

УДК 517.956.237:539.3(5)

МОДЕЛИ ПОНИЖЕННОЙ РАЗМЕРНОСТИ ДЛЯ ПЛАСТИНЫ, ЗАКРЕПЛЕННОЙ ВДОЛЬ ОСНОВАНИЯ И ЧАСТИ БОКОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

© 2024 г. С. А. Назаров^{1,*}

Представлено академиком РАН Н.Ф. Морозовым 22.11.2022 г.

Поступило 31.01.2024 г.

После доработки 31.01.2024 г.

Принято к публикации 18.03.2024 г.

У тонкой однородной изотропной пластины зафиксированы нижнее основание и часть боковой поверхности. Построена асимптотика частот собственных колебаний пластины. При большой зоне защемления боковой поверхности моделью служит двумерная задача теории упругости на сечении, но при уменьшении этой зоны обнаружен эффект локализации мод собственных колебаний около боковой поверхности. Асимптотический анализ основан на исследовании спектра вспомогательной плоской задачи в полубесконечной полосе, описывающей явление пограничного слоя.

Ключевые слова: тонкая пластина, защемленное основание, двумерная модель, локализация мод собственных колебаний, волны, захваченные упругой полуполосой

DOI: 10.31857/S2686740024030093, EDN: JZQBIV

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОПИСАНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

В сообщении приводится асимптотический анализ частот и мод собственных колебаний однородной изотропной цилиндрической пластины

$$\Omega^h = \{x = (y, z) : y = (y_1, y_2) \in \omega, z \in (0, h)\}, \quad (1)$$

которая вставлена в выемку той же формы и глубины $h\ell$ при $\ell \in [0, 1]$ (рис. 1) в абсолютно жестком полупространстве и полностью прикреплена к поверхности выемки. Здесь $z = x_3$ – аппликата, $y_1 = x_1$ и $y_2 = x_2$ – абсцисса и ордината, ω – область на плоскости, ограниченная простым замкнутым гладким контуром $\partial\omega$. Масштабированием сведем характерный размер сечения ω к единице, т.е. сделаем декартову систему координат $x = (x_1, x_2, x_3)$ и все

геометрические параметры, в частности, малую относительную толщину h безразмерными.

Собственные колебания пластины Ω^h с частотой $\gamma_h > 0$ описываются системой дифференциальных уравнений

$$-\mu \Delta_x u^h(x) - (\lambda + \mu) \nabla_x \nabla_x \cdot u^h(x) = \Lambda^h u^h(x), \quad (2)$$

$$x \in \Omega^h,$$

с краевыми условиями

$$u^h(x) = 0, \quad x \in \Gamma_D^h = \partial\Omega^h \setminus \Gamma_N^h, \quad (3)$$

$$\sigma^{(n)}(u^h; x) = 0, \quad x \in \Gamma_N^h. \quad (4)$$

При этом $\nabla_x = \text{grad}$, $\nabla_x \cdot = \text{div}$, $\Delta_x = \nabla_x \cdot \nabla_x$ – оператор Лапласа, $\lambda \geq 0$ и $\mu > 0$ – постоянные Ламе, $\Lambda^h = \rho \gamma_h^2$ – спектральный параметр, $\rho > 0$ – постоянная плотность упругого материала. Кроме того, $u^h = (u_1^h, u_2^h, u_3^h)$ – вектор смещений, зафиксированный нулевым на неподвижной поверхности

¹Институт проблем машиноведения
Российской академии наук, Санкт-Петербург, Россия
*E-mail: srgnazarov@yahoo.co.uk

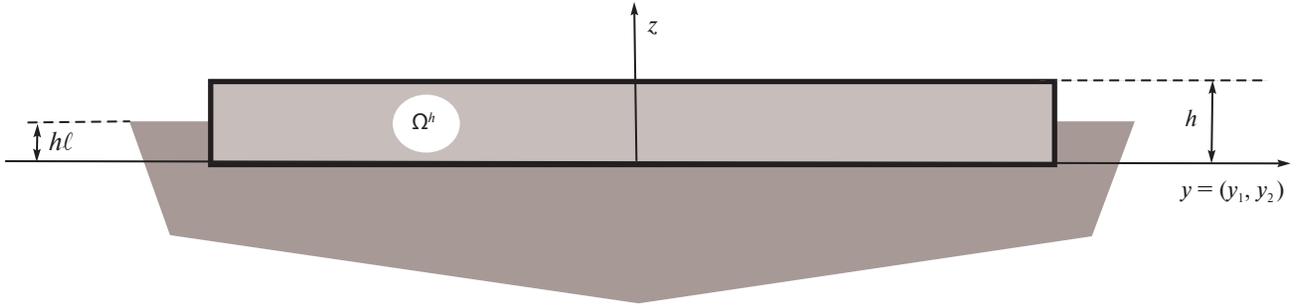


Рис. 1. Плоское изображение пластины толщиной h , вставленной в паз глубины $h\ell \leq h$.

$\Gamma_D^h = \{x \in \partial\Omega^h: z \leq h\ell\}$, $\Gamma_N^h = \{x \in \partial\Omega^h: z > h\ell\}$ — другая часть поверхности, свободная от внешних воздействий, и $\sigma^{(n)}(u^h)$ — вектор нормальных напряжений с декартовыми компонентами

$$\sigma_k^{(n)}(u^h; x) = \sum_{j=1}^3 n_j(x) \sigma_{jk}(u^h; x), \quad k = 1, 2, 3,$$

где $n = (n_1, n_2, n_3)$ — единичный вектор внешней нормали, причем $n_3 = 1$ на верхнем основании пластины и $n_3 = 0$ на ее боковой поверхности — кромке. Наконец, обозначив $\delta_{j,k}$ символ Кронекера, находим компоненты тензора напряжений по обычным формулам

$$\sigma_{jk}(u^h) = \mu \left(\frac{\partial u_j^h}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k^h}{\partial x_j} \right) + \lambda \delta_{j,k} \nabla_x \cdot u^h, \quad (5)$$

$j, k = 1, 2, 3.$

Собственные числа задачи (2)–(4) образуют неограниченную монотонную положительную последовательность

$$0 < \Lambda_1^h \leq \Lambda_2^h \leq \Lambda_3^h \leq \dots \leq \Lambda_m^h \leq \dots \rightarrow +\infty, \quad (6)$$

и основная цель сообщения — описать их поведение при $h \rightarrow +0$, которое, что достаточно неожиданно, существенно зависит от относительной глубины ℓ выемки. Именно, будет установлено наличие такой величины $\ell_* \in (0, 1)$, что при $\ell > \ell_*$ (достаточно глубокая выемка) собственные числа приобретают вид:

$$\Lambda_m^h = \frac{\mu\pi^2}{4h^2} + M_m + O(h), \quad (7)$$

где в качестве поправочных слагаемых выступают собственные числа плоской задачи теории упругости на сечении

$$-\mu\Delta_y v(y) - (\lambda_* + \mu)\nabla_y \nabla_y \cdot v(y) = Mv(y), \quad y \in \omega, \quad (8)$$

$$v(y) = (v_1(y), v_2(y)) = 0, \quad y \in \partial\omega, \quad (9)$$

с новым коэффициентом Ламе λ_* (разд. 2). В случае $\ell = \ell_*$ условия жесткого защемления (9) в двумерной модели заменяются (разд. 4) смешанными краевыми условиями

$$v_s(y) = 0, \tau_{mn}(v; y) = 0, \quad y \in \omega, \quad (10)$$

причем $\tau_{mn}(v) = n_1^2 \tau_{11}(v) + 2n_1 n_2 \tau_{12}(v) + n_2^2 \tau_{22}(v)$ и $\tau_{jk}(v)$ — декартовы компоненты двумерного тензора напряжений, рассчитанные по обычным формулам и постоянным Ламе λ_* и μ (ср. соотношения (5)). В обеих ситуациях пространственное поле смещений в теле $\Omega^h \subset \mathbb{R}^3$ восстанавливается по формулам

$$u_j^h(x) = \sin\left(\frac{\pi z}{2h}\right) v_j(y) + \dots, \quad j = 1, 2, \quad u_3^h(x) = \dots, \quad (11)$$

где $v = (v_1, v_2)$ — собственная вектор-функция системы (8) с краевыми условиями (9) или (10), а многоточие заменяет младшие асимптотические члены. Иными словами, в пластине реализуется модифицированное (из-за множителя $\sin(\pi z/2h)$ в формулах (11)) плоское напряженное состояние.

Наконец, для достаточно мелкой выемки, т.е. при $\ell < \ell_*$, обнаружен эффект концентрации мод собственных колебаний около кромки пластины и экспоненциального их затухания при удалении от боковой поверхности, причем в качестве модели пониженной размерности выступает то или иное обыкновенное дифференциальное уравнение (разд. 5). Более того, нормированные собственные числа $h^2 \Lambda_m^h$ приобретают общий предел $B_1(\ell) \in (0, \mu\pi^2/4)$

при $h \rightarrow +0$, являющийся собственным числом вспомогательной двумерной задачи теории упругости в полубесконечной полосе (разд. 3)

$$\Pi = \{\xi = (\eta, \zeta): \eta < 0, \zeta \in (0, 1)\}, \quad (12)$$

использующей систему растянутых координат (17) в окрестности кромки $\partial\omega \times (0, h)$. Соответствующая собственная вектор-функция $w = (w_n, w_z)$ экспоненциально затухает на бесконечности в Π и описывает плоское деформированное состояние пластины в плоскостях, перпендикулярных кромке пластины Ω^h .

Подчеркнем, что в ситуации $\ell \geq \ell_*$ медленная изменчивость упругих полей наблюдается во всех продольных направлениях в пластине, а в ситуации $\ell < \ell_*$ — только вдоль ее кромки. Изучение перехода от одного состояния пластины в другое при изменении знака множителя ℓ' в представлении

$$\ell = \ell_* + h\ell' + O(h^2) \quad (13)$$

требует детализированного исследования явления порогового резонанса в упругой полуполосе (12) (см. конец разд. 3).

Разработано множество подходов к изучению деформации тонких упругих пластин (ср. [1, 30], [2], [3, гл. 4], [4] и др.). Асимптотический анализ статических и спектральных задач (см., например, [5, гл. 16] и [6, гл. 5 и 7]) состоит в решении рекуррентной последовательности граничных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений на отрезке $(0, 1)$ $\varepsilon \zeta = h^{-1}z$, а условия их разрешимости и формируют модель пониженной размерности. Так, в случае оснований пластины, находящихся под действием нормальной нагрузки, обоснованно возникают гипотезы Кирхгофа и бигармоническое уравнение Софи Жермен (см. [1, 3, 6]). Общие асимптотические процедуры [5, гл. 16] подразумевают изучение феномена пограничного слоя, который в теории Кирхгофа отходит на второй план, но проявляется в значительной мере в рассматриваемой задаче (2)–(4) при $\ell < \ell_*$. Так, при $\ell = 0$ двумерная модель накладки Ω^h , прикрепленной только за нижнее основание $\Gamma_D^h = \{x: y \in \omega, z = 0\}$ к абсолютно жесткому полупространству, никоим образом не дает правильной информации о строении частот и мод собственных колебаний при малом размере h .

Локализация собственных колебаний приводит к концентрации напряжений, которая,

в свою очередь, провоцирует процессы разрушения. Как показывает проведенный далее асимптотический анализ, для уменьшения рисков отслоения пластины требуется достаточная глубина выемки и полное соединения контактирующих поверхностей.

2. ДВУМЕРНАЯ МОДЕЛЬ

Примем асимптотический анзац (7) для частот и уточним анзац (11) для мод собственных колебаний следующим образом:

$$u_j^h(x) = \sin\left(\frac{\pi z}{2h}\right) v_j(y) + h^2 V_j\left(y, \frac{z}{h}\right) + \dots, \quad j = 1, 2, \quad (14)$$

$$u_3^h(x) = h V_3\left(\frac{z}{h}\right) \nabla_y \cdot v_j(y) + \dots, \quad (15)$$

Подставим эти анзацы в систему (2) и в крайние условия (3) и (4) соответственно на нижнем и верхнем основаниях пластины. Сбрав коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра, получим следующую задачу для множителя V_3 в формуле (15):

$$-(\lambda + 2\mu) \frac{d^2 V_3}{d\zeta^2}(\zeta) - \mu \frac{\pi^2}{4} V_3(\zeta) = (\lambda + \mu) \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2} \zeta\right), \quad \zeta \in (0, 1),$$

$$V_3(0) = 0, \quad (\lambda + 2\mu) \frac{dV_3}{d\zeta}(1) = -\frac{\pi}{2} \lambda.$$

Таким образом,

$$V_3(\zeta) = \frac{2}{\pi} \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} \zeta\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} \alpha \zeta\right) + \beta \sin\left(\frac{\pi}{2} \alpha \zeta\right) \right),$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{\mu}{\lambda + 2\mu}} \in \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right],$$

$$\beta = \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} \alpha\right) \right)^{-1} \left(2\alpha - \sin\left(\frac{\pi}{2} \alpha\right) \right) > 0.$$

Условия разрешимости очередной задачи для вектора $V = (V_1, V_2)$ с компонентами из формул (14) и числа M из анзаца (7) превращается в систему дифференциальных уравнений (8) с коэффициентом

$$\lambda_* = (\lambda + 2\mu) \frac{4}{\pi} \alpha \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} \alpha\right) \right)^{-1} \times \left(4\alpha - (1 + 4\alpha^2) \sin\left(\frac{\pi}{2} \alpha\right) \right) - \mu. \quad (16)$$

Сумма $\lambda_* + \mu$ положительна при всех $\alpha > 0$, но сам коэффициент (16) становится отрицательным при малых α .

Подчеркнем, что сама система (8) выводится вне зависимости от того, какие краевые условия поставлены на кромке $\partial\omega \times (0, h)$ пластины (1). Вместе с тем общие алгоритмы [5] построения асимптотики решений эллиптических краевых задач в тонких областях требуют исследования явления пограничного слоя, не позволяя заранее предугадать краевые условия, замыкающие систему, и вообще могут исключить систему из списка предельных задач, описывающих асимптотику спектра (6) исходной задачи.

3. ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ

В окрестности $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^2$ контура $\partial\omega$ введем естественную систему (n, s) локальных координат, где теперь n — ориентированное расстояние до контура $\partial\omega$, $n < 0$ в $\omega \cap \mathcal{V}$, а s — длина дуги, измеренная вдоль контура против часовой стрелки. Определим “быстрые” переменные

$$\eta = h^{-1}n, \quad \zeta = h^{-1}z, \quad \xi = (\xi_1, \xi_2) = (\eta, \zeta) \quad (17)$$

и в задаче (2)–(4), переписанной в координатах ζ и s , перейдем формально к $h = 0$. Область (1) трансформируется в прямое произведение $\Pi \times \partial\omega$, а для вектора $w = (w_1, w_2) := (w_n, w_z)$, составленного из образов смещений u_n^h и u_z^h , получим плоскую задачу теории упругости в полуполосе (12)

$$-\mu \Delta_\xi w(s) - (\lambda + \mu) \nabla_\xi \nabla_\xi \cdot w(\xi) = Bw(\xi), \quad \xi \in \Pi,$$

$$w(\xi) = 0, \quad \xi \in \partial\Pi, \quad \zeta \leq \ell, \quad (18)$$

$$\sigma^{(n)}(w; \xi) = 0, \quad \xi \in \Pi, \quad \zeta \geq \ell,$$

где B — новое обозначение для спектрального параметра, а напряжения вычисляются по обычным двумерным формулам. Компонента $w_3 = w_s$ удовлетворяет скалярной антиплоской задаче, которая легко изучается посредством метода Фурье и не приводит к каким-либо неожиданным эффектам.

Изучим спектр задачи (18), непрерывная часть которого — луч $[B^\dagger, +\infty)$ с точкой отсечки $B^\dagger = \pi^2 \mu / 4$. В крайних случаях $\ell = 1$ или $\ell = 0$, когда боковая поверхность пластины

Ω^h целиком заняты краевыми условиями (3) или (4) соответственно, результаты получены в работах [7] и [8]. Именно, согласно [9, 8] при $\ell = 1$ отсутствуют как дискретный спектр, так и пороговый резонанс [10, 11], но при $\ell = 0$, как установлено в [7, 8], дискретный спектр содержит хотя бы одну точку $B_1(0)$ (наименьшее изолированное собственное число, которому отвечает собственная вектор-функция w^ℓ , исчезающая на бесконечности с экспоненциальной скоростью), однако полной информации о спектре, в частности, о пороговом резонансе нет. Результаты [8] также устанавливают, что дискретный спектр пуст и пороговый резонанс отсутствует при параметре ℓ , близком к единице. Кроме того, принцип сравнения [12] (простое следствие минимального принципа [13, теорема 10.2.1]) показывает, что при росте ℓ собственное число сдвигается вверх по вещественной оси, а значит, в конце концов попадает на точку отсечки B^\dagger и тем самым порождает пороговый резонанс. Иными словами, у задачи (18) при $B = B^\dagger$ и некотором $\ell = \ell_* \in (0, 1)$ является ограниченное решение $w^\dagger = (w_1^\dagger, w_2^\dagger)$, допускающее представления

$$w_1^\dagger(\xi) = C_\ell \sin\left(\frac{\pi}{2}\zeta\right) + \tilde{w}_1^\dagger(\xi), \quad w_2^\dagger(\xi) = \tilde{w}_2^\dagger(\xi) \quad (19)$$

с экспоненциально затухающими при $\eta \rightarrow -\infty$ остатками $\tilde{w}_j^\dagger(\xi)$ и коэффициентом $C_\ell \neq 0$. При этом в случае $\ell \in (\ell_*, 1)$ опять нет ни точек дискретного спектра, ни пороговых резонансов.

4. ПОСТАНОВКА КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ В ДВУМЕРНОЙ МОДЕЛИ ПРИ $\ell \geq \ell_*$

При $\ell = \ell_*$ краевые условия (10) возникают по следующим причинам, проистекающим от метода сращиваемых асимптотических разложений (см. [14, 15], [5, гл. 2] и др.). Во-первых, наличие ограниченного порогового решения (19) обеспечивает его сращивание с главным членом $v_n(y) \sin(\pi z / 2h)$ асимптотики (14) при любом следе компоненты v_n вектора v на контуре $\partial\omega$ и потому приходится назначить двойственное в смысле формулы Грина условию Дирихле условие Неймана $\tau_{nn}(v) = 0$. Во-вторых, в скалярной задаче для компоненты w_s порогового резонанса при $\ell > 0$, разумеется, нет, т.е. сращивать главный член $v_n(y) \sin(\pi z / 2h)$ асимптотики (14) не с чем и, следовательно, требуется условие $v_s = 0$ на $\partial\omega$.

В случае $\ell > \ell_*$ ограниченные пороговые решения (19) отсутствуют, и поэтому приведенные аргументации обеспечивают полные условия Дирихле (9).

Формальный вывод краевых условий (10) или (9), основанный на методе сращиваемых асимптотических разложений нуждается в строгом обосновании. Как и в книге [6, гл. 4] это делается при помощи подходящего весового неравенства Корна.

Аналитические методы не дают возможности найти критический размер $\ell_* = \ell_*(\lambda / \mu)$ и для нахождения его приближённого значения нужны численные эксперименты. То же самое относится и к выяснению скорости медленного затухания на бесконечности захваченных волн при $\ell = \ell_* - \delta$ и малом $\delta > 0$. Эта информация позволит изучить в ситуации (13) обсуждавшийся в разд. 1 переход от одного типа деформированного состояния пластины в другое.

5. ЭФФЕКТЫ ЛОКАЛИЗАЦИИ ПРИ $\ell < \ell_*$

Согласно публикациям [5, гл. 17] и [16] наличие захваченных волн в задаче (18) полностью изменяет процедуру построения асимптотики и выдвигает на первый план явление пограничного слоя, обеспечивая тем самым эффект локализации мод собственных колебаний около кромки пластины Ω^h . Именно, разработанные в статье [16] приемы позволяют проверить следующие факты. Во-первых, спектр задачи (2)–(4) приобретает собственные числа

$$\Lambda_m^h = h^{-2}(B_1(\ell) + O(h^{1/2})),$$

расположенные ниже точки $\mu\pi^2 h^{-2}$ (ср. формулу (7)), причем их количество N^h неограниченно возрастает при $h \rightarrow +0$. Во-вторых, для собственных вектор-функций $u_{(m)}^h$, нормированных в пространстве $L^2(\Omega^h)$, справедливо весовое неравенство

$$\left\| e^{\delta_m r_h^2} u_{(m)}^h; L^2(\Omega^h) \right\| \leq c_m, \quad m = 1, \dots, N^h,$$

где δ_m и c_m – положительные величины и $r_h(y) = h + \text{dist}(y, \partial\omega)$. Следовательно, вне окрестности боковой поверхности пластины собственные моды затухают с экспоненциальной скоростью.

Разработанный в книге [5] и статьях [7, 16] асимптотический анализ предоставляет

формулы для собственных чисел задачи (2)–(4), которые (формулы) существенно зависят от формы сечения. Если ω – круг и кривизна κ контура $\partial\omega$ постоянна, то справедливы соотношения

$$\Lambda_m^h = h^{-2}B_1(\ell) + h^{-1}b(\ell) + K_m + O(h^{1/2}),$$

где K_m – собственные числа обыкновенного дифференциального уравнения на окружности

$$-A(\ell)\partial_s^2 v(s) = K v(s), \quad s \in \partial\omega.$$

Если же кривизна имеет строгий глобальный максимум в точке s_0 , то

$$\Lambda_m^h = h^{-2}B_1(\ell) + h^{-1}b(\ell) + h^{-1/2}K_m + O(1),$$

а K_m – собственные числа уравнения гармонического осциллятора на оси (см., например, монографию [17])

$$-A(\ell)\partial_\zeta^2 v(\zeta) + a(\ell)\zeta^2 v(\zeta) = K v(\zeta), \quad \zeta \in \mathbb{R},$$

где $\zeta = h^{-1/2}(s - s_0)$ – растянутая координата на контуре.

Коэффициенты $A(\ell)$, $b(\ell)$ и $a(\ell)$ сложным образом зависят от параметра $\ell \in (0, \ell_*)$ и выражаются через интегралы от захваченной волны w^ℓ в полуполосе (12).

Спектральный анализ задач (18) и (2)–(4) в ситуации $\ell \in [0, \ell_*)$ не завершен полностью именно из-за того, что явное выражение для захваченной упругой волны w^ℓ недоступно. Как упоминалось, для определения приближенного решения задачи (18) и, в частности, нахождения упомянутых коэффициентов необходимы численные эксперименты, причем применение известных методов осложнено неограниченностью области Π и наличием непрерывного спектра задачи. Особую трудность представляет вопрос о пороговом резонансе, который в принципе позволит выяснить краевые условия в двумерной модели (8) и при $\ell < \ell_*$. Такая модель предоставляет устойчивые асимптотические формулы для собственных чисел в среднечастотном диапазоне спектра – точно так же помимо собственных частот $O(h)$ из нижней части спектра пластины со свободными основаниями, описываемыми классическим бигармоническим уравнением, имеются собственные частоты $O(1)$, отвечающие продольным

колебаниям. “Многосерийность” асимптотических формул для собственных колебаний тонких упругих дел подробно обсуждается в книге [6, гл. 7]. Например, наличие при каком-то $\ell \in [0, 1]$ собственного числа в непрерывном спектре задачи (18) обеспечивает новые локализационные эффекты. Вместе с тем нет никаких сведений о возможности появления собственных чисел на луче $[B^\dagger, +\infty)$.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект No. 124041500009-8).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Михлин С.Г.* Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970.
2. *Шойхет Б.А.* Об асимптотически точных уравнениях тонких плит сложной структуры // Прикладная математика и механика. 1973. Т. 37. № 5. С. 913–924.
3. *Морозов Н.Ф.* Избранные двумерные задачи теории упругости. Л.: Изд-во ЛГУ, 1978.
4. *Ciarlet P.G.* Plates and Junctions in Elastic Multi-Structures: An Asymptotic Analysis. Paris: Masson, 1988.
5. *Maz'ya V., Nazarov S., Plamenevskij B.* Asymptotic theory of elliptic boundary value problems in singularly perturbed domains. Vol. 1 & 2. Basel: Birkhäuser Verlag, 2000).
6. *Назаров С.А.* Асимптотическая теория тонких пластин и стержней. Понижение размерности и интегральные оценки. Новосибирск: Научная книга, 2002.
7. *Камоцкий И.В., Назаров С.А.* О собственных функциях, локализованных около кромки тонкой области // Проблемы матем. анализа. Вып. 19. Новосибирск: Научн. книга, 1999. С. 105–148.
8. *Назаров С.А.* Дискретный спектр коленчатых квантовых и упругих волноводов // Журнал вычисл. матем. и матем. физ. 2016. Т. 56. № 5. С. 879–895.
9. *Rellich F.* Über das asymptotische Verhalten der Lösungen von $\Delta u + \lambda u = 0$ in unendlichen Gebiete // Jahresber. Dtsch. Math.-Ver. 1943. V. 53. № 1. P. 57–65.
10. *Molchanov S., Vainberg B.* Scattering solutions in networks of thin fibers: small diameter asymptotics // Comm. Math. Phys. 2007. V. 273. № 2. P. 533–559.
11. *Grieser D.* Spectra of graph neighborhoods and scattering // Proc. London Math. Soc. 2008. V. 97. № 3. P. 718–752.
12. *Jones D.S.* The eigenvalues of $\nabla^2 u + \lambda u = 0$ when the boundary conditions are given on semi-infinite domains // Proc. Camb. Phil. Soc. 1953. V. 49. P. 668–684.
13. *Бирман М.Ш., Соломяк М.З.* Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. Л.: Изд-во ЛГУ, 1980.
14. *Ван Дайк М.Д.* Методы возмущений в механике жидкостей. М.: Мир, 1967.
15. *Ильин А.М.* Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989.
16. *Назаров С.А.* Двумерные асимптотические модели тонких цилиндрических упругих прокладок // Дифференциальные уравнения. 2022. Т. 58. № 6. С. 738–755.
17. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Квантовая механика (релятивистская теория). М.: Наука, 1974.

REDUCED DIMENSION MODELS FOR A PLATE FIXED ALONG ONE BASE AND A PART OF THE LATERAL SIDE**S. A. Nazarov^a***^aInstitute of Mechanical Engineering Problems of the Russian Academy of Sciences, Saint-Petersburg, Russia*

Presented by Academician of RAS N.F. Morozov

A thin homogeneous isotropic plate has fixed the lower base and a part of the lateral side. The asymptotics of frequencies of natural oscillations of the plate is constructed. In the case of long fixation zone the model implies the two-dimensional problem of the elasticity theory on the cross-section but the reducing of this zone leads to the localization of the modes of natural oscillations near the lateral side of the plate. The asymptotic analysis is based on inspection of the spectrum of the auxiliary planar problem in the semi-infinite strip which describes the boundary layer phenomenon.

Keywords: thin plate, fixed base, two-dimensional model, localization of modes of natural oscillations, waves trapped by an elastic semi-infinite strip