ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. ФИЗИКА, ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ, 2024, том 515, с. 43–50

МЕХАНИКА

УДК 532.517.45

ОБОБЩЕННЫЙ ПРИНЦИП БРЕНЬЕ И ПРОБЛЕМА ЗАМЫКАНИЯ ИЕРАРХИИ ЛАНДГРЕНА–МОНИНА–НОВИКОВА ДЛЯ ПОЛЯ ВИХРЯ

В. Н. Гребенёв[1,*], А. Н. Гришков[2,]**

Представлено академиком РАН М.П. Федоруком 28.11.2023 г.

Поступило 28.11.2023 г.
После доработки 28.11.2023 г.
Принято к публикации 12.02.2024 г.

Концепция Бренье – представление решения уравнений идеальной несжимаемой гидродинамики в терминах вероятностных мер на множестве лагранжевых траекторий в случае их стохастичности, является обобщением принципа наименьшего действия Арнольда построения гладких решений уравнений Эйлера. В настоящей работе вариационный обобщенный принцип Бренье применяется для замыкания бесконечной цепочки уравнений Ландгрена–Монина–Новикова на n-точечные функции плотности распределения вероятности f_n поля вихря двумерных турбулентных потоков. Кроме того, в рамках статистического подхода предложена аппроксимация вариационной задачи с условиями на концах, поставленная Шнирельманом для уравнения Эйлера.

Ключевые слова: обобщенный принцип Бернье, двумерная турбулентность, уравнения Ландгрена–Монина–Новикова, проблема замыкания

DOI: 10.31857/S2686740024020073, **EDN:** KHFELU

Уравнение Навье–Стокса является нелинейным и нелокальным. Как следствие, статистические зависимости, выведенные из этого уравнения, являются незамкнутыми, и статистическое описание приводит к бесконечной цепочке уравнений для многоточечных функций плотности распределения вероятности (ФПРВ). Приведем коротко обзор методов замыкания для иерархии Ландгрена–Монина–Новикова (ЛМН) для поля вихря (скорости), который не претендует на полноту, но представляет основные подходы. Распределения вероятностей поля вихря (скорости) или многоточечные эйлеровы функции плотности распределения вероятности (ФПРВ) [1] $f_n^E(x_{(1)},\omega_{(1)},\ldots,x_{(n)},\omega_{(n)},t)$, $n=1,\ldots,\infty$ (где $\omega_{(i)}$ – значение компоненты завихренности $\Omega(x_{(i)},t)\equiv\Omega_{(i)}$ в точке $x_{(i)}$ в момент времени t) удовлетворяют иерархии ЛМН [2–4]. ФПРВ рассматриваются как в эйлеровом, так и в лагранжевом описании турбулентности. Кроме возможности формулировать аналитически реализуемые замыкания бесконечной цепочки ЛМН уравнений

$$\frac{\partial f_n}{\partial t} = L_n f_n + L_{n,n+1} f_{n+1}, \qquad n=1,\ldots,\infty, \qquad (1)$$

где n, $(n+1)$-точечные ФПРВ f_n, f_{n+1} связаны посредством нелокальных операторов L_n и $L_{n,n+1}$, которые будут представлены ниже, иерархия ЛМН допускает применение прямого численного моделирования. Это направление, сочетающее аналитические замыкания и численные исследования, было инициировано в [4] с использованием условной вероятности распределения поля завихренности, т.е. $p_{n,n+1}=f_{n+1}/f_n$. Прямое численное моделирование позволило проверить условные ФПРВ для малых n и показать, что ЛМН-иерархия несовместима с представлением ФПРВ гауссовым случайным полем, что совпадает с выводом [4] для двухточечных

[1]Федеральный исследовательский центр информационных и вычислительных технологий, Новосибирск, Россия
[2]Институт математики и статистики, Университет Сан-Паулу, Сан-Паулу, Бразилия
*E-mail: vngrebenev@gmail.com
**E-mail: grishkov@ime.usp.br

распределений и является тестом для верификации замыкания. Свойства ФПРВ поля завихренности в обратном каскаде проанализированы в [1] на основе двухточечной статистики, где замыкание иерархии ЛМН специфицируется заданием условной вероятности распределения поля завихренности. Уравнения характеристик ЛМН использовались для описания динамики “квази-вихрей” в смысле “квази-частиц” Ландау. Введение условного усреднения для одноточечных статистик в кинетическое уравнение было проведено в [5]. Показана возможность учитывать небольшие отклонения от сильной негауссовости ФПРВ завихренности до более выраженных статистических корреляций. Замыкание иерархии ЛМН для поля скорости выполнено посредством введения условных ФПРВ для градиента давления и диссипации для однородной изотропной турбулентности (см. обзор в [1]). Статистические симметрии ЛМН-иерархии использовались для проведения сравнения с результатами прямого численного моделирования условных усреднений. Наблюдаемые отклонения от гауссовости одноточечных ФПРВ для поля скорости являются результатом довольно сложного взаимодействия статистических корреляций. ФПРВ поля скорости также может быть связана с ФПРВ для инкремента скорости. Показано (см. обзор в [6]), что в определенном диапазоне масштабов r турбулентного потока инкремент является марковским случайным процессом и уравнения для ФПРВ замыкаются с использованием трехточечной статистики. Эволюция для условной n-точечной ФПРВ на масштабах r определяется уравнением Фоккера–Планка. Таким образом, для определенного диапазона масштабов бесконечная система кинетических уравнений для ФПРВ может быть замкнута и преобразована в трехмасштабную (или четырехточечную) модель. В отличие от “правила слияния” (fusion rule), которое использовалось (см. обзор в [6]) с целью замыкания иерархии ФПРВ на этапе двухточечных статистик, предложенное марковское замыкание действует на следующем уровне иерархии ФПРВ как трехточечное замыкание. Установлено (см. обзор [6]), что уравнения Фоккера–Планка инвариантны относительно дополнительных статистических симметрий [7], которые необходимо использовать для правильного представления статистики скорости в случаях неоднородного потока при построении замыканий. Существует класс моделей двухточечных корреляций, основанных на преобразовании Фурье кинетического уравнения. Двухточечные модели используются в качестве замыкания подсеточных членов в LES-методах (см., например, [1]), где подсеточная вязкость выражается как функция спектра энергии. Существует также класс замыканий, основанный как на методах возмущения уравнения Навье–Стокса (квазинормальное приближение, приближение прямого взаимодействия, диаграммы Уайлда), так и на методах квантовой теории поля (ренормгруппа, правила слияния, инстантоны). Как отмечено в [6], предложенные замыкания не воспроизводят явления перемежаемости поля скоростей ввиду сильной нелинейности уравнений гидродинамики. Таким образом, методы замыкания статистических зависимостей в турбулентности требуют дальнейшего развития.

Цель сообщения – применить вариационный принцип Бренье [8] для замыкания иерархии ЛМН на n-точечные ФПРВ поля вихря. т.е. эйлерову ФПРВ f_n^E. Вариационный принцип Бренье (ВПБ) является обобщением принципа наименьшего действия Арнольда построения гладких решений уравнений Эйлера. ВПБ описывает решения уравнений Эйлера в терминах вероятностных мер (обобщенных потоков) на множестве лагранжевых траекторий. Понятие обобщенных потоков является естественным для описания лагранжевых траекторий гидродинамической турбулентности в терминах случайных процессов. Будет дана интерпретация обобщенного потока в рамках статистического описания гидродинамической турбулентности. В качестве основной величины движения берется случайное поле завихренности и эволюция f_n^E определяется иерархией ЛМН в эйлеровой формулировке [1], которая выводится из статистической формы уравнений Эйлера с использованием закона Био–Савара. Переход к лагранжевой формулировке осуществляется эквивалентной записью ЛМН-иерархии в виде уравнений вдоль характеристик (лагранжевы траектории) ЛМН-иерархии. Статистическая форма ВПБ выводится с использованием уравнений характеристик, и минимизация функционала выполняется по вариационной переменной f_{n+1}^E. При этом, согласно ВПБ, два краевых

условия, начальное и конечное распределение ФПРВ f_{n+1}^E вдоль характеристик должны быть заданы. Как результат, f_{n+1}^E, определенная из вариационного принципа (оптимальный статистический ансамбль реализаций), позволяет замкнуть f_n^E-уравнение ЛМН-иерархии. При этом статистическая форма ВПБ совпадает с вариационным принципом Арнольда (ВПА) (рассматривая формально предел при $n \to \infty$) для краевой задачи о геодезической, соединяющей две заданные конфигурации жидкости. Постановка такой задачи впервые предложена в [9] и изучена с привлечением дискретного аналога группы диффеоморфизмов для идеальной несжимаемой жидкости, которая не является классической в гидродинамике. Для двумерного случая неизвестно [9], существует ли всегда решение вариационной задачи с условиями на концах. В настоящей работе предложена другая аппроксимация этой задачи, основанная на статистической версии уравнения Эйлера, т.е. ЛМН-иерархии, которая более ориентирована на численные эксперименты, что представляет отдельную тему исследования.

1. ОБОБЩЕННЫЙ ПРИНЦИП БРЕНЬЕ

Следуя [10], приведем основные сведения о вариационном принципе Бренье. Согласно ВПА [11], движение идеальной жидкости реализуется как экстремаль функционала – интегрированная по времени $t \in [0, T]$ кинетическая энергия частиц жидкости для $T << 1$. Хорошо известно [10], что для воспроизведения характерных особенностей турбулентных потоков ВПА необходимо ослабить. Один из подходов – ВПБ, который формулируется как нахождение экстремали функционала Бренье [8]

$$B[\mu] = \int \mu[D\gamma] S[\gamma] \to \inf,$$
$$\mu\,|_{t=0} = \mu_0, \quad \mu\,|_{t=T} = \mu_T, \tag{2}$$

где $\mu[D\gamma]$ – равномерные по t вероятностные меры (обобщенные потоки) на лагранжевых случайных траекториях $t \mapsto \gamma(a,t)$ потока $(a,t) \mapsto \gamma(a,t)$ с начальным условием $\gamma(a,0) = a$ и краевыми условиями

$$\mu[D\gamma](t=0) = \mu_0, \quad \mu[D\gamma](t=T) = \mu_T, \tag{3}$$

которые представляют распределения вероятности траектории пройти через заданные точки в моменты времени $t = 0$, $t = T$, $D\gamma$ – вектор, дуальный касательному вектору γ_t. Вариационный функционал определяется как

$$S[\gamma] = \frac{1}{2}\int_0^T \int_D |\,\gamma_t(a,t)\,|^2 \, \mathrm{d}a dt, \tag{4}$$

где $|\,\gamma_t(a,t)\,|^2$ – квадрат римановой длины касательных векторов, $S[\gamma]$ – случайная величина, $\mu[D\gamma]$ – вероятность для траектории $\gamma(a,t)$ пройти через заданные точки, когда t меняется от 0 до T. Доказаны следующие свойства задачи (2), (3) [8]: а) решение задачи существует в смысле обобщенного потока; б) обобщенный вариационный принцип реализует (классические) решения уравнения Эйлера при условии, что $T = 1$, при этом $\mu_T = \delta(x - y(a,T)da$, где $(a,t) \mapsto y\,(a,t)$ – лагранжевый поток движения идеальной жидкости и $y(a,T)$ – положение в момент времени $t = T$, мера $\mu[Dy]$ сингулярна на лагранжевых траекториях; в) при $t > T$ стохастические движения идеальной жидкости определяются вероятностной мерой (обобщенный поток) $\mu[D\gamma]$.

ВПБ – задача линейной оптимизации, в которой как целевая функция, т.е. $\mu[D\gamma]$, так и ограничения (3) линейно зависят от аргументов, которые необходимо минимизировать. В дискретной постановке задача оптимизации состоит в минимизации усредненного линейного функционала энергии [10]

$$\mu \mapsto \Sigma_{i_n} \mu(i_n) E_d(i_n), \tag{5}$$

где последовательность индексов $\{i_n\}_{n=1,\ldots,N_t}$ – дискретные лагранжевы траектории, $i=(i_1,...,i_d) \in [1, N_x]^d$, N_t – шаг по времени; $D = \cup_x N_x^d$ – разбиение на равные объемы N_x^d, $d = \dim D$, $E_d(i_n)$ – энергия дискретных лагранжевых траекторий i_n. Обобщенные потоки – конечномерные тензоры, представленные $(N_x^d)^{N_t}$ значениями дискретной меры $\mu\{i_n\} = \mu(i_1,\ldots,i_{N_t})$. Краевые условия (3) – матрицы с предписанными вероятностями лагранжевых траекторий начального и конечного положения в триангуляции D. Эффективные алгоритмы, численная реализация задачи (5), (3) и обсуждение применения к турбулентным потокам приведены в [10]. Дискретные течения, для которых определены аналоги вариационного функционала – группа перестановок N_x^d, которая впервые введена в [9] для аппроксимации лагранжева потока и рассматривалась как модель основной группы диффеоморфизмов идеальной несжимаемой жидкости. Эта конструкция позже применялась в [8, 10].

2. ЗАМЫКАНИЕ ИЕРАРХИИ ЛАНДГРЕНА–МОНИНА–НОВИКОВА НА ОСНОВЕ ВАРИАЦИОННОГО ПРИНЦИПА БРЕНЬЕ

Формулируется вариационный принцип Бренье в терминах оптимального статистического ансамбля. Конкретно, уравнение (1) специфицируется как f_n^E-уравнение иерархии ЛМН для поля вихря. Далее, следуя [1], уравнение переписывается в лагранжевой формулировке, движение n частиц определяется уравнениями характеристик. Для вычисления длины касательного вектора характеристики вводится риманова метрика, которая определяется условием инвариантности элемента длины относительно группы преобразований симметрии f_n^E-уравнения [12, 13].

2.1. ЛМН-иерархия статистического описания поля вихря

Используются следующие обозначения:

$$f_n^E(x_{(1)},\omega_{(1)},\ldots,x_{(n)},\omega_{(n)};t) = = \left\langle \prod\nolimits_{i=1}^n \delta\left(\omega_{(i)} - \omega(x_{(i)},t)\right)\right\rangle$$

есть n-точечная эйлерова ФПРВ, $n = 1,\ldots$, $\omega_{(i)}$, $i = 1,\ldots,n$ – значение компоненты завихренности $\Omega(x_{(i)},t)(\equiv\Omega_{(i)})$ в точке $x_{(i)} = (x_i, y_i)$, f_n^E-уравнение при внешнем воздействии F принимает вид [1]

$$\frac{\partial f_n^E}{\partial t} = -\sum_{j=1}^n \left[\frac{\partial}{\partial x_{(j)}}\left\langle u(x_{(j)},t) \mid \left\{\omega_l, x_{(l)}\right\}\right\rangle f_n^E + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial y_{(j)}}\left\langle v(x_{(j)},t) \mid \left\{\omega_{(l)}, x_{(l)}\right\}\right\rangle f_n^E\right] = \tag{6}$$
$$= -\frac{\partial}{\partial \omega_{(j)}}\left\langle F(x_{(j)},t) \mid \left\{\omega_{(l)}, x_{(l)}\right\}\right\rangle,$$

с начальным условием

$$f_n^E\left(\left\{\omega_{(l)}, x_{(l)}\right\};\ t = 0\right) = f_n^{E^0}\left(\left\{\omega_{(l)}^0, x_{(l)}^0\right\}\right). \tag{7}$$

Компоненты скорости определяются формулами

$$\left\langle u(x_{(j)},t) \mid \left\{\omega_{(l)}, x_{(l)}\right\}\right\rangle =$$
$$= \int \mathrm{d}x_{(n+1)}\mathrm{d}\omega_{(n+1)}\omega_{(n+1)}\alpha^1\left(x_{(j)} - x_{(n+1)}\right)\times$$
$$\times \frac{f_{n+1}^E\left(x_{(n+1)},\omega_{(n+1)},\left\{x_{(l)},\omega_{(l)}\right\},t\right)}{f_n^E\left(\left\{x_{(l)},\omega_{(l)}\right\},t\right)}, \tag{8}$$

$$\left\langle v(x_{(j)},t) \mid \left\{\omega_{(l)}, x_{(l)}\right\}\right\rangle =$$
$$= \int \mathrm{d}x_{(n+1)}\mathrm{d}\omega_{(n+1)}\omega_{(n+1)}\alpha^2\left(x_{(j)} - x_{(n+1)}\right)\times$$
$$\times \frac{f_{n+1}^E\left(x_{(n+1)},\omega_{(n+1)},\left\{x_{(l)},\omega_{(l)}\right\},t\right)}{f_n^E\left(\left\{x_{(l)},\omega_{(l)}\right\},t\right)}. \tag{9}$$

Далее будем использовать обозначения

$$\alpha^1(r_{(1,n+1)}) = \alpha^1_{(1,n+1)},\quad \alpha^2(r_{(1,n+1)}) = \alpha^2_{(1,n+1)}. \tag{10}$$

Класс ФПРВ определяется условиями нормализации, совпадения и разделения ФПРВ [1] на соответствующих масштабах.

Характеристики уравнения (6) описывают динамику n лагранжевых частиц $X_{n(j)}(t)$:

$$\frac{d}{dt}X_{n(j)}(t) =$$
$$= \left\langle u(x_{(j)},t) \mid \omega_{(l)}, x_{(l)}\right\rangle\Big|_{\{\omega_{(l)},x_{(l)}\}=\{\Omega_{(l)}(t),X_{n(l)}(t)\}}, \tag{11}$$
$$X_{n(j)}(0) = a_j,$$

$$\frac{d}{dt}\Omega_{n(j)}(t) =$$
$$= \left\langle F(x_{(j)},t) \mid \left\{\omega_{(l)}, x_{(l)}\right\}\right\rangle\Big|_{\{\omega_{(l)},x_{(l)}\}=\{\Omega_{(l)}(t),X_{n(l)}(t)\}},$$
$$\Omega_{(l)}(0) = \omega^0_{(l)}, \tag{12}$$

где $j = 1,\ldots,n$ и $l = 1,\ldots,n$. Нижний индекс в выражении $\{\omega_{(l)}, x_{(l)}\} = \{\Omega_{(l)}(t), X_{n(l)}(t)\}$ означает, что статистика вычисляется в текущем положении частицы на характеристике. Завихренность меняется вдоль характеристики согласно (12). Далее предполагаем, что находимся в равновесной стадии турбулентности, т.е. внешнее воздействие отсутствует. Тогда, ввиду (12), завихренность переносится вдоль $X_{n(l)}(a_j,t)$ без изменения.

При этом f_n-уравнение инвариантно преобразуется для $\{\omega_{(l)}, x_{(l)}\}$ с $\omega_{(l)} = 0$, т.е. вдоль характеристик нулевой завихренности, что согласуется с результатами [15]. Группа симметрий $G = G_1 \times \ldots \times G_n$ определяет расслоение

$$P = P_{x_{(1)}} \times \ldots \times P_{x_{(n)}}$$

многообразия D с базой $x_{(j)}$, где слой $P_{x_{(j)}}$ – группа преобразований G_j. Такие расслоения называются главными. Группа Ли G_j имеет вид [13]

$$z^*_{(1)} = F(z_{(1)}), \tag{13}$$

$$\omega^*_{(1)} = \left|F_{z_{(1)}}\right|^2 \omega_{(1)}, \tag{14}$$

...

$$z^*_{(k)} = F(z_{(k)}), \tag{15}$$

$$\omega^*_{(k)} = \left|F_{z_{(k)}}\right|^2 \omega_{(k)}, \tag{16}$$

...

$$z^*_{(n+1)} = F'(z_{(j)}, z_{(n+1)}) = F(z_{(j)}) +$$
$$+ (z_{(n+1)} - z_{(j)})\frac{\mathrm{d}F(z_{(j)})}{\mathrm{d}z_{(j)}}\left|\frac{\mathrm{d}F(z_{(j)})}{\mathrm{d}z_{(j)}}\right|^{-2/3}, \tag{17}$$

$$\omega^*_{(n+1)} = \left|F_{z_{(j)}}\right|^{2/3} \omega_{(n+1)}, \tag{18}$$

$$f_n^{E^*} = \prod_{i=1}^n \left|F_{z_{(i)}}\right|^{-2} f_n^E, \tag{19}$$

$$f_{n+1}^{E^*} = \left|F_{z_{(j)}}\right|^{-2/3} \prod_{i=1}^n \left|F_{z_{(i)}}\right|^{-2} f_{n+1}^E,$$
$$z_{(j)} = x^1_{(j)} + ix^2_{(j)}, \tag{20}$$

где $F = U = iV$, U, V – произвольные сопряженные гармонические функции, удовлетворяющие условиям Коши–Римана, т.е. F – конформное отображение, $F_{z_{(k)}}$ – производная по $z_{(k)}$. $F'(z_{(j)}, z_{(n+1)})$ определено на $C \times C$, параметр группы a опущен в обозначениях. Характеристики $X_{n(j)}$ $(Z_{n(j)} \in C)$ в комплексных переменных $z_{(j)} = x_{(j)} + iy_{(j)}$ конформно-инвариантно преобразуются группой G_j. Инфинитезимальный оператор алгебры Ли t_j подгруппы $H_j \subset G_j$, преобразующей $z_{(j)}$ и f_n^E, имеет вид

$$T_{(j)} = \Phi(z_{(j)})\frac{\partial}{\partial z_{(j)}} + \bar{\Phi}(\bar{z}_{(j)})\frac{\partial}{\partial \bar{z}_{(j)}} -$$
$$- \Phi_{z_{(j)}}(z_{(j)})f_n^E\frac{\partial}{\partial f_n^E} - \bar{\Phi}_{\bar{z}_{(j)}}(\bar{z}_{(j)})f_n^E\frac{\partial}{\partial f_n^E}, \tag{21}$$

где $\Phi(z_{(j)})$ – произвольное конформное отображение, так что

$$z^*_{(j)} = F(z_{(j)}),\ dz^*_{(j)} = F_{z_{(j)}}dz_{(j)},\ d\bar{z}^*_{(j)} = \bar{F}_{\bar{z}_{(j)}}d\bar{z}_{(j)},$$
$$f_n^{E^*} = \left|F_{z_{(j)}}\right|^{-2} f_n^E,\quad \left|F_{z_{(j)}}\right|^2 = F_{z_{(j)}}\bar{F}_{\bar{z}_{(j)}}. \tag{22}$$

Уравнение (12) описывает динамику j-й лагранжевой частицы на j-й компоненте n-мерного комплексного пространства $C^n = C_{(1)} \times \ldots \times C_{(n)}$, где $C_{(j)} \simeq C$. Таким образом, $Z_{(n)j}(t) = X^1_{n(j),t}(t) + iX^2_{n(j),t}(t)$ – кривая на $C_{(j)}$, вдоль которой $\omega^0_{(j)}$ сохраняется. Элемент длины (метрика) в $C_{(j)}$ определяется функцией Λ:

$$dl^2_{(j)} = \Lambda^2(z_{(j)}, \bar{z}_{(j)})dz_{(j)}d\bar{z}_{(j)}. \tag{23}$$

Инфинитезимальный оператор наиболее широкой группы преобразований, инвариантно преобразующей $dl^2_{(j)}$, следовательно, длину характеристики $Z_{n(j)}(t)$, совпадает с $T_{(j)}$ [14]. Таким образом, условие $\Lambda^2 = f_n^E$ определяет риманову длину вектора скорости

$$\frac{d}{dt}Z_{n(j)}(s),$$

инвариантную относительно действия группы H_j.

Сформулируем статистический аналог ВПБ. Кинетическая энергия лагранжева потока $X_{n(j)}(a_j,t)$, интегрированная по t, равна

$$S[X_{n(j)}] = \frac{1}{2}\int_0^T\int_D \left|\frac{d}{dt}X_{n(j)}(a_j,t)\right|^2 \mathrm{d}a_j dt. \tag{24}$$

Принимая во внимание (9), (10) и конформный вид метрики $dl^2_{(j)}$, т.е. (23), получаем

$$S[X_{n(j)}] = \int_0^T \int_D \left| \frac{d}{dt} X_{n(j)}(t)(a_j,t) \right|^2 \mathrm{d}a_j dt =$$
$$= \int_0^T \int_D f_n^E \left(\left\langle u(x_{(j)},t) \mid \{\omega_{(l)},x_{(l)}\} \right\rangle^2 + \right.$$
$$\left. + \left\langle v(x_{(j)},t) \mid \{\omega_{(l)},x_{(l)}\} \right\rangle^2 \right) \Bigg|_{\{\omega_{(l)},x_{(l)}\}=\{\Omega_{(l)}(t),X_{n(l)}(a_j,t)\}} \mathrm{d}a_j dt =$$
$$= \int_0^T \int_D f_n^E \left(\left\langle u(x_{(j)},t) \mid \{\omega_{(l)},x_{(l)}\} \right\rangle^2 + \right.$$
$$\left. + \left\langle v(x_{(j)},t) \mid \{\omega_{(l)},x_{(l)}\} \right\rangle^2 \right) \Bigg|_{\{\omega_{(l)},x_{(l)}\}=\{\Omega_{(l)}(t),X_{n(l)}(a_j,t)\}} \mathrm{d}a_j dt =$$
$$= \int_0^T \int_D \left[f_n^E \left(\int \mathrm{d}x_{(n+1)} \mathrm{d}\omega_{(n+1)} \omega_{(n+1)} \times \right. \right.$$
$$\left. \times \alpha^1 (x_{(j)} - x_{(n+1)}) \frac{f_{n+1}^E}{f_n^E} \right)^2 +$$
$$+ f_n^E \left(\int \mathrm{d}x_{(n+1)} \mathrm{d}\omega_{(n+1)} \omega_{(n+1)} \times \right.$$
$$\left. \left. \times \alpha^2 (x_{(j)} - x_{(n+1)}) \frac{f_{n+1}^E}{f_n^E} \right)^2 \right] \Bigg|_{\{\omega_{(l)},x_{(l)}\}=\{\Omega_{(l)}(t),X_{n(l)}(a_j,t)\}} \mathrm{d}a_j dt, \tag{25}$$

где $\{\omega_{(l)}, x_{(l)}\} = \{\Omega_{(l)}(t), X_{n(l)}(a_j, t)\}$ задает лагранжево представление поля скорости и в лагранжевом описании $S[X_{n(j)}]$ – случайная величина. Лагранжева ФПРВ поля вихря равна

$$f_n^L(x_{(1)},a_1,\omega_{(1)},\ldots,x_{(n)},a_n,\omega_{(n)},t) =$$
$$= \left\langle \prod_{i=1}^n \delta\left(x_{(i)} - X_{n(i)}(a_i,t)\right) \delta\left(\omega_{(i)} - \Omega_{(i)}(a_i,t)\right) \right\rangle. \tag{26}$$

Функционал Бренье статистического ансамбля случайной величины $S[X_{n(j)}]$ определяется формулой

$$\int \mu[DX_n] S[X_{n(j)}] = \int \mathrm{d}a_1 \ldots \mathrm{d}a_n f_n^L S[X_{n(j)}], \tag{27}$$

где $\mu[DX_n]$ – двойная стохастическая мера [8]:

$$\mu[DX_n] = \left\langle \prod_{j=1}^n \delta\left(x_{(j)} - X_{n(j)}(a_j,t)\right) \times \right.$$
$$\left. \times \delta\left(\omega_{(j)} - \Omega_{(j)}(a_j,t)\right) \right\rangle \mathrm{d}a_1 \ldots \mathrm{d}a_n. \tag{28}$$

Интегрируя (27) относительно $\mathrm{d}a_1 \ldots \mathrm{d}a_n$ и используя формулу (см. [16]):

$$\int \mathrm{d}a_1 \ldots \mathrm{d}a_n f_n^L = f_n^E(x_{(1)},\omega_{(1)},\ldots,x_{(n)},\omega_{(n)},t) \equiv$$
$$\equiv \left\langle \prod_j^n \delta\left(\omega_{(j)} - \omega(x_{(j)},t)\right) \right\rangle, \tag{29}$$

получаем

$$\int \mu[DX_n] S[X_{n(j)}] = f_n^E S[X_{n(j)}]. \tag{30}$$

Функционал (30) рассматривается на характеристиках $x_{(j)} = X_{n(j)}(a_j,t)$, и, принимая во внимание, что f_n^E постоянна вдоль характеристики (см. формулу (30), где $\omega(X_{n(j)}(a_j,t)) = \omega^0(a_j)$), получаем с учетом начального условия (7), что правая часть (30) равна

$$\frac{1}{2} \int_0^T f_n^{E^0} \int_D \left[f_n^{E^0} \left(\int \mathrm{d}x_{(n+1)} \mathrm{d}\omega_{(n+1)} \omega_{(n+1)} \times \right. \right.$$
$$\left. \times \alpha^1 (x_{(j)} - x_{(n+1)}) \frac{f_{n+1}^E}{f_n^{E^0}} \right)^2 +$$
$$+ f_n^{E^0} \left(\int \mathrm{d}x_{(n+1)} \mathrm{d}\omega_{(n+1)} \omega_{(n+1)} \times \right.$$
$$\left. \times \alpha^2 (x_{(j)} - x_{(n+1)}) \frac{f_{n+1}^E}{f_n^{E^0}} \mathrm{d}x_{(n+1)} \right)^2 \Bigg|_{\{\omega_{(l)},x_{(l)}\}=\{\Omega_{(l)}(t),X_{n(l)}(t)\}} \mathrm{dt}\mathrm{d}a_j. \tag{31}$$

Таким образом, функционал Бренье имеет вид

$$B[f_{n+1}{}^E] = \frac{1}{2} \int_0^T f_n^{E^0} \int_D \left[f_n^{E^0} \left(\int \mathrm{d}x_{(n+1)} \mathrm{d}\omega_{(n+1)} \omega_{(n+1)} \alpha^1 (x_{(j)} - x_{(n+1)}) \frac{f_{n+1}^E}{f_n^{E^0}} \right)^2 + \right.$$
$$\left. + \left(\int \mathrm{d}x_{(n+1)} \mathrm{d}\omega_{(n+1)} \omega_{(n+1)} \alpha^2 (x_{(j)} - x_{(n+1)}) \frac{f_{n+1}^E}{f_n^{E^0}} \right)^2 \right] \mathrm{d}a_j dt \Bigg|_{\{\omega_{(l)},x_{(l)}\}=\{\Omega_{(l)}(t),X_{n(l)}(t)\}}. \tag{32}$$

Принцип Бренье наименьшего действия для функционала (32) формулируется так:

$$B[f_{n+1}^E] \to \inf_{f_{n+1}^E}, \tag{33}$$

$$f_{n+1}^E \Big|_{t=0} = f_{n+1,0}^E, \quad f_{n+1}^E \Big|_{t=T} = f_{n+1,T}^E, \tag{34}$$

где $f_{n+1,0}^E$, $f_{n+1,T}^E$ – заданные ФПРВ поля вихря в моменты времени $t = 0$, $t = T$. Конкретно, имеем

$$f_{n+1}^E \Big|_{\{\omega_{(l)},x_{(l)}\}=\{\Omega_{(l)}(t),X_{n(l)}(t)\},t=0} =$$
$$= \delta(\omega_{(n+1)} - \omega(x_{(n+1)},0)) g_n(\{\omega_{(l)}^0, a_l\}), \tag{35}$$

$$f_{n+1}^E \Big|_{\{\omega_{(l)},x_{(l)}\}=\{\Omega_{(l)}(t),X_{n(l)}(t)\},t=T} =$$
$$= \delta(\omega_{(n+1)} - \omega(x_{(n+1)},T)) g_n(\{\omega_{(l)}^T, X_{n(j),f}\}), \tag{36}$$

где $\delta(\omega_{(n+1)} - \omega^0(x_{(n+1)}))$ и $\delta(\omega_{(n+1)} - \omega^T(x_{(n+1)}))$ – ФПРВ в моменты времени $t = 0$ и $t = T$;

$$g_n(\{\omega_{(l)}^0, a_l\}) = \prod_{j=1}^n \delta(\omega_{(j)} - \omega^0(a_j)),$$
$$g_n(\{\omega_{(l)}^T, X_{n(l),f}\}) = \prod_{j=1}^n \delta(\omega_{(j)} - \omega^T(X_{n(j),f})$$

суть ФПРВ поля вихря $\omega_{(j)}$ при $t = 0$, $t = T$ в начальной и “финальной” точках соответственно. Условие равномерности ассоциированной вероятностной меры μ относительно t – это условие на характеристиках $X_{n(j)}(a_j,t)$. Равенство $d/dt\, \Omega_{n(j)}(t) = 0$ вдоль $X_{n(j)}(a_j,t)$ ведет к независимости μ от t на характеристиках. Следовательно, условие равномерности выполнено. Статистическая формулировка ВПБ переходит в ВПА при $n \to \infty$ ($j \to \infty$). Действительно, переходя формально к пределу при $n \to \infty$, имеем $(X_{n(j)}(a_j,t), \Omega_{n(j)}(a_j,t)) \to$ $\to (X(a,t)), \Omega(a,t))$, где a заполняют D. Уравнения (11), (12) сходятся к уравнению завихренности в лагранжевой формулировке (см. формулы (52a), (52b) [1]):

$$\frac{d}{dt} X(a,t) = \int da' \Omega(a',t) \left(\alpha^1 (X(a,t) - X(a',t)) + \right.$$
$$\left. + \alpha^2 (X(a,t) - X(a',t)) \right), \tag{37}$$

$$\frac{d}{dt} \Omega(a,t) = 0 \quad \text{вдоль} \quad X(a,t). \tag{38}$$

При этом правая часть (32) стремится к

$$\int_0^T \mathrm{d}a dt \left(\int_D \mathrm{d}a' \Omega(a',t) \alpha^1 (X(a,t) - X(a',t)) \right)^2 +$$
$$+ \left(\int_D \mathrm{d}a' \Omega(a',t) \alpha^2 (X(a,t) - X(a',t)) \right)^2, \tag{39}$$

где под интегралом в (38) – ядро Био–Савара. Интеграл (39) совпадает с интегрированной по t кинетической энергией объема жидкости. Проверка выполнения соответствующих краевых условий элементарна. Полученная вариационная краевая задача для функционала (39) с заданными конфигурациями жидкости при $t = 0$ и $t = T$ [9] не является классической, при которой задается начальное положение траектории жидкой частицы и ее скорость.

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы благодарят С.Б. Медведева за полезное обсуждение результатов работы.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-11-00287, https://rscf.ru/project/22-11-00287/. А.Н. Гришков поддержан FAPESP (Brazil), проект 2021/09845-0.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Конфликт интересов отсутствует.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Friedrich R., Daitche A., Kamps O., Lülff J., Michel Voßkuhle M., Wilczek M.* The Lundgren–Monin–Novikov hierarchy: Kinetic equations for turbulence // C.R. Physique. 2012. V. 13. P. 929–953.
2. *Lundgren T.S.* Distribution functions in the statistical theory of turbulence // Phys. Fluids. 1967. V. 10. P. 969–975.
3. *Монин А.С.* Уравнения турбулентного движения // Прикладная математика и механика. 1967. Т. 31. № 6. С. 1057–1068.
4. *Новиков Е.А.* Кинетические уравнения для поля вихря // ДАН. 1967. Т. 177. № 2. С. 299–301.
5. *Friedrich R.* Statistics of Lagrangian velocities in turbulent flows // Phys. Rev. Lett. 2003. V. 90. P. 084501.
6. *Friedrich J.* Closure of the Lundgren-Monin-Novikov Hierarchy in Turbulence via a Markov Property of Velocity Increments in Scale. Dissertation: Doktor der Naturwissenschaften. Bochum, 2017.

7. *Wacławczyk M., Staffolani N., Oberlack M., Rosteck A., Wilczek M., Friedrich R.* Statistics of Lagrangian velocities in turbulent flows // Phys. Rev. E. 2014. V. 90. P. 013022.
8. *Brenier Y.* The least action principle and the related concept of generalized flows for incompressible perfect fluids // J. Am. Math. Soc. 1989. V. 2. P. 225–255.
9. *Шнирельман А.И.* О геометрии группы диффеоморфизмов и динамике идеальной несжимаемой жидкости // Матем. сб. 1985. Т. 170. № 1. С. 82–109.
10. *Thalabard S., Bec J.* Turbulence of generalised flows in two dimensions // J. Fluid Mechan. 2020. V. 883. P. A49.
11. *Arnold V.I.* Sur la geom'etrie diff'erentielle des groupes de lie de dimension infinie et ses applicationsa l'hydrodynamique des fluides parfaits // Ann. Inst. Fourier. 1966. V. 16. P. 319–361.
12. *Гребенёв В.Н., Гришков А.Н., Оберлак М.* Симметрии уравнений Лангрена–Монина–Новикова для распределения вероятности поля вихря // Доклады РАН. Физика, технические науки. 2023. Т. 509. №. 1. С. 50–55.
13. *Гребенёв В. Н., Гришков А.Н., Медведев С.Б.* Преобразования симметрии статистики поля вихря в оптической турбулентности // Теоретическая и математическая физика. 2023. Т. 217. № 2. С. 438–451.
14. *Grebenev V.N., Oberlack M., Grishkov A.N.* Infinite dimensional Lie algebra associated with conformal transformations of the two-point velocity correlation tensor from isotropic turbulence // Z. Angew. Math. Phys. 2013. V. 64. P. 599–620.
15. *Фалькович Г.* Конформная инвариантность в гидродинамической турбулентности // Успехи мат. наук. 2007. Т. 62. Вып. 3(375). С. 193–206.
16. *Friedrich R.* Lagrangian probability distributions of turbulent flows. arXiv:physics/0207015v1. 2018

GENERALIZED BRENIER PRINCIPLE AND THE CLOSURE PROBLEM OF LANDGREN–MONIN–NOVIKOV HIERARCHY FOR VORTICITY FIELD

V. N. Grebenev[a], A. N. Grishkov[b]

[a] *Federal Research Center for Information and Computational Technologies, Novosibirsk, Russia*
[b] *Institute of Mathematics and Statistics, The University of Sao Paulo, Sao Paulo, Brazil*

Presented by Academician of the RAS M.P. Fedoruk

Brenier's concept – a representation of solutions to the equations of ideal incompressible fluids in terms of probability measures on the set of Lagrangian trajectories in the case of their stochasticity, is a generalization of Arnold's principle of least action of finding smooth solutions of Euler's equations. In this work, the variational generalized Brenier principle (Brenier, J. Am. Math. Soc. 1989) is used to close the infinite chain of Landgren–Monin–Novikov equations for the n-point probability density functions f_n of the vortex field of two-dimensional turbulence. In addition, within the framework of the statistical approach, an approximation of the variational problem with conditions at the ends posed by Shnirelman (Mat. Sat. 1985) for the Euler equation is proposed.

Keywords: Generalized Brenier principle, two-dimensional turbulence, Lundgren–Monin–Novikov equations, closure problem