathbf{r}',t\right) = -G_{ji}\left(\mathbf{A},\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t},\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2},\mathbf{r}_\alpha,\mathbf{v}_\alpha,\dot{\mathbf{v}}_\alpha,\mathbf{r}',\mathbf{r},t\right), \quad (48)$$

$$G_{\alpha i\beta j}\left(\mathbf{A},\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t},\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2},\mathbf{r}_\gamma,\mathbf{v}_\gamma,\dot{\mathbf{v}}_\gamma,t\right) = -G_{\beta j\alpha i}\left(\mathbf{A},\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t},\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2},\mathbf{r}_\gamma,\mathbf{v}_\gamma,\dot{\mathbf{v}}_\gamma,t\right). \quad (49)$$

Простейший случай $G_{ij} = 0$, $G_{\alpha i\beta j} = Q_\alpha\delta_{\alpha\beta}\left(\partial_i A^j - \partial_j A^i\right)(\mathbf{r}_\alpha)/c$ и $G_{k\alpha i} = \delta_{ik}\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_\alpha)Q_\alpha/c$, т.е.

$$\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A_i}{\partial t^2} - \Delta A_i + \partial_i \operatorname{div}\mathbf{A}\right) = \sum_\beta \frac{Q_\beta}{c}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_\beta)v_{i\beta}, \quad (50)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{m_\alpha v_{\alpha i}}{\sqrt{1-\mathbf{v}_\alpha^2/c^2}} = -\frac{Q_\alpha}{c}\frac{\partial A_i(\mathbf{r}_\alpha,t)}{\partial t} + Q_\alpha\frac{v_\alpha^j}{c}\left(\partial_i A_j - \partial_j A_i\right)\Big|_{\mathbf{r}_\alpha}, \quad (51)$$

соответствует обычной электродинамике. Эти уравнения могут быть получены из функции Лагранжа

$$L = L_0 + \sum_\alpha \frac{Q_\alpha}{c} \mathbf{v}_\alpha \mathbf{A}(\mathbf{r}_\alpha), \tag{52}$$

которая является одним из решений (6) уравнения (5).

Примером “нелагранжевой” модификации уравнений электродинамики может быть $G_{ij} = e_{ijk} f_k(\mathbf{r})\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r})$, когда в (50) появляется дополнительный “ток”:

$$\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A_i}{\partial t^2} - \Delta A_i + \partial_i \operatorname{div}\mathbf{A}\right) = \\ = \sum_\beta \frac{Q_\beta}{c}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_\beta) v_{i\beta} + \left(\mathbf{f} \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right)_i. \tag{53}$$

В простейших случаях вектор $\mathbf{f}$ может быть выбран пропорциональным $\partial^2\mathbf{A}/\partial t^2$ или току, создаваемому частицами $\sum Q_\beta \mathbf{v}_\beta \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_\beta)$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выведены уравнения, сохраняющие заданную энергию $E(\mathbf{q},\mathbf{v})$. Это уравнения Лагранжа с добавочными гироскопическими силами. При этом форма гироскопических сил может не быть точной, т.е. гироскопические силы не описываются функцией Лагранжа. Уравнения (5) и (6) дают явное выражение функции Лагранжа через энергию. Обобщенные импульсы и гамильтониан находятся из функции Лагранжа. В описанном подходе не используются вариационные принципы, что позволяет получить обобщение уравнений аналитической механики и теории поля. Эта альтернативная аксиоматика аналитической механики и теории поля близка к аксиоматике термодинамики, в основе которой тоже лежит закон сохранения энергии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Механика. 4-е изд. М.: Наука, 1988.
2. *Гантмахер Ф.Р.* Лекции по аналитической механике. 3-е изд. М.: Физматлит, 2002.
3. *Зоммерфельд А.* Механика. Ижевск: РХД, 2001.
4. *Ланцош К.* Вариационные принципы механики. М.: Мир, 1965.
5. *José J.V., Saletan E.J.* Classical dynamics: a contemporary approach. Cambridge University Press, 1998.
6. *Винокуров Н.А.* Вывод уравнений аналитической механики и теории поля из закона сохранения энергии // УФН. 2014. Т. 184. Вып. 6. С. 641–644.
7. *Винокуров Н.А.* Связь закона сохранения энергии и уравнений движения // УФН. 2015. Т. 185. Вып. 3. С. 335–336.
8. *Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т.* Современная геометрия: Методы и приложения. Т. II. Геометрия и топология многообразий. 4-е изд. М.: Эдиториал УРСС, 1998.

ENERGY CONSERVATION EQUATIONS OF MOTION

Corresponding Member of the RAS N. A. Vinokurov[a]

[a] *Budker Institute of Nuclear Physics Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russia*

A conventional derivation of motion equations in mechanics and field equations in field theory is based on the principle of least action with a proper Lagrangian. With a time-independent Lagrangian, a function of coordinates and velocities that is called energy is constant. This paper presents an alternative approach, namely derivation of a general form of equations of motion that keep the system energy, expressed as a function of generalized coordinates and corresponding velocities, constant. These are Lagrange’s equations with addition of gyroscopic forces. The important fact, that the energy is defined as the function on the tangent bundle of configuration manifold, is used explicitly for the derivation. The Lagrangian is derived from a known energy function. A development of generalized Hamilton’s and Lagrange’s equations without the use of variational principles is proposed. The use of new technique is applied to derivation of some equations.

Keywords: energy conservation, Lagrange’s equations, gyroscopic forces