ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. ФИЗИКА, ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ, 2024, том 516, с. 51–58

МЕХАНИКА

УДК 534.1

О ГЕНЕРАЦИИ ЧАСТОТНЫХ ГРЕБЕНОК НА ОСНОВЕ МЕХАНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ НИЗКОРАЗМЕРНЫХ НАНОСИСТЕМ

© 2024 г. А. В. Лукин[1,*], И. А. Попов[1], О. В. Привалова[1], Л. В. Штукин[1]

Представлено академиком РАН Н.Ф. Морозовым 20.01.2024 г.

Поступило 31.01.2024 г.
После доработки 31.01.2024 г.
Принято к публикации 18.03.2024 г.

Исследуется нелинейная динамика прямоугольной атомарно-тонкой нанополосы в условиях внутреннего комбинационного резонанса между двумя поперечными и одной продольной формами механических колебаний. Аналитически найдены условия на величину деформации начального натяжения слоя, требуемую для реализации резонанса между формами с заданными индексами изменяемости по длине. Показано, что в условиях внутреннего резонанса в системе возбуждается нелинейный режим свободных колебаний, спектр которого имеет вид частотной гребенки. Выделены два качественно различных типа колебаний такого рода, вызванных начальным возбуждением по рабочей продольной форме колебаний и двум поперечным формам. Показана существенная зависимость спектрального состава генерируемых частотных гребенок от соотношений между амплитудами начального возмущения по трем взаимодействующим модальным координатам и величины параметра внутренней частотной расстройки системы.

Ключевые слова: наноэлектромеханические системы, НЭМС, нелинейная динамика, двумерные материалы, нанослой, лазерное термо-оптическое воздействие, фононные частотные гребенки

DOI: 10.31857/S2686740024030086, **EDN:** JZQXJT

Теоретические и прикладные задачи нелинейной динамики наномеханических систем в настоящее время привлекают растущее внимание научного и инженерного сообщества. Данная область исследований имеет непосредственное отношение к развитию таких направлений современной индустрии наносистем, как датчики высокоточного измерения различных физических величин (высотомеры, датчики давления и влажности, газовые сенсоры, детекторы масс осаждаемых частиц, датчики инерциальной информации) [1, 2], системы преобразования и обработки сигналов (ультразвуковые преобразователи, радиочастотные переключатели, генераторы частоты, элементы акустоэлектроники) [3], системы идентификации физических характеристик материалов на наномасштабе [4].

Проблемы упругих колебаний наносистем (в особенности атомарно тонких наноструктур из т.н. двумерных материалов: графен, дисульфид молибдена и др. [5]) представляют значительный научный интерес и практическую важность по ряду причин. Во-первых, уникальные физико-механические свойства двумерных материалов [6, 7] обеспечивают возможность эффективной генерации и управления параметрическими и вынужденными колебаниями, в т.ч. по многоузловым собственным формам резонаторов [8, 9]. В частности, открываются возможности фазовой корректировки теплошумовой характеристики резонатора и гигантского параметрического усиления вынужденных колебаний [10–12]. Во-вторых, в связи с малой изгибной жесткостью тонких наноструктур подобные системы являются существенно

[1]*Санкт-Петербургский политехнический университет, Санкт-Петербург, Россия*
**E-mail: lukin_av@spbstu.ru*

нелинейными с точки зрения их динамического отклика, что позволяет экспериментально исследовать и использовать в приложениях такие динамические эффекты, как сильное межмодальное взаимодействие в условиях внутренних резонансов [13, 14], направленный перенос и локализация механической энергии на отдельных формах колебаний резонатора [15, 16], нелинейная диссипация [17, 18] и др.

Перспективным направлением разработки наносистем из двумерных материалов является использование уникальных особенностей динамических режимов, задействующих нелинейное резонансное взаимодействие различных мод собственных колебаний резонатора. Известны работы, в которых рассматриваются случаи нелинейного модального взаимодействия между несколькими поперечными формами круглых наномембран [4, 6]. Нелинейная динамика нанополос изучена в значительно меньшей степени. В то же время свойства спектра свободных колебаний прямоугольных натянутых мембран могут приводить к существенно новым эффектам в динамическом поведении таких систем. К примеру, в близкой с механической точки зрения задаче о связанных плоско-изгибных колебаниях микромеханической прямоугольной пластинки был обнаружен режим пульсаций, частотный спектр которого представляет собой т.н. частотную гребенку – серию эквидистантно расположенных спектральных линий [19]. Так был экспериментально продемонстрирован акустомеханический аналог оптических частотных гребенок, формируемых фемтосекундными лазерами с синхронизированными модами [20].

Оптические гребенки как источники стабильного электромагнитного излучения оптического диапазона находят многообразные применения в сложных метрологических и спектроскопических задачах, таких как создание сверхточных часов и спутниковых систем позиционирования, лазерная спектроскопия высокого разрешения, анализ состояния холодных атомов и др. [21, 22] После появления первых экспериментальных реализаций акустомеханических частотных гребенок, называемых также фононными, эта область исследований начала активно развиваться [23]. Ключевым потенциальным преимуществом фононных частотных гребенок на базе наносистем перед их оптическими аналогами является уникальный диапазон возможностей по управлению параметрами генерируемого высокочастотного сигнала за счет существенной нелинейности возбуждаемых режимов колебаний и контролируемой изменяемости в широких пределах динамических характеристик нанорезонаторов, изготовленных из двумерных материалов [24]. Кроме того, принцип генерации фононных частотных гребенок находит оригинальные применения в задачах повышения точности и стабильности работы резонансных нано- и микроэлектромеханических сенсоров [25], а также разработки автономных микромасштабных систем аккумулирования энергии окружающей среды [26]. Несомненный научный и практический интерес представляют и специальные вопросы математического моделирования нелинейной динамики наносистем в режимах генерации частотных гребенок [27].

В настоящей работе исследуется нелинейная динамика прямоугольной атомарно-тонкой нанополосы в условиях внутреннего комбинационного резонанса между двумя поперечными и одной продольной формами колебаний. Рассматривается механизм генерации частотных гребенок на основе предложенной конструкции нанорезонатора в контексте развития неразрушающих методов лазерного термо-оптического возбуждения колебаний упруго-деформируемых наноструктур.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Рассмотрим задачу о связанных продольно-поперечных колебаниях предварительно натянутой наномасштабной прямоугольной полосы (слоя), изготовленной из двумерного материала. В силу атомарной тонкости слоя, изгибной жесткостью системы можно пренебречь, поэтому в качестве механической модели будем использовать модель мембраны, поле перемещений в которой зависит лишь от одной (продольной) координаты. Графическая схема задачи показана на рис. 1.

На рис. 1 введены следующие обозначения: $S = bh$ – площадь поперечного сечения слоя; b, h – ширина и высота сечения; ρ, E – объемная плотность и модуль Юнга материала; L_0 и

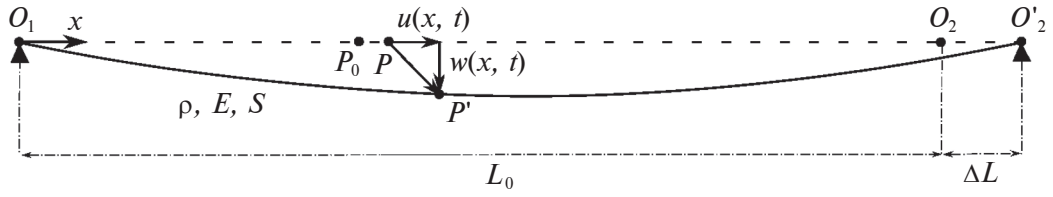

Рис. 1. Модель предварительно натянутого нанослоя.

ΔL – длина слоя в ненатянутом начальном состоянии и заданное удлинение соответственно; x – продольная координата, определяемая по отношению к натянутому состоянию слоя; $u(x, t), w(x, t)$ – продольная и поперечная компоненты вектора перемещений сечения слоя с координатой x в момент времени t.

Для выведения геометрически нелинейных связанных уравнений продольно-поперечных колебаний нанополосы применим вариационный принцип Гамильтона–Остроградского:

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}(T-V)\,dt=0, \tag{1}$$

где T и V – кинетическая и потенциальная энергии системы, $[t_1, t_2]$ – произвольный отрезок времени, δ – оператор варьирования.

Кинетическая энергия системы имеет вид

$$T=\frac{1}{2}\rho S\int_0^L\left(\dot{u}^2+\dot{w}^2\right)dx, \tag{2}$$

где интегрирование выполняется по длине слоя $L=L_0+\Delta L$ в его натянутом состоянии.

В предположении малости продольных смещений слоя по отношению к поперечным $u=O(w^2)$ продольная компонента тензора упругих деформаций может быть представлена следующим образом:

$$\varepsilon_{xx}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2.$$

Упругая энергия предварительно натянутой полосы с начальной деформацией $\varepsilon_0=\Delta L/L_0$ имеет вид

$$V=\frac{1}{2}ES\varepsilon_0\int_0^L\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2dx+\frac{1}{2}ES\int_0^L\left[\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]^2dx. \tag{3}$$

Подстановка (2), (3) в (1) и последующее интегрирование полученных выражений по частям позволяет, с учетом произвольности вариаций δu и δw, вывести следующие дифференциальные уравнения движения упругой полосы, приведенные к безразмерному виду:

$$\begin{aligned}\ddot{\tilde{u}}&=\tilde{u}''+\beta\tilde{w}'\tilde{w}'',\\ \ddot{\tilde{w}}&=\left[\varepsilon_0+\beta\tilde{u}'+\frac{\beta^2}{2}(\tilde{w}')^2\right]\tilde{w}''+\beta\ddot{\tilde{u}}\tilde{w}',\end{aligned} \tag{4}$$

где

$$\tilde{u}=\frac{u}{h},\quad \tilde{w}=\frac{w}{h},\quad \tilde{x}=\frac{x}{L},\quad \tau=\frac{t}{t_0},\quad t_0=\frac{L}{c},\quad c=\sqrt{\frac{E}{\rho}},$$

а также введен безразмерный геометрический параметр $\beta=\dfrac{h}{L}$.

Здесь и далее за символами $\dot{(\,)}$ и $()'$ сохранены обозначения производных по безразмерному времени τ и безразмерной продольной координате $\tilde{x}$. В дальнейшем знак ~ над безразмерными величинами будем опускать.

В случае шарнирного опирания слоя граничные условия имеют вид

$$u(0,\tau)=u(1,\tau)=0,\ w(0,\tau)=w(1,\tau)=0. \tag{5}$$

АНАЛИЗ ВОЗМОЖНЫХ РЕЗОНАНСНЫХ СООТНОШЕНИЙ

Исследуем вопрос о характере свободных колебаний нанополосы при нелинейном модальном взаимодействии между продольными и поперечными формами колебаний. Следуя методу Галёркина, представим решение задачи (4)–(5) в виде

$$\begin{aligned}u(x,\tau)&=\phi_n(x)U_n(\tau),\\ w(x,\tau)&=\psi_l(x)W_l(\tau)+\psi_m(x)W_m(\tau),\end{aligned} \tag{6}$$

где $\phi_n(x)$, $\psi_l(x)$, $\psi_m(x)$ – формы свободных продольных и поперечных колебаний слоя соответственно; $U_n(\tau)$, $W_l(\tau)$, $W_m(\tau)$ – отвечающие им модальные координаты. Отметим, что для принятых граничных условий спектр частот свободных продольных колебаний $\{\hat{\omega}_n\}$ равен $\hat{\omega}_n = \pi n$; спектр поперечных колебаний $\omega_l = \sqrt{\varepsilon_0}\,\pi l$.

Предположим, что для некоторого набора индексов (l, m, n) выполняется условие внутреннего комбинационного резонанса: $\omega_l + \omega_m \approx \hat{\omega}_n$, или, с учетом явных выражений для спектров собственных частот полосы, $\sqrt{\varepsilon_0}\,(l+m) \approx n$. Подчеркнем, что это условие может быть выполнено путем задания соответствующей величины деформации предварительного натяжения слоя ε_0.

Следует отметить, что учет двух мод колебаний в представлении поля поперечных перемещений слоя (6) вызван тем обстоятельством, что, как будет показано далее, нелинейное модальное взаимодействие какой-либо одной формы поперечных колебаний с какой-либо продольной формой для выбранного вида граничных условий не реализуется: соответствующие коэффициенты уравнений в модальных координатах тождественно обнуляются.

Подстановка (6) в (4) и запись проекционных условий позволяет прийти к следующей системе дифференциальных уравнений в модальных координатах:

$$\ddot{U}_n + \hat{\omega}_n^2 U_n = \beta G_1 W_l W_m,$$

$$\ddot{W}_l + \omega_l^2 W_l = \beta G_2 U_n W_m + \\ + \beta^2 \left(G_3 W_l^3 + G_4 W_l W_m^2\right) + \beta G_5 \ddot{U}_n W_m, \qquad (7)$$

$$\ddot{W}_m + \omega_m^2 W_m = \beta G_6 U_n W_l + \\ + \beta^2 \left(G_7 W_m^3 + G_8 W_m W_l^2\right) + \beta G_9 \ddot{U}_n W_l,$$

где G_i – проекционные коэффициенты, общий вид которых для краткости не приводится.

Отметим, что связь между продольной и поперечными формами колебаний определяется числовыми значениями коэффициентов G_i для $i = 1, 2, 5, 6, 9$. Вычисление этих коэффициентов в зависимости от значений индексов (l, m, n) для случая шарнирного опирания

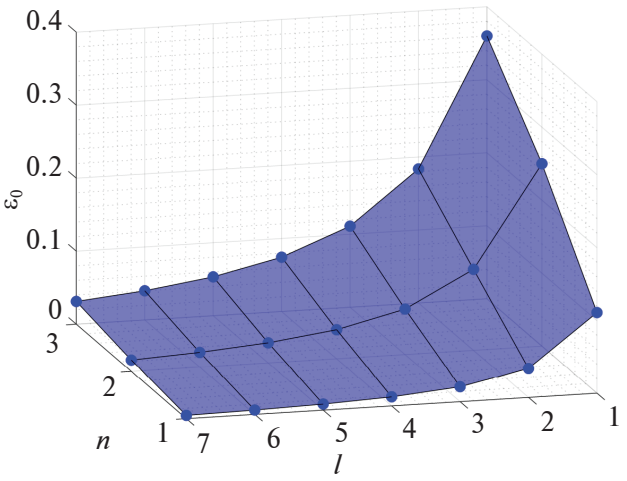

Рис. 2. Натяжение слоя, необходимое для реализации внутреннего комбинационного резонанса.

полосы показывает, что они принимают ненулевые значения лишь для некоторых комбинаций номеров вовлекаемых во взаимодействие форм колебаний, а именно при выполнении равенства

$$m = l + n. \qquad (8)$$

Иными словами, для любого наперед заданного номера продольной формы колебаний n нелинейное взаимодействие данной формы будет наблюдаться с любыми двумя формами поперечных колебаний, номера которых l и m связаны указанным соотношением.

Условие (8) позволяет определить величину деформации предварительного натяжения слоя ε_0, которую необходимо обеспечить для реализации внутреннего резонансного взаимодействия рассматриваемой тройки собственных форм с заданными индексами (l, n) (индекс второй поперечной формы m при этом однозначно определяется согласно упомянутому условию). А именно точной настройке на внутренний резонанс соответствует равенство

$$\varepsilon_0 = \frac{n^2}{(2l+n)^2}.$$

График функции $\varepsilon_0(n, l)$ показан на рис. 2. Из рисунка видно, что требуемая деформация преднатяжения уменьшается с ростом индекса первой рабочей формы поперечных колебаний и увеличивается с увеличением индекса рабочей формы продольных колебаний. Порядок

величины ε_0 находится в области достижимых значений для большинства двумерных материалов, используемых при изготовлении наномеханических систем.

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ СИСТЕМЫ

Для качественного анализа свойств нелинейных колебаний системы (7) выполняется построение асимптотического разложения с помощью метода многих масштабов.

Условие нахождения в области комбинационного резонанса представляется в виде

$$\omega_l + \omega_m = \tilde{\omega}_n + \sigma,$$

где $\sigma(\varepsilon_0)$ – параметр внутренней частотной расстройки.

Применение метода многих масштабов позволяет прийти к системе автономных эволюционных уравнений в медленных (амплитудных) переменных, явный вид которой в сообщении не приводится. С учетом наличия в динамике системы процессов с существенно различными характерными временами, анализ эволюционных уравнений является значительно более эффективным с вычислительной точки зрения.

Выполним численное интегрирование начальных задач Коши для исходной системы и системы в медленных амплитудных переменных при задании различных начальных условий. Везде далее будем рассматривать комбинацию индексов рабочих форм колебаний $n=1, l=3, m=4$. Представленные в настоящем разделе результаты в размерных переменных получены для прямоугольной полосы, изготовленной из однослойного графена. Геометрические и физико-механические характеристики наносистемы приняты следующими:

$$L = 3 \text{ мкм},\ h = 5 \text{ нм},\ \rho = 720\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3},\ E = 1000 \text{ ГПа}.$$

На рис. 3 показаны осциллограммы колебаний по трем взаимодействующим собственным формам при сообщении системе начального отклонения (деформации) в продольном направлении: $U_n(0)=0.6, W_l(0)=W_m(0)=10^{-5}$. Рассматривается случай точной настройки на резонанс ($\sigma=0$).

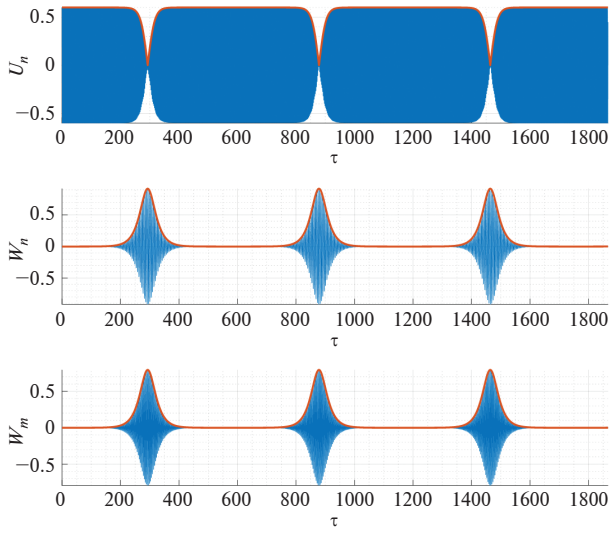

Рис. 3. Режим пульсаций при начальном возбуждении по продольной форме колебаний.

Колебания на рис. 3 имеют вид пульсаций – глубоко модулированных биений релаксационного типа, вызванных периодическим обменом энергией между продольными и поперечными формами движений. Наблюдается замечательное совпадение результатов интегрирования систем в “быстрых” и “медленных” переменных. Как показывает более подробный анализ, режим пульсаций возникает лишь при величинах начального возмущения, превышающих некоторое пороговое значение. Период пульсаций при этом уменьшается с ростом амплитуды начального возмущения, что объясняется механической нелинейностью резонатора – эффектом увеличения поперечной жесткости слоя с ростом амплитуды его поперечных смещений.

Исследуем спектральный состав наблюдаемых динамических режимов. Анализ выполняется с применением дискретного преобразования Фурье к осциллограммам колебаний, вычисленным на базе нелинейных эволюционных уравнений. На рис. 4 показаны спектрограммы колебаний нанослоя при варьировании параметра внутренней частотной расстройки $\sigma(\varepsilon_0)$. Как видно из рис. 4, спектр Фурье исследуемого процесса имеет вид т.н. частотной гребенки – набора эквидистантно расположенных спектральных линий с шагом, равным частоте наблюдаемых во временной области пульсаций. Наблюдается явно выраженный диапазон значений параметра частотной расстройки, внутри которого реализуется вибрационный режим со

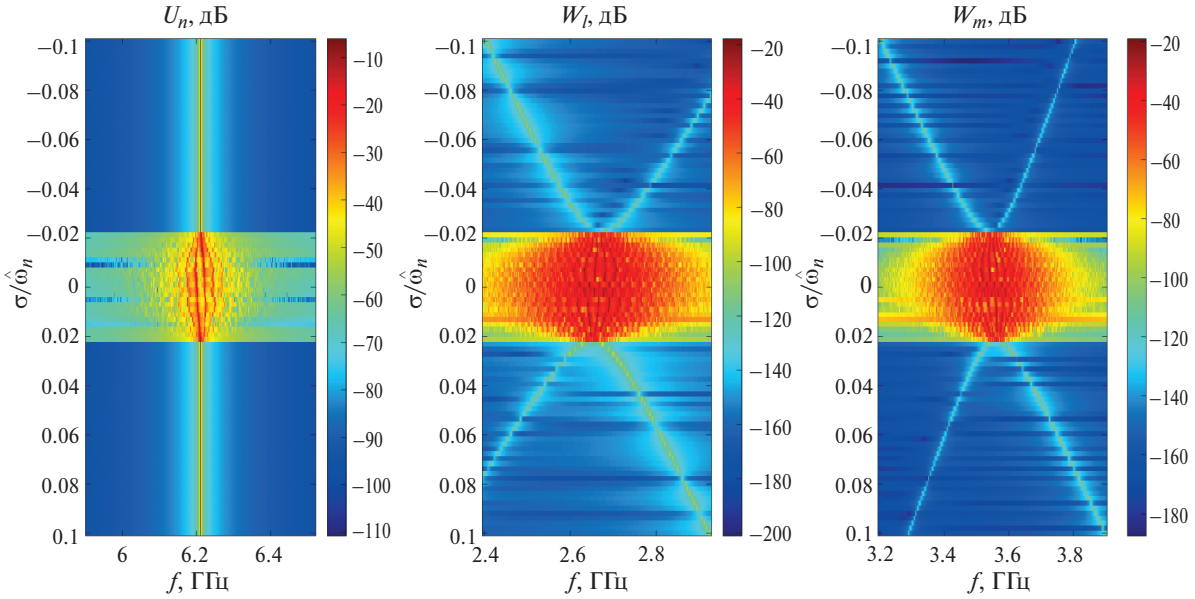

Рис. 4. Спектрограмма колебаний при изменении натяжения слоя.

спектром типа частотной гребенки. Вне этого диапазона колебания по продольной форме колебаний являются одночастотными, а по двум поперечным формам колебаний – двухчастотными с двумя доминирующими гармониками, близкими к соответствующим частотам свободных малых колебаний по данным формам. Ширина указанного диапазона значений параметра σ зависит от амплитуды начального продольного возмущения.

Следует подчеркнуть, что исследуемые динамические режимы являются существенно нелинейными и поэтому чувствительными к изменению ключевых параметров системы. При этом механическая природа колебаний, приводящих в рассмотренной постановке к генерации частотных гребенок, обеспечивает широкие возможности по управлению этими параметрами и, как следствие, управлению спектральным составом возбуждаемого режима движения. Как показано выше, индексы вовлекаемых в нелинейное взаимодействие форм колебаний системы (l, m, n), а также значение параметра частотной расстройки σ определяется начальным натяжением нанослоя ε_0, величина которого для двумерных материалов может контролируемым образом варьироваться в очень широких пределах. Столь же широки и возможности управления параметрами возбуждения колебаний: наряду с распространенным электростатическим принципом возбуждения, в рассматриваемом случае перспективным является механизм лазерного термо-оптического воздействия на нанополосу [27]. Простота изменения пространственной конфигурации светового пятна лазера и закона излучения во временной области (импульсный, периодический) позволяет эффективно возбуждать как продольные, так и поперечные формы колебаний слоя с различной изменяемостью по его длине.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе была предложена и исследована математическая модель связанных нелинейных продольно-поперечных колебаний прямоугольной нанополосы, изготовленной из двумерного материала, в условиях внутреннего комбинационного резонанса между двумя поперечными и одной продольной формами колебаний. Аналитически найдены условия на величину деформации начального натяжения слоя, требуемую для реализации резонанса между формами с заданными индексами изменяемости по длине. Показано, что в условиях внутреннего резонанса в системе возбуждается нелинейный режим свободных колебаний, спектр которого имеет вид частотной гребенки. Исследована зависимость спектрального состава генерируемых частотных гребенок от соотношений между амплитудами начального возмущения по трем взаимодействующим

модальным координатам и от величины параметра внутренней частотной расстройки системы. Обнаружено существование определенного диапазона значений преднатяжения слоя в области настройки на комбинационный резонанс, которому соответствует режим частотной гребенки при продольном механизме возбуждения колебаний. Отмечены широкие возможности по управлению характеристиками генерируемой частотной гребенки на основе механических колебаний нанослоя путем изменения величины его начального натяжения и пространственной конфигурации светового пятна лазерного термо-оптического источника возбуждения.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование частично финансируется Министерством науки и высшего образования Российской Федерации в рамках программы Исследовательского центра мирового уровня: “Передовые цифровые технологии” (соглашение №075-15-2020-311 от 20.04.2022).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Xiao X., Li C., Fan S.-C., Liu Y.-J., Liu Y.* Optical-thermally actuated graphene mechanical resonator for humidity sensing. Sensors and Actuators B.: Chemical, 2023. 374, 132851. https://doi.org/10.1016/j.snb.2022.132851
2. *Roslon I., Steeneken P.G., Alijani F., Roslon I.E., Japaridze A., Naarden L., Smeets L., Dekker C., van Belkum A., Alijani F.* Prospects and Challenges for Graphene Drums as Sensors of Individual Bacteria. 2023. https://doi.org/10.1101/2023.11.20.567863
3. *Xu B., Zhang P., Zhu J., Liu Z., Eichler A., Zheng X.Q., Lee J., Dash A., More S., Wu S., Wang Y., Jia H., Naik A., Bachtold A., Yang R., Feng P. X. L., Wang Z.* Nanomechanical Resonators: Toward Atomic Scale // ACS Nano. 2022. V. 16, Iss. 10. P. 15545–15585. American Chemical Society. https://doi.org/10.1021/acsnano.2c01673
4. *Sajadi B., van Hemert S., Arash B., Belardinelli P., Steeneken P.G., Alijani F.* Size- and temperature-dependent bending rigidity of graphene using modal analysis // Carbon. 2018. V. 139. P. 334–341. https://doi.org/10.1016/j.carbon.2018.06.066
5. *Ferrari P.F., Kim S.P., van der Zande A.M.* Nanoelectromechanical systems from two-dimensional materials // Appl. Physics Reviews. 2023. V. 10. Iss. 3. American Institute of Physics Inc. https://doi.org/10.1063/5.0106731
6. *Steeneken P.G., Dolleman R.J., Davidovikj D., Alijani F., van der Zant H.S.J.* Dynamics of 2D material membranes // 2D Materials. 2021. V. 8. Iss. 4. IOP Publishing Ltd. https://doi.org/10.1088/2053-1583/ac152c
7. *Cupertino A., Shin D., Guo L., Steeneken P.G., Bessa M.A., Norte R.A.* Centimeter-scale nanomechanical resonators with low dissipation. 2023. http://arxiv.org/abs/2308.00611
8. *Dolleman R.J., Houri S., Chandrashekar A., Alijani F., van der Zant H.S.J., Steeneken P.G.* Opto-thermally excited multimode parametric resonance in graphene membranes // Scientific Reports, 2018. 8(1). https://doi.org/10.1038/s41598-018-27561-4
9. *Yang F., Rochau F., Huber J.S., Brieussel A., Rastelli G., Weig E.M., Scheer E.* Spatial Modulation of Nonlinear Flexural Vibrations of Membrane Resonators // Physical Review Letters. 2019. V. 122(15). https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.122.154301
10. *Zega V., Nitzan S., Li M., Ahn C.H., Ng E., Hong V., Yang Y., Kenny T., Corigliano A., Horsley D.A.* Predicting the closed-loop stability and oscillation amplitude of nonlinear parametrically amplified oscillators // Appl. Physics Letters. 2015. V. 106(23). https://doi.org/10.1063/1.4922533
11. *Keşkekler A., Shoshani O., Lee M., van der Zant H.S.J., Steeneken P.G., Alijani F.* Tuning nonlinear damping in graphene nanoresonators by parametric–direct internal resonance // Nature Communications. 2021. V. 12(1). https://doi.org/10.1038/s41467-021-21334-w
12. *Lee J., Shaw S.W., Feng P.X.L.* Giant parametric amplification and spectral narrowing in atomically thin MoS2 nanomechanical resonators // Appl. Physics Reviews. 2022. V. 9(1). https://doi.org/10.1063/5.0045106
13. *Liu C.H., Kim I.S., Lauhon L.J.* Optical Control of Mechanical Mode-Coupling within a MoS2 Resonator in the Strong-Coupling Regime // Nano Letters. 2015. V. 15(10). P. 6727–6731. https://doi.org/10.1021/acs.nanolett.5b02586
14. *Keskekler A., Bos V., Aragón A.M., Steeneken P.G., Alijani F.* Characterizing multi-mode nonlinear dynamics of nanomechanical resonators. 2023. http://arxiv.org/abs/2304.01419
15. *Wang M., Perez-Morelo D.J., Lopez D., Aksyuk V.A.* Persistent Nonlinear Phase-Locking and Nonmonotonic Energy Dissipation in Micromechanical Resonators // Physical Review X. 2022. V. 12(4). https://doi.org/10.1103/PhysRevX.12.041025
16. *de Jong M.H.J., Cupertino A., Shin D., Gröblacher S., Alijani F., Steeneken P.G., Norte R.A.* Beating

Ringdowns of Near-Degenerate Mechanical Resonances // Physical Review Applied. 2023. V. 20(2), 024053.
https://doi.org/10.1103/PhysRevApplied.20.024053

17. Wei X., Zhang T., Jiang Z., Ren J., Huan R. Frequency latching in nonlinear micromechanical resonators // Appl. Physics Letters. 2017. 110(14).
https://doi.org/10.1063/1.4979829

18. *Gajo K., Rastelli G., Weig E.M.* Tuning the nonlinear dispersive coupling of nanomechanical string resonators // Phys. Review B, 2020. V. 101(7).
https://doi.org/10.1103/PhysRevB.101.075420

19. *Ganesan A., Do C., Seshia A.* Phononic Frequency Comb via Intrinsic Three-Wave Mixing. Physical Review Letters, (2017). 118(3).
https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.118.033903

20. *Udem T., Holzwarth R., Hansch T.W.* Optical frequency metrology // Nature. 2002. 416(6877).
https://doi.org/10.1038/416233a. PMID: 11894107

21. *Kolachevsky N.N., Khabarova K.Yu., Zalivako I.V., Semerikov I.A., Borisenko A.S., Sherstov I.V., Bagaev S.N., Lugovoy A.A., Prudnikov O.N., Taichenachev A.V., Chepurov S.V.* Prospective Quantum-Optical Technologies for Satellite Navigation Challenges // Rocket-Space Device Engineering and Information Systems. 2018. V. 5(1). P. 13–27.
https://doi.org/10.30894/issn2409-0239.2018.5.1.13.27

22. *Mantsevich S.N., Kostyleva E.I., Danilin A.N., Khorkin V.S.* Generation of dual and quad-optical frequency combs in the injected radiation free mode-locked frequency-shifted feedback laser // Frontiers of Optoelectronics. 2023. 16(1).
https://doi.org/10.1007/s12200-023-00079-y

23. *Lee J., Shaw S.W., Feng P.X.L.* Phononic Frequency Comb Generation via 1:1 Mode Coupling in MoS2 2D Nanoelectromechanical Resonators // Proc. IEEE International Conference on Micro Electro Mechanical Systems (MEMS). 2022. January. P. 503–506.
https://doi.org/10.1109/MEMS51670.2022.9699651

24. *Sun J., Yu S., Zhang H., Chen D., Zhou X., Zhao C., Gerrard D.D., Kwon R., Vukasin G., Xiao D., Kenny T.W., Wu X., Seshia A.* Generation and Evolution of Phononic Frequency Combs via Coherent Energy Transfer between Mechanical Modes // Phys. Review Applied. 2023. 19(1).
https://doi.org/10.1103/PhysRevApplied.19.014031

25. *Ganesan A., Seshia* A. Resonance tracking in a micromechanical device using phononic frequency combs // Scientific Reports. 2019. 9(1).
https://doi.org/10.1038/s41598-019-46003-3

26. *Zhang T., Seshia A.A*A MEMS Frequency Comb Energy Harvester // J. Microelectromechanical Systems. 2023.
https://doi.org/10.1109/JMEMS.2023.3316436

27. *Morozov N.F., Indeitsev D.A., Lukin A.V., Popov I.A., Shtukin L.V.* Nonlinear interaction of longitudinal and transverse vibrations of a rod at an internal combinational resonance in view of opto-thermal excitation of N/MEMS // J. Sound and Vibration. 2021. 509.
https://doi.org/10.1016/j.jsv.2021.116247

ON THE GENERATION OF FREQUENCY COMBS BASED ON MECHANICAL VIBRATIONS OF 2D MATERIAL NANOSHEETS

A. V. Lukin[a], I. A. Popov[a], O. V. Privalova[a], L. V. Shtukin[a]

Presented by Academician of the RAS N.F. Morozov

[a] *Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, Saint-Petersburg, Russia*

We study the nonlinear dynamics of a rectangular atomically thin nanostrip under conditions of internal combinational resonance between two transverse and one longitudinal modes of mechanical vibrations. Conditions have been analytically found for the initial pretension of the layer required to realize resonance between eigenforms with given indices of variability along the length. It is shown that under conditions of internal resonance, a nonlinear mode of free oscillations is excited in the system, the spectrum of which has the form of a frequency comb. Two qualitatively different types of oscillations of this kind are identified – those caused by the initial excitation in the working longitudinal form of oscillations and in two transverse forms. A significant dependence of the spectral composition of the generated frequency combs on the relationships between the amplitudes of the initial disturbance for the three interacting modes and on the value of the internal frequency detuning parameter of the system is shown.

Keywords: nanoelectromechanical systems, NEMS, nonlinear dynamics, two-dimensional materials, nanolayer, laser opto-thermal excitation, phononic frequency combs