

УДК 629.76.023:533.6.013.42

АЭРОУПРУГАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ТРЕХСЛОЙНОЙ ОБОЛОЧКИ, ПОДКРЕПЛЕННОЙ КОЛЬЦЕВЫМИ РЕБРАМИ И ЦИЛИНДРОМ

© 2024 г. В. Н. Бакулин^{1,*}, А. Я. Недбай²

Представлено академиком РАН А.М. Липановым 25.06.2023 г.

Поступило 25.06.2023 г.

После доработки 28.11.2023 г.

Принято к публикации 29.11.2023 г.

В связи с перспективностью применения трехслойных оболочек в конструкциях современной техники, и в первую очередь в летательных аппаратах, рассматривается методология построения моделей для исследования аэроупругой устойчивости трехслойных оболочек, подкреплённых кольцевыми ребрами и внутренним пустотелым цилиндром. Получены уравнения и рассмотрены основные этапы решения задачи с помощью предложенной совокупности методов. Построены зависимости, с помощью которых исследовано влияние на критическую скорость обтекания потоком толщины свода подкрепляющего цилиндра, числа кольцевых ребер и длины оболочки. Рассмотренная методология позволяет построить модель первого приближения для исследования аэроупругой устойчивости трехслойных подкреплённых оболочек.

Ключевые слова: трехслойная цилиндрическая оболочка, аэроупругая устойчивость, подкрепляющие кольцевые ребра, внутренний пустотелый цилиндр

DOI: 10.31857/S2686740024030068, EDN: KAATVI

Перспективность применения трехслойных оболочек в конструкциях современной техники, и в первую очередь в летательных аппаратах, обусловлена высокими показателями весовой эффективности, изгибной жесткости, тепловой защиты, звукоизоляции, вибропоглощения, а также возможностью регулирования этих и других важных характеристик [1, 2]. У трехслойных оболочек можно расположить между несущими слоями в слое заполнителя различные конструктивные элементы, в том числе подкрепления в виде ребер, и добиться высокого качества внешней и внутренней поверхностей, что очень важно с точки зрения обтекания и актуально для современных высокоскоростных летательных аппаратов и особенно

твердотопливных двигателей [3]. Эффективным является использование высокопрочных термостойких композиционных материалов (КМ) при создании твердотопливных двигателей [4, 5].

Одним из наиболее дорогостоящих и наиболее нагруженных элементов твердотопливного двигателя является корпус. Во время полета помимо аэродинамических и инерционных нагрузок на него действуют осевые силы и изгибающие моменты от соединительных отсеков. Так как одной из основных функций корпуса является предотвращение попадания внутрь внешнего тепла, то его оптимальной конструкцией является трехслойная оболочка.

Наружный слой такой оболочки, часто более прочный, служит для защиты двигателя от внешних механических и частично тепловых факторов. Внутренний слой более толстый, удерживает внутреннее давление при работе двигателя. Заполнитель между слоями обычно имеет низкие коэффициент теплопроводности

¹Институт прикладной механики
Российской академии наук, Москва, Россия

²АО «Корпорация «Московский институт
теплотехники», Москва, Россия

*E-mail: vbak@yandex.ru

и модуль упругости и защищает внутренний слой от воздействия тепла.

Для повышения устойчивости корпуса от действия внешнего давления стенки оболочки усиливают кольцевыми ребрами (шпангоутами).

К настоящему времени имеется ряд работ, посвященных аэроупругой устойчивости (флаттеру) однослойных цилиндрических и подкрепленных оболочек [6–8]. Обзор публикаций [9 и др.] показал, что класс трехслойных оболочек, подкрепленных шпангоутами и внутренним пустотелым цилиндром, оказался практически неизученным. Этот факт оказывает сдерживающее влияние на применение трехслойных оболочек в качестве перспективных элементов конструкций современной техники, и в первую очередь летательных аппаратов. Поэтому разработка методологии построения таких моделей является остроактуальной.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Рассмотрим шарнирно опертую трехслойную цилиндрическую оболочку с несимметричными ортотропными слоями и легким заполнителем, подкрепленную шпангоутами и внутренним пустотелым цилиндром, обтекаемую по внешней поверхности сверхзвуковым потоком газа. Шпангоуты могут быть расположены между несущими слоями в слое заполнителя. Учет в расчетной схеме пустотелого цилиндра в зависимости от толщины свода и модуля упругости материала может как повысить, так и понизить критическую скорость обтекания.

В качестве аэродинамической модели внешнего воздействия на исследуемую конструкцию используется простейшая модель “поршневой” теории, разработанная и впервые опубликованная в статье [10] и широко используемая в работах [11, 12 и др.], в том числе в настоящее время [9 и др.].

Будем считать, что ребра связывают оба несущих слоя в окружном и радиальном направлениях и расположены сравнительно редко. При этом взаимным влиянием тангенциальных контактных усилий и радиальных инерционных сил можно пренебречь. Цилиндр представляется упругим основанием Винклера, коэффициент постели которого определяется из уравнений трехмерной теории упругости.

Инерционные свойства учитываются путем приведения массы цилиндра к массе корпуса [13]. По торцам оболочка нагружена осевыми сжимающими силами.

Введем безразмерную систему цилиндрических координат, в которой за координатную поверхность принята срединная поверхность заполнителя. Тогда уравнения движения оболочки можно представить в виде

$$L_{i1}u_\alpha + L_{i2}v_\alpha + L_{i3}w + L_{i4}u_\beta + L_{i5}v_\beta + (\delta_{i2} + \delta_{i3} + \delta_{i5}) \sum_{j=1}^N [l_{i2}^{(j)}v_{\alpha j} + l_{i3}^{(j)}w_j + l_{i5}^{(j)}v_{\beta j}] \delta(\alpha - \alpha_j) = 0, \quad (1)$$

$$(i = 1, 2, \dots, 5),$$

где L_{ij} , l_{ij} – дифференциальные операторы, имеющие вид

$$L_{11} = B_{11} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + B_{33} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2};$$

$$L_{12} = L_{21} = (B_{12} + B_{33}) \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta};$$

$$L_{13} = L_{31} = B_{12} \frac{\partial}{\partial \alpha};$$

$$L_{14} = L_{41} = B_{11} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + B_{33} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2};$$

$$L_{15} = L_{51} = (\bar{B}_{12} + \bar{B}_{33}) \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta};$$

$$L_{22} = B_{33} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + B_{22} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2};$$

$$L_{23} = L_{32} = B_{22} \frac{\partial}{\partial \beta};$$

$$L_{24} = L_{42} = (\bar{B}_{12} + \bar{B}_{33}) \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta};$$

$$L_{25} = L_{52} = \bar{B}_{33} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \bar{B}_{22} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2};$$

$$L_{33} = \frac{D_{11}}{R^2} \frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} + \frac{2(D_{12} + D_{33})}{R^2} \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + \frac{D_{22}}{R^2} \frac{\partial^4}{\partial \beta^4} -$$

$$- \frac{h_0^2}{h} \left(G_{13} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + G_{23} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) + \varepsilon p_0 M R \frac{\partial}{\partial \alpha} + T_\alpha \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} +$$

$$+ \Pi^2 + B_{22} + \frac{\varepsilon p_0 R^2}{c_0} \frac{\partial}{\partial t} + F_0 R^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2};$$

$$L_{34} = L_{43} = \left(\bar{B}_{12} - 2 \frac{Rh_0}{h} G_{13} \right) \frac{\partial}{\partial \alpha};$$

$$L_{35} = L_{53} = \left(\bar{B}_{22} - 2 \frac{Rh_0}{h} G_{23} \right) \frac{\partial}{\partial \beta};$$

$$L_{44} = B_{11} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + B_{33} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - 4 \frac{R^2}{h} G_{13};$$

$$L_{45} = L_{54} = (B_{12} + B_{33}) \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta};$$

$$L_{55} = B_{33} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + B_{22} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - 4 \frac{R^2}{h} G_{23};$$

$$l_{22}^{(j)} = \frac{E_j F_j}{R} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2};$$

$$l_{23}^{(j)} = l_{32}^{(j)} = \frac{E_j F_j}{R} \frac{\partial}{\partial \beta};$$

$$l_{25}^{(j)} = l_{52}^{(j)} = -2 \frac{\varepsilon_j E_j F_j}{Rh_0} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2};$$

$$l_{33}^{(j)} = \frac{1}{R} \left(E_j F_j - a_j \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) + \rho_j F_j R \frac{\partial^2}{\partial r^2};$$

$$l_{35}^{(j)} = l_{53}^{(j)} = -\frac{2}{Rh_0} (\varepsilon_j E_j F_j + Ra_j) \frac{\partial}{\partial \beta};$$

$$l_{55}^{(j)} = -\frac{4}{Rh_0^2} \left[a_j R^2 - E_j (\varepsilon_j^2 F_j + I_j) \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right];$$

$$F_0 = \rho_1 h_1 + \rho_2 h_2 + h \rho_0 + \rho_3 R (1 - z_0^2) / 6;$$

$$B_{ss} = B_s^B + B_s^H; \quad \bar{B}_{ss} = B_s^B - B_s^H;$$

$$B_{12} = B_1^B v_2^B + B_1^H v_2^H;$$

$$\bar{B}_{12} = B_1^B v_2^B - B_1^H v_2^H;$$

$$B_1^B = E_1^B h_1 / \eta^B; \quad B_2^B = E_2^B h_1 / \eta^B; \quad B_3^B = G_{12}^B h_1;$$

$$D_{12} = D_1^B v_2^B + D_1^H v_2^H; \quad D_1^B = E_1^B h_1^3 / 12 \eta^B;$$

$$D_2^B = E_2^B h_1^3 / 12 \eta^B; \quad D_3^B = G_{12}^B h_1^3 / 6;$$

$$z_0 = R_0 / R; \quad T_\alpha = T / 2\pi R;$$

$$\eta^B = 1 - v_1^B v_2^B; \quad h_0 = h + (h_1 + h_2) / 2;$$

$$2\varepsilon_i = r_i^B + r_i^H; \quad a_i = 5G_i F_i / 6,$$

α, β – безразмерные координаты вдоль образующей и в окружном направлении срединной поверхности заполнителя, принятой за координатную поверхность; $w, u_\alpha, u_\beta, v_\alpha, v_\beta$ –

нормальное и приведенные осевые и тангенциальные перемещения соответственно верхнего и нижнего несущих слоев; R, R_0 – радиусы срединной поверхности заполнителя и канала цилиндра соответственно; h_1, h_2, h – соответственно толщины верхнего, нижнего и среднего слоев; $E_1^B, E_2^B, G_{12}^B, v_1^B, v_2^B$ – соответственно осевой и окружной модули упругости, модуль сдвига и коэффициенты Пуассона верхнего слоя (обозначения для нижнего слоя с индексом “H” имеют аналогичный смысл); G_{13}, G_{23} – модули поперечного сдвига заполнителя; $\rho_1, \rho_2, \rho_0, \rho_3$ – плотности материалов верхнего, нижнего и среднего слоев и материала цилиндра; E_j, G_j, ρ_j – модуль упругости, модуль сдвига и плотность материала j -го ребра; F_j, I_j – площадь и момент инерции ребра; N – количество ребер; Π – коэффициент постели; \varkappa, p_0, c_0 – показатель политропы, давление и скорость звука невозмущенного потока; M – число Маха; T – начальная осевая сила; $\delta(\alpha)$ – дельта-функция; δ_{kj} – символ Кронекера; r_j^B, r_j^H – соответственно расстояния от оси ребра до срединной поверхности верхнего и нижнего слоев, причем эта величина считается положительной, если ось ребра лежит ниже срединной поверхности несущего слоя.

Решение уравнений (1) будем искать в виде

$$\begin{aligned} \{u_\alpha, u_\beta\} &= \cos n\beta \sum_{m=0}^{\infty} \{A_{1m}, A_{4m}\} \cos \gamma_m \alpha e^{\omega t}, \\ \{v_\alpha, v_\beta\} &= \sin n\beta \sum_{m=1}^{\infty} \{A_{2m}, A_{5m}\} \sin \gamma_m \alpha e^{\omega t}, \end{aligned} \quad (2)$$

$$w = \cos n\beta \sum_{m=1}^{\infty} A_{3m} \sin \gamma_m \alpha e^{\omega t},$$

где $\gamma_m = m\pi/\alpha_0$; $\alpha_0 = L/R$; L – длина оболочки; ω – комплексная частота; A_{1m}, \dots, A_{5m} – постоянные коэффициенты; m – количество полуволн в осевом направлении; n – количество волн в окружном направлении.

Раскладывая дельта-функцию в тригонометрический ряд, подставим (2) в (1) и, используя метод Бубнова–Галёркина, получим бесконечную систему алгебраических уравнений относительно постоянной A_{3m} :

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left[\delta_{km} (\xi_{1k} - \lambda) + \sum_{j=1}^N H_{km}^{(j)} + b_1 Q_{km} \right] A_{3m} = 0 \quad (3)$$

$$(k = 1, 2, 3, \dots),$$

где

$$\xi_{1k} = \Delta_k / D_{33}^{(k)};$$

$$\xi_{2k} = D_{23}^{(k)} / D_{33}^{(k)};$$

$$\xi_{3k} = D_{53}^{(k)} / D_{33}^{(k)};$$

$$H_{km}^{(j)} = \frac{2}{R\alpha_0} \left\{ E_j F_j \left[1 + n \left(\frac{2\xi_{3k} \varepsilon_j}{h_0} - \xi_{2k} \right) \right] + \right.$$

$$\left. + a_j n \left(n + 2\xi_{3k} \frac{R}{h_0} \right) \right\} \sin \gamma_k \alpha_j \sin \gamma_m \alpha_j;$$

$$-\lambda = b_2 \omega^2 + b_3 \omega;$$

$$b_1 = \kappa p_0 R M; \quad b_2 = F_0 R^2 + \frac{2R}{\alpha_0} \sum_{j=1}^N F_j \rho_j \sin^2 \frac{\pi \alpha_j}{\alpha_0};$$

$$b_3 = \kappa p_0 R^2 / c_0;$$

$$Q_{km} = \begin{cases} \frac{4}{\alpha_0} \frac{mk}{k^2 - m^2}, & (k \pm m) - \text{нечетное число,} \\ 0, & (k \pm m) - \text{четное число,} \end{cases}$$

$D_{23}^{(k)}, D_{33}^{(k)}, D_{53}^{(k)}, \Delta_k$ – алгебраические дополнения и определитель матрицы, элементы которой имеют вид

$$a_{11} = -B_{11} \gamma_k^2 - B_{33} n^2; \quad a_{12} = a_{21} = (B_{12} + B_{33}) \gamma_k n;$$

$$a_{13} = -a_{31} = B_{12} \gamma_k;$$

$$a_{14} = a_{41} = -\bar{B}_{11} \gamma_k^2 - \bar{B}_{33} n^2;$$

$$a_{15} = a_{51} = (\bar{B}_{12} + \bar{B}_{33}) \gamma_k n;$$

$$a_{22} = -B_{33} \gamma_k^2 - B_{22} n^2 - \frac{2n^2}{R\alpha_0} \sum_{j=1}^N E_j F_j \sin^2 \gamma_k \alpha_j;$$

$$a_{23} = -B_{22} n; \quad a_{24} = a_{42} = (\bar{B}_{12} + \bar{B}_{33}) \gamma_k n;$$

$$a_{25} = a_{52} = -\bar{B}_{33} \gamma_k^2 - \bar{B}_{22} n^2 +$$

$$+ \frac{4n^2}{Rh_0 \alpha_0} \sum_{j=1}^N \varepsilon_j E_j F_j \sin^2 \gamma_k \alpha_j;$$

$$a_{32} = B_{22} n + \frac{2n}{R\alpha_0} \sum_{j=1}^N E_j F_j \sin^2 \gamma_k \alpha_j;$$

$$a_{33} = \frac{D_{11}}{R^2} \gamma_k^4 + \frac{2(D_{12} + D_{33})}{R^2} \gamma_k^2 n^2 +$$

$$+ \frac{D_{22}}{R^2} n^4 + \frac{h_0^2}{h} (G_{13} \gamma_k^2 + G_{33} n^2) -$$

$$- T_\alpha \gamma_k^2 + B_{22} + R^2 \Pi;$$

$$a_{34} = -a_{43} = -\left(\bar{B}_{12} - \frac{2Rh_0}{h} G_{13} \right) \gamma_k;$$

$$a_{35} = \left(\bar{B}_{22} - \frac{2Rh_0}{h} G_{23} \right) n -$$

$$- \frac{4n}{Rh_0 \alpha_0} \sum_{j=1}^N (\varepsilon_j E_j F_j + R a_j) \sin^2 \gamma_k \alpha_j;$$

$$a_{44} = -B_{11} \gamma_k^2 - B_{33} n^2 - \frac{4R^2}{h} G_{13};$$

$$a_{45} = a_{54} = (B_{12} + B_{33}) \gamma_k n;$$

$$a_{53} = -\left(\bar{B}_{22} - \frac{2Rh_0}{h} G_{23} \right) n;$$

$$a_{55} = -B_{33} \gamma_k^2 - B_{22} n^2 - \frac{4R^2}{h} G_{23} -$$

$$- \frac{8}{Rh_0^2 \alpha_0} \sum_{j=1}^N \left[a_j R^2 + E_j (\varepsilon_j^2 F_j + I_j) n^2 \right] \sin^2 \gamma_k \alpha_j.$$

Коэффициент постели Π будет иметь вид

$$\Pi = \frac{2\mu}{R} \frac{\Delta}{\Psi}; \quad \Psi = \sum_{j=1}^6 \Phi_j D_{6j}; \quad \xi = \gamma_k; \quad x = z_0 \gamma_k;$$

$$\Phi_1 = -\frac{n^2}{\xi} I_n(\xi); \quad \Phi_3 = -\frac{(\lambda + \mu)}{2(\lambda + 2\mu)} \xi \left(\frac{n^2}{\xi^2} + 1 \right) I_n(\xi);$$

$$\Phi_5 = -I'_n(\xi);$$

D_{6j}, Δ – соответственно дополнение и определитель матрицы, элементы которой имеют вид

$$C_{11} = \frac{n^2}{x} I_n(x);$$

$$C_{13} = -I'_n(x) - \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \left(\frac{n^2}{x^2} + 1 \right) x I_n(x);$$

$$C_{15} = 2I'_n(x);$$

$$C_{21} = \left(\frac{n^2}{x^2} + \frac{1}{2} \right) I_n(x) - \frac{1}{x} I'_n(x);$$

$$C_{23} = \frac{\lambda + \mu}{2(\lambda + 2\mu)} \left[\frac{1}{x} I'_n(x) - \left(\frac{n^2}{x^2} + 1 \right) I_n(x) \right];$$

$$C_{25} = \frac{1}{x} \left[I'_n(x) - \frac{1}{x} I_n(x) \right];$$

$$C_{31} = \frac{n^2}{x} \left[\frac{1}{x} I_n(x) - I'_n(x) \right];$$

$$C_{33} = \frac{\lambda + \mu}{2(\lambda + 2\mu)} \left[\left(\frac{n^2}{x^2} + 1 \right) x I'_n(x) - \left(\frac{n^2}{x^2} - \frac{\mu}{\lambda + \mu} \right) I_n(x) \right];$$

$$C_{35} = \frac{1}{x} I'_n(x) - \left(\frac{n^2}{x^2} + 1 \right) I_n(x); \quad C_{41} = \frac{n^2}{\xi} I_n(\xi);$$

$$C_{43} = -I'_n(\xi) - \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \left(\frac{n^2}{x^2} + 1 \right) \xi I_n(\xi);$$

$$C_{45} = 2I'_n(\xi);$$

$$C_{51} = \left(\frac{n^2}{\xi^2} + \frac{1}{2} \right) I_n(\xi) - \frac{1}{\xi} I'_n(\xi);$$

$$C_{53} = \frac{\lambda + \mu}{2(\lambda + 2\mu)} \left[\frac{1}{\xi} I'_n(\xi) - \left(\frac{n^2}{\xi^2} + 1 \right) I_n(\xi) \right];$$

$$C_{55} = \frac{1}{\xi} \left[I'_n(\xi) - \frac{1}{\xi} I_n(\xi) \right];$$

$$C_{61} = n^2 \left[\frac{1}{\xi} I_n(\xi) - I'_n(\xi) \right];$$

$$C_{63} = \frac{\lambda + \mu}{2(\lambda + 2\mu)} \xi \left[\left(\frac{n^2}{\xi^2} + 1 \right) \xi I'_n(\xi) - \left(\frac{n^2}{\xi^2} - \frac{\mu}{\lambda + \mu} \right) I_n(\xi) \right];$$

$$C_{65} = \xi \left[\frac{1}{\xi} I'_n(\xi) - \left(\frac{n^2}{\xi^2} + 1 \right) I_n(\xi) \right];$$

$$\mu = \frac{E_3}{2(1 + \nu_3)}; \quad \lambda = \frac{E_3 \nu_3}{(1 + \nu_3)(1 - 2\nu_3)},$$

где E_3, ν_3 – модуль упругости и коэффициент Пуассона материала цилиндра; штрихом обозначена производная по соответствующему аргументу.

Для получения четных столбцов матрицы C_{ij} и Φ_j необходимо в предыдущих элементах заменить функцию $I_n(x)$ на модифицированную функцию Бесселя $K_n(x)$ с тем же аргументом.

Редуцируя систему уравнений (3) с помощью метода Данилевского [14], приведем исходную

матрицу к матрице Фробениуса. В результате получим характеристическое уравнение в следующем виде:

$$\lambda^q - A_{q-1}\lambda^{q-1} + A_{q-2}\lambda^{q-2} - \dots - A_1\lambda + A_0 = 0, \quad (4)$$

где A_q – известные вещественные коэффициенты.

Полагая $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$ в виде комплексного числа и отделяя в (4) действительную часть комплексных собственных значений от мнимой, получим систему уравнений относительно λ_1 и λ_2 . Понижая порядок уравнения для λ_1 с помощью алгебраических операций и используя уравнение параболы устойчивости [12]

$$\theta\lambda_1 = \lambda_2^2, \quad \theta = b_3^2/b_2,$$

получим систему двух уравнений. Для $n = 8$ она имеет вид

$$C_0\lambda_1^7 + C_1\lambda_1^6 + C_2\lambda_1^5 + C_3\lambda_1^4 + C_4\lambda_1^3 + C_5\lambda_1^2 + C_6\lambda_1 + C_7 = 0, \quad (5)$$

$$S_0\lambda_1^7 + S_1\lambda_1^6 + S_2\lambda_1^5 + S_3\lambda_1^4 + S_4\lambda_1^3 + S_5\lambda_1^2 + S_6\lambda_1 + S_7 = 0,$$

где $C_0 = 8; C_1 = 7A_7 - 56\theta; C_2 = 6A_6 - 35A_7\theta + 56\theta^2;$

$$C_3 = 5A_5 - 20A_6\theta + 21A_7\theta^2 - 8\theta^3;$$

$$C_4 = 4A_4 - 10A_5\theta + 6A_6\theta^2 - A_7\theta^3;$$

$$C_5 = 3A_3 - 4A_4\theta + A_5\theta^2; \quad C_6 = 2A_2 - A_3\theta; \quad C_7 = A_1;$$

$$S_0 = A_7 - 168\theta;$$

$$S_1 = 2A_6 - 133A_7\theta + 504\theta^2;$$

$$S_2 = 3A_5 - 100A_6\theta + 259A_7\theta^2 - 216\theta^3;$$

$$S_3 = 4A_4 - 70A_5\theta + 114A_6\theta^2 - 55A_7\theta^3 + 8\theta^4;$$

$$S_4 = 5A_3 - 44A_4\theta + 39A_5\theta^2 - 8A_6\theta^3;$$

$$S_5 = 6A_2 - 23A_3\theta + 8A_4\theta^2;$$

$$S_6 = 7A_1 - 8A_3\theta; \quad S_7 = 8A_0.$$

Используя критерий Рауса–Гурвица [15], приравняем нулю результат уравнений (5)

$$\begin{vmatrix} C_0 & C_1 & C_2 & C_3 & C_4 & C_5 & C_6 & C_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_0 & C_1 & C_2 & C_3 & C_4 & C_5 & C_6 & C_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_0 & C_1 & C_2 & C_3 & C_4 & C_5 & C_6 & C_7 \\ S_0 & S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & S_5 & S_6 & S_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_0 & S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & S_5 & S_6 & S_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_0 & S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & S_5 & S_6 & S_7 \end{vmatrix} = 0. \quad (6)$$

Выражение (6) позволяет определить критическую скорость потока в зависимости от конструктивных параметров оболочки.

ПРИМЕР

Рассмотрим трехслойную оболочку, подкрепленную одинаковыми прямоугольными шпангоутами и пустотелым цилиндром, имеющую параметры:

$$L/R = 9; \quad h_1/R = 0.002; \quad h_2/R = 0.006; \\ h/R = 0.01;$$

$$(E_1^B, E_1^H)/E_3 = 3000; \quad (E_2^B, E_2^H)/E_3 = 4800;$$

$$E/E_3 = 4800;$$

$$(G_{12}^B, G_{12}^H)/E_3 = 480; \quad G/E_3 = 480;$$

$$G_{i3} = (G_{13}, G_{23})/E_3 = 7;$$

$$v_1^B = v_1^H = 0.15; \quad v_2^B = v_2^H = 0.24; \quad v_3 = 0.49;$$

$$(\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho)/\rho_0 = 5;$$

$$F/R^2 = 2 \cdot 10^{-4}; \quad I/FR^2 = 8 \cdot 10^{-6}; \quad z_0 = 0.5;$$

$$\kappa = 1.4; \quad \rho_0/E_3 = 10^{-2}; \quad c_0^2 \rho_0/E_3 = 0.36;$$

$$T_\alpha/(RE_3) = 0.1.$$

На рис. 1 представлены зависимости критической скорости обтекания потоком в числах Маха от безразмерной толщины свода цилиндра $\bar{z} = 10(1 - z_0)$ при однореберном и

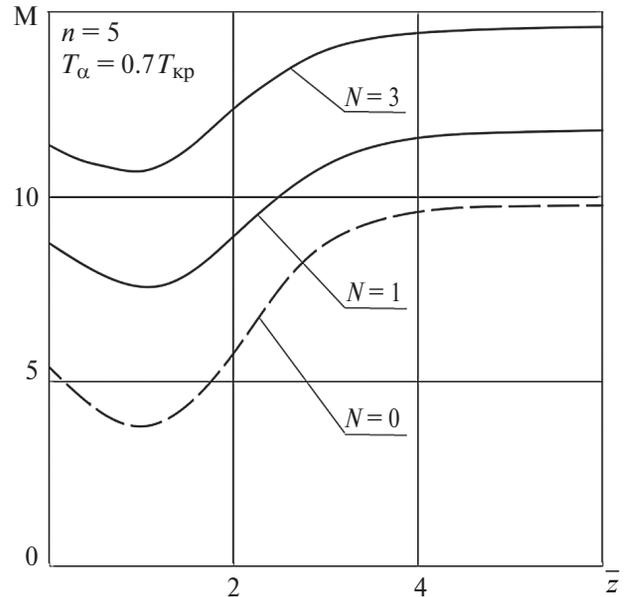


Рис. 1. Зависимость критического числа Маха (М) от толщины свода цилиндра (\bar{z}).

трехреберном подкреплении, где N – число шпангоутов. Для сравнения штриховой линией представлена зависимость критической скорости оболочки при отсутствии шпангоутов. Оболочки нагружены осевой сжимающей силой, величина которой составляет 70% от критической ($T_{кр}$ – критическая сила потери устойчивости неподкрепленной оболочки).

На рис. 2 показаны зависимости критической скорости обтекания от длины оболочки, подкрепленной шпангоутами и цилиндром и нагруженной осевой сжимающей силой. Для сравнения штриховой линией представлена аналогичная зависимость для оболочки с удвоенной толщиной ребер.

Из проведенного анализа полученных результатов расчетов следует, что:

при толщине свода цилиндра, равной $\bar{z} = 1.0$, оболочки имеют самую низкую критическую скорость;

увеличение толщины свода цилиндра $\bar{z} > 5.0$ не приводит к увеличению критической скорости обтекания;

наличие цилиндра увеличивает критическую скорость на 4М;

наличие одного шпангоута увеличивает критическую скорость на $\approx 2М$, а наличие трех шпангоутов увеличивает скорость на $\approx 4М$;

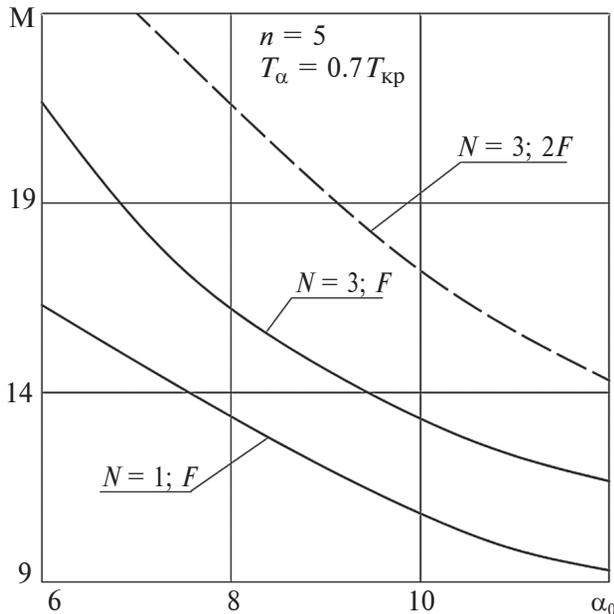


Рис. 2. Зависимость критического числа Маха от длины оболочки.

увеличение длины оболочки в 2 раза снижает критическую скорость в ≈ 1.8 раза;

увеличение площади шпангоутов в 2 раза увеличивает критическую скорость на $\approx 4M$ во всем диапазоне изменения длины оболочки.

Разработанная методология расчета позволяет на этапе проектирования трехслойных корпусов летательных аппаратов определить влияние параметров конструкции на величину критической скорости полета, при которой возникает панельный флаттер, и принять меры по его устранению.

ВЫВОДЫ

Представлена математическая модель по исследованию аэроупругой устойчивости перспективных для применения в конструкциях современной техники, и в первую очередь в летательных аппаратах, трехслойных оболочек, подкрепленных шпангоутами и внутренним пустотелым цилиндром. Приведены уравнения и рассмотрены основные этапы решения задачи с помощью представленной комбинации методов. С помощью построенных зависимостей исследовано влияние безразмерной толщины свода цилиндра, числа шпангоутов и длины оболочки на критическую скорость обтекания потоком, при которой возникает панельный

флаттер. Разработанная математическая модель позволяет провести исследования одновременного влияния шпангоутов и внутреннего цилиндра на аэроупругую устойчивость трехслойных цилиндрических оболочек.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена в рамках государственного задания Института прикладной механики РАН.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bakulin V.N.* Layer-by-Layer Study of the Stress and Strain State of Sandwich Conical Aircraft Compartments with Rectangular Cutouts // *Russian Aeronautics*. 2022. V. 65. No. 4. P. 668–676.
2. *Паймушин В.Н.* Теория среднего изгиба подкрепленных на контуре трехслойных оболочек с трансверсально-мягким наполнителем // *Механика композитных материалов*. 2017. Т. 53. № 1. С. 3–26.
3. *Бакулин В.Н.* Трехмерная оболочечная модель для послойного исследования напряженно-деформированного состояния трехслойных нерегулярных конических оболочек // *Доклады РАН. Физика, технические науки*. 2023. Т. 512. № 1. С. 51–57.
4. *Бакулин В.Н.* Влияние размеров прямоугольных в плане вырезов и модуля упругости подкрепляющих закладных элементов на напряженно-деформированное состояние трехслойных отсеков // *Известия вузов. Авиационная техника*. 2023. № 2. С. 11–21.
5. *Бакулин В.Н.* Блочная конечно-элементная модель для послойного анализа напряженно-деформированного состояния трехслойных оболочек с нерегулярной структурой // *Изв. РАН. МГТ*. 2018. № 4. С. 66–73.
6. *Корбут Б.А., Нагорный Ю.И.* Об устойчивости в потоке газа цилиндрической оболочки, содержащей упругий наполнитель // *Динамика и прочность машин. Респ. межвед. темат. научн.-техн. сб.*, 1972. Вып. 15. С. 70–75.
7. *Bakulin V.N., Konopel'chev M.A. and Nedbai A.Ya.* Panel flutter of a variable-thickness composite shell // *Mechanics of Composite Materials*. 2020. V. 56. No. 5 P. 1–14.
8. *Bakulin V.N., Konopelchev M.A. and Nedbai A.Ya.* Flutter of a Laminated Cantilever Cylindrical Shell with a Ring-Stiffened Edge // *Russian Aeronautics*. 2018. V. 61. № 4. P. 517–523.
9. *Алтазин С.Д., Куйко И.А.* Флаттер пластин и оболочек. М.: Наука, 2006. 247 с.

10. *Ильюшин А.А.* Закон плоских сечений в аэродинамике больших скоростей // ПММ. 1956. Т. 20. № 6. С. 733–755.
11. *Болотин В.В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматлит, 1961. 339 с.
12. *Огибалов П.М., Колтунов М.А.* Оболочки и пластины. М.: Изд-во МГУ, 1971.
13. *Тимошенко С.П.* Колебания в инженерном деле. М.: Наука, 1967.
14. *Демидович Б.П., Марон И.А.* Основы вычислительной математики. М.: Наука, 1966.
15. *Четаев Н.Г.* Устойчивость движения. М.: Физматлит, 1965. 208 с.

AEROELASTIC STABILITY OF A SANDWICH SHELL SUPPORTED BY ANNULAR RIBS AND A CYLINDER

V. N. Bakulin^a, A. Ya. Nedbai^b

^a*Institute of Applied Mechanics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

^b*Corporation "Moscow Institute of Thermal Engineering", Moscow, Russia*

Presented by Academician of the RAS A.M. Lipanov

In connection with the promising use of sandwich shells in the designs of modern technology and primarily in aircraft, the methodology of building models for studying the aeroelastic stability of sandwich shells reinforced with annular ribs and an internal hollow cylinder is considered. Equations are obtained and the main stages of solving the problem using the proposed set of methods are considered. Dependencies were constructed with the help of which the influence of the thickness of the reinforcing cylinder, the number of annular ribs and the length of the shell on the critical speed of flow was studied. The considered methodology makes it possible to construct an initial approximation model for studying the aeroelastic stability of reinforced sandwich shells.

Keywords: cylindrical sandwich shell, aeroelastic stability, reinforcing annular ribs, internal hollow cylinder