ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. ФИЗИКА, ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ, 2024, том 516, с. 47–50

МЕХАНИКА

УДК 539.3

ТЕНЗОРНАЯ ЛИНЕЙНОСТЬ ДВУМЕРНЫХ ИЗОТРОПНЫХ ФУНКЦИЙ В ПЛОСКОЙ ЗАДАЧЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

 Д. В. Георгиевский[1,2,3,*]

Представлено академиком РАН В.В.Козловым 28.09.2023 г.

Поступило 29.09.2023 г.
После доработки 28.11.2023 г.
Принято к публикации 29.11.2023 г.

Показывается, что нелинейная изотропная тензор-функция второго ранга в двумерном пространстве, являющаяся степенным рядом по своему тензорному аргументу, представима конечным двучленным тензорно линейным соотношением. Приводятся выражения двух коэффициентов этого соотношения через бесконечный набор коэффициентов исходного ряда и два независимые инварианта тензорного аргумента. Применительно к механике сплошной среды устанавливается сводимость определяющих соотношений в плоской задаче тензорно нелинейной теории упругости к тензорно линейной связи соответствующих миноров второго порядка напряжений и деформаций.

Ключевые слова: тензор-функция, изотропия, нелинейность, инвариант, напряжение, деформация, определяющее соотношение, упругость, плоская задача

DOI: 10.31857/S2686740024030072, **EDN:** JZWZCE

1. Рассмотрим в двумерном пространстве нелинейную изотропную тензор-функцию **b(a)**, представленную в виде степенного ряда по своему единственному аргументу

$$\mathbf{b}(\mathbf{x}) = \tilde{A}_0\mathbf{I}^{\{2\}} + \sum_{n=1}^{\infty}\tilde{A}_n\mathbf{a}^n(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in R^2, \qquad (1)$$

где **a(x) и b(x)** — симметричные тензорные поля второго ранга, $\mathbf{I}^{\{2\}}$ — двумерный единичный тензор второго ранга, $\tilde{A}_0, \tilde{A}_1, \ldots$ — скалярные функции двух независимых инвариантов [1] тензора **a**. В их качестве выберем I_{a1} и I_{a2}:

$$I_{an} = \sqrt[n]{\operatorname{tr}\mathbf{a}^n}, \quad n = 1, 2, \ldots \qquad (2)$$

Инварианты I_{an}, $n \geq 3$, алгебраически выражаются через I_{a1} и I_{a2}. Например, для $n = 3, 4$ имеем

$$I_{a3}^3 = \frac{1}{2}I_{a1}(3I_{a2}^2 - I_{a1}^2), \quad I_{a4}^4 = \frac{1}{2}(I_{a2}^4 + 2I_{a1}I_{a2} - I_{a1}^4). \qquad (3)$$

Выражения (3) следуют из формулы Гамильтона–Кели

$$\mathbf{a}^2 = \frac{1}{2}(I_{a2}^2 - I_{a1}^2)\mathbf{I}^{\{2\}} + I_{a1}\mathbf{a}, \qquad (4)$$

записанной для случая двумерного пространства.

Обозначим через $K_{a0}^{(n)}$ и $K_{a1}^{(n)}$ коэффициенты в двучленном разложении

$$\mathbf{a}^n = K_{a0}^{(n)}\mathbf{I}^{\{2\}} + K_{a1}^{(n)}\mathbf{a}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Согласно (4) запишем

$$\mathbf{a}^{n+1} = K_{a0}^{(n)}\mathbf{a} + K_{a1}^{(n)}\left[\frac{1}{2}(I_{a2}^2 - I_{a1}^2)\mathbf{I}^{\{2\}} + I_{a1}\mathbf{a}\right].$$

[1] *Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия*
[2] *Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук, Москва, Россия*
[3] *Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия*
**E-mail: georgiev@mech.math.msu.su*

Это приводит к рекуррентной связи

$$K_{a0}^{(n+1)} = \frac{1}{2}(I_{a2}^2 - I_{a1}^2)K_{a1}^{(n)}, \quad K_{a1}^{(n+1)} = K_{a0}^{(n)} + I_{a1}K_{a1}^{(n)},$$

представимой в матричной форме

$$\begin{pmatrix} K_{a0}^{(n+1)} \\ K_{a1}^{(n+1)} \end{pmatrix} = \mathbf{Q_a} \cdot \begin{pmatrix} K_{a0}^{(n)} \\ K_{a1}^{(n)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q_a} = \begin{pmatrix} 0 & (I_{a2}^2 - I_{a1}^2)/2 \\ 1 & I_{a1} \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Следовательно,

$$\begin{pmatrix} K_{a0}^{(n)} \\ K_{a1}^{(n)} \end{pmatrix} = \mathbf{Q_a}^n \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

т.е. пара коэффициентов $(K_{a0}^{(n)}, K_{a1}^{(n)})$ является первым столбцом матрицы $\mathbf{Q_a}^n$ (5).

Таким образом, степенной тензорный ряд (1) в двумерном пространстве всегда можно представить в виде тензорно линейной связи

$$\mathbf{b} = \tilde{C}_0\mathbf{I}^{\{2\}} + \tilde{C}_1\mathbf{a} \tag{6}$$

с двумя скалярными функциями инвариантов I_{a1} и I_{a2}:

$$\tilde{C}_0 = \sum_{n=0}^{\infty}\tilde{A}_n K_{a0}^{(n)}, \quad \tilde{C}_1 = \sum_{n=1}^{\infty}\tilde{A}_n K_{a1}^{(n)}.$$

2. Пусть ряд (1) обратим:

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \tilde{B}_0\mathbf{I}^{\{2\}} + \sum_{n=1}^{\infty}\tilde{B}_n\mathbf{b}^n(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in R^2, \tag{7}$$

где $\tilde{B}_0, \tilde{B}_1, \ldots$ — скалярные функции инвариантов I_{b1} и I_{b2} тензора $\mathbf{b}$, определенных аналогично (2). Проделывая изложенную ранее процедуру для тензорного ряда (7), получим, что он эквивалентен тензорно линейному соотношению

$$\mathbf{a} = \tilde{D}_0\mathbf{I}^{\{2\}} + \tilde{D}_1\mathbf{b}, \tag{8}$$

где

$$\tilde{D}_0 = \sum_{n=0}^{\infty}\tilde{B}_n K_{b0}^{(n)}, \quad \tilde{D}_1 = \sum_{n=1}^{\infty}\tilde{B}_n K_{b1}^{(n)},$$

$$\begin{pmatrix} K_{b0}^{(n)} \\ K_{b1}^{(n)} \end{pmatrix} = \mathbf{Q_b}^n \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$\mathbf{Q_b} = \begin{pmatrix} 0 & (I_{b2}^2 - I_{b1}^2)/2 \\ 1 & I_{b1} \end{pmatrix}.$$

Пары инвариантов (I_{a1}, I_{a2}) и (I_{b1}, I_{b2}) связаны между собой следующим образом:

$$I_{b1} = 2\tilde{C}_0 + I_{a1}\tilde{C}_1, \quad I_{b2}^2 = 2\tilde{C}_0^2 + 2I_{a1}\tilde{C}_0\tilde{C}_1 + I_{a2}^2\tilde{C}_1^2,$$

а функции $\tilde{C}_0(I_{a1}, I_{a2})$, $\tilde{C}_1(I_{a1}, I_{a2})$ выражаются через $\tilde{D}_0(I_{b1}, I_{b2})$, $\tilde{D}_1(I_{b1}, I_{b2})$:

$$\tilde{D}_0 = -\frac{\tilde{C}_0}{\tilde{C}_1}, \quad \tilde{D}_1 = \frac{1}{\tilde{C}_1}.$$

Тензор-функции (6) и (8) обладают скалярными потенциалами $W(I_{a1}, I_{a2})$ и $w(I_{b1}, I_{b2})$ такими, что

$$\mathbf{b} = \frac{\partial W}{\partial I_{a1}}\frac{\partial I_{a1}}{\partial \mathbf{a}} + \frac{\partial W}{\partial I_{a2}}\frac{\partial I_{a2}}{\partial \mathbf{a}}, \quad \mathbf{a} = \frac{\partial w}{\partial I_{b1}}\frac{\partial I_{b1}}{\partial \mathbf{b}} + \frac{\partial w}{\partial I_{b2}}\frac{\partial I_{b2}}{\partial \mathbf{b}},$$

если выполняются по одному условию потенциальности для каждой из пар $(\tilde{C}_0, \tilde{C}_1)$ и $(\tilde{D}_0, \tilde{D}_1)$:

$$\frac{\partial \tilde{C}_0}{\partial I_{a2}} = I_{a2}\frac{\partial \tilde{C}_1}{\partial I_{a1}}, \quad \frac{\partial \tilde{D}_0}{\partial I_{b2}} = I_{b2}\frac{\partial \tilde{D}_1}{\partial I_{b1}}.$$

3. Рассмотрим теперь нелинейную изотропную тензор-функцию $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon})$ в трехмерном пространстве:

$$\boldsymbol{\sigma}(x) = A_0\mathbf{I}^{\{3\}} + \sum_{n=1}^{\infty}A_n\boldsymbol{\varepsilon}^n(\mathbf{x}) \equiv C_0\mathbf{I}^{\{3\}} + C_1\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) + C_2\boldsymbol{\varepsilon}^2(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in R^3, \tag{9}$$

где $\boldsymbol{\sigma}(x)$ и (x) — симметричные тензорные поля второго ранга, $\mathbf{I}^{\{3\}}$ — трехмерный единичный тензор второго ранга, $C_0, C_1, C_2, A_0, A_1, \ldots$ — скалярные функции трех независимых инвариантов $I_{\varepsilon1}$, $I_{\varepsilon2}$ и $I_{\varepsilon3}$ тензора $\boldsymbol{\varepsilon}$, определенных аналогично (2). Выражения, связывающие тройку функций (C_0, C_1, C_2) с бесконечным набором $A_0, A_1, \ldots$, приведены в [2]. Тензор-функция (9) моделирует определяющие соотношения между напряжениями и деформациями в трехмерной тензорно нелинейной теории упругости при малых деформациях [3–6].

Остановимся подробнее на плоском деформированном состоянии нелинейно упругой среды, когда в R^3 существует такая декартова система координат с ортами $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}_3$, в которой

$$\boldsymbol{\varepsilon} = a_{IJ}\,\mathbf{e}_I \otimes \mathbf{e}_J, \text{ или } \varepsilon_{IJ} = a_{IJ}, \quad \varepsilon_{i3} \equiv 0. \tag{10}$$

Большие латинские индексы здесь и далее пробегают значения 1 и 2, а малые латинские — 1, 2 и 3.

Исходя из формул (3) и (4) для тензоров вида (10) справедливы соотношения

$$I_{\varepsilon 3}^3 = \frac{1}{2} I_{\varepsilon 1}(3I_{\varepsilon 2}^2 - I_{\varepsilon 1}^2), \quad \boldsymbol{\varepsilon}^2 = \frac{1}{2}(I_{\varepsilon 2}^2 - I_{\varepsilon 1}^2)\mathbf{I}^{\{2\}} + I_{\varepsilon 1}\boldsymbol{\varepsilon}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^n = (\mathbf{a}^n)_{IJ}\,\mathbf{e}_I \otimes \mathbf{e}_J. \tag{11}$$

Поскольку инвариант $I_{\varepsilon 3}$ автоматически выражается через $I_{\varepsilon 1}$ и $I_{\varepsilon 2}$, все функции трех инвариантов в (9) становятся функциями только $I_{\varepsilon 1}$ и $I_{\varepsilon 2}$, например,

$$C_0(I_{\varepsilon 1}, I_{\varepsilon 2}, \sqrt[3]{I_{\varepsilon 1}(3I_{\varepsilon 2}^2 - I_{\varepsilon 1}^2)/2}) \equiv C_0'(I_{\varepsilon 1}, I_{\varepsilon 2}). \tag{12}$$

Аналогичные обозначения со штрихом введем и для других функций C_1, C_2, A_0, A_1,....

С учетом (11) и (12) связь $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon})$ (9) переписывается в виде

$$\boldsymbol{\sigma} = C_0'\mathbf{I}^{\{3\}} + \frac{1}{2}C_2'(I_{\varepsilon 2}^2 - I_{\varepsilon 1}^2)\mathbf{I}^{\{2\}} + (C_1' + I_{\varepsilon 1}C_2')\boldsymbol{\varepsilon}. \tag{13}$$

Девиаторы напряжений $\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} - I_{\sigma 1}\mathbf{I}^{\{3\}}/3$ и деформаций $\mathbf{e} = \boldsymbol{\varepsilon} - I_{\varepsilon 1}\mathbf{I}^{\{3\}}/3$ связаны между собой следующим образом:

$$\mathbf{s} = (C_1' + I_{\varepsilon 1}C_2')\mathbf{e} + C_2'(I_{\varepsilon 2}^2 - I_{\varepsilon 1}^2)\left(\frac{1}{2}\mathbf{I}^{\{2\}} - \frac{1}{3}\mathbf{I}^{\{3\}}\right).$$

Видно, что если только C_2' тождественно не равно нулю, девиаторы непропорциональны, что эквивалентно [7, 8] тензорной нелинейности функции (13) в общем случае.

Однако для плоского деформированного состояния (10) напряжения, связанные с деформациями посредством (9), можно представить как

$$\boldsymbol{\sigma} = b_{IJ}\,\mathbf{e}_I \otimes \mathbf{e}_J + A_0'\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3,$$
$$\text{или} \quad \sigma_{IJ} = b_{IJ}, \quad \sigma_{i3} = A_0'\delta_{i3}.$$

При этом компонента $\sigma_{33} = A_0'(I_{\varepsilon 1}, I_{\varepsilon 2})$ выражается через два инварианта I_{b1} и I_{b2} левого верхнего минора $\mathbf{b}$ тензора напряжений. Так, в классической плоской задаче теории упругости при плоской деформации, как известно, $\sigma_{33} = \nu I_{b1}$, где ν — коэффициент Пуассона.

Таким образом, несмотря на тензорную нелинейность общей функции (13) связь миноров $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ представима тензорно линейной функцией (6). Сравнивая соотношения (6) и (13), установим связь пары функций $\tilde{C}_0$, $\tilde{C}_1$ с тройкой C_0', C_1', C_2':

$$\tilde{C}_0 = C_0' + \frac{1}{2}C_2'(I_{\varepsilon 2}^2 - I_{\varepsilon 1}^2), \quad \tilde{C}_1 = C_1' + I_{\varepsilon 1}C_2'.$$

Аналогичные рассуждения и выкладки можно провести для (обобщенного) плоского напряженного состояния и говорить о сводимости плоской задачи тензорно нелинейной теории упругости к тензорно линейной связи соответствующих миноров второго порядка напряжений и деформаций.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа поддержана Российским научным фондом (грант 24-21-20008).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Спенсер Э.* Теория инвариантов. М.: Мир, 1974. 156 с.
2. *Георгиевский Д.В.* Трехчленные представления степенных тензорных рядов в теории определяющих соотношений // Доклады РАН. Физика, технические науки. 2023. Т. 508. С. 27–29.
3. *Ильюшин А.А.* Механика сплошной среды. М.: ЛЕНАНД, 2014. 320 с.
4. *Победря Б.Е.* Лекции по тензорному анализу. М.: Изд-во МГУ, 1986. 264 с.
5. *Димитриенко Ю.И.* Нелинейная механика сплошной среды. М.: Физматлит, 2009. 624 с.
6. *Бровко Г.Л.* Определяющие соотношения механики сплошной среды. М.: Наука, 2017. 432 с.
7. *Георгиевский Д.В.* Тензорно нелинейные эффекты при изотермическом деформировании сплошных сред // Успехи механики. 2002. Т. 1. № 2. С. 150–176.
8. *Георгиевский Д.В.* Порядок малости эффекта Пойнтинга с позиций аппарата тензорно нелинейных функций // Известия РАН. МТТ. 2018. № 4. С. 29–33.

TENSOR LINEARITY OF TWO-DIMENSIONAL ISOTROPIC FUNCTIONS IN THE PLANE PROBLEM OF NONLINEAR THEORY OF ELASTICITY

D. V. Georgievskii[a, b, c]

[a]*Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*
[b]*Ishlinskii Institute for Problems in Mechanics, Moscow, Russia*
[c]*Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, Russia*

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov

It is shown that a nonlinear isotropic tensor function of the second rank in two-dimensional space, which is a power series in its tensor argument, is representable by a finite binomial tensor linear relation. Expressions of two coefficients of this relation are given in terms of an infinite set of coefficients of the original series and two independent invariants of the tensor argument. In relation to continuum mechanics, the reducibility of the constitutive relations in the plane problem of tensor nonlinear elasticity theory to the tensor linear connection of the corresponding second-order minors of stresses and strains is established.

Keywords: tensor function, isotropy, nonlinearity, invariant, stress, strain, constitutive relation, elaticity, plane poroblem