

УДК 536.2; 544.012

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ И ГРАНИЦЫ ИЗМЕНЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В ДИСПЕРСНЫХ СРЕДАХ

© 2024 г. Б. В. Бошнятов^{1,*}

Представлено академиком РАН А.М. Липановым 14.11.2023 г.

Поступило 21.11.2023 г.

После доработки 21.11.2023 г.

Принято к публикации 12.02.2024 г.

Используя наиболее общие физические принципы локальности и симметрии, получены точные решения для коэффициента теплопроводности двухфазной дисперсной среды. Два решения определяют известные границы Хашина–Штрикмана. Третье решение, инвариантное относительно преобразования инверсии фаз, существенно сужает границы Хашина–Штрикмана, что подтверждается сравнением с многочисленными экспериментами других авторов. Показано, что учет дистанционного взаимодействия дисперсных частиц при их повышенной концентрации лишь незначительно (менее 3%) влияет на конечный результат.

Ключевые слова: двухфазная дисперсная среда, точные решения, эффективный коэффициент теплопроводности, взаимодействие дисперсных частиц

DOI: 10.31857/S2686740024020067, EDN: KHHSDC

В последние годы в связи с созданием технологий и изделий нового поколения существенно возрос интерес к использованию в промышленности микро- и нанодисперсных сред [1, 2]. Физические свойства таких структурно неоднородных сред можно характеризовать эффективными параметрами, усредненными по представительному объему Ω , линейные размеры которого находятся в диапазоне $l \ll \Omega^{1/3} \ll L$, где l – микромасштаб структурных неоднородностей, L – масштаб макроскопических неоднородностей в среде после усреднения. Далее усреднение локальных физических величин по объему Ω будем обозначать угловыми скобками, например, эффективный поток тепловой энергии –

$$\langle \mathbf{q}_i \rangle = \frac{1}{\Omega} \int \mathbf{q}_i(x, y, z) dx dy dz.$$

В макроскопическом масштабе L объем Ω фактически является физической точкой. Переход

от микроскопически неоднородной среды к эквивалентной гомогенной (в объеме Ω) среде часто называют проблемой гомогенизации. Решение этой проблемы в общем случае является чрезвычайно сложной задачей, так как эффективные параметры дисперсной среды зависят не только от объемной концентрации и физических свойств составляющих ее компонентов, но и от микроструктуры среды – геометрической формы дисперсных частиц, их коллективного дистанционного взаимодействия, распределения по размерам, а также от статистических характеристик пространственной структуры [3]. Имеется всего несколько случаев, в которых были найдены аналитические решения для вычисления эффективного коэффициента теплопроводности двухфазной дисперсной среды. Вследствие физической (математической) аналогии [4] такое же положение имеет место для коэффициентов электропроводности, диэлектрической проницаемости и других физических величин. Любые приближенные теоретические или полуэмпирические формулы гомогенизации, которых к настоящему времени предложено достаточно много, должны

¹Институт прикладной механики
Российской академии наук, Москва, Россия
*E-mail: bosbosh@mail.ru

иметь количественную оценку области применимости и оценку погрешности предсказания эффективных свойств конкретной среды, оценить которые часто не представляется возможным [5]. Поэтому важно иметь общие неравенства, определяющие границы изменения той или иной физической величины в заданных условиях. В ряде случаев эти границы позволяют достаточно точно предсказать свойства дисперсной среды без детального знания ее микроструктуры. Такие границы для двухфазной дисперсной среды, которые получили названия границ Винера и Хашина–Штрикмана (Х–Ш), были получены из довольно общих предположений – классических энергетических неравенств и вариационных принципов в работе [6], а также с использованием свойств гармонических функций и симметрии изотропной среды в работе [7]. Фельдерхоф в работе [8] получил более узкие границы изменения эффективной диэлектрической проницаемости для суспензии идентичных сфер с учетом двух- и трехчастичных взаимодействий.

В данном сообщении границы допустимых изменений эффективного коэффициента теплопроводности дисперсной среды получены с использованием концепции локального поля, свойств симметрии среды и аналитических решений краевых задач уравнения Лапласа как с учетом, так и без учета взаимодействия дисперсных частиц. К преимуществам предлагаемого подхода следует отнести его физическую наглядность и универсальность – представление конечного результата в виде простых аналитических формул и применимость к средам с произвольным соотношением концентраций и теплопроводностей фаз.

Рассмотрим в рамках макроскопического подхода двухфазную ($i = 1, 2$) дисперсную среду, состоящую из однородных и изотропных фаз с известными коэффициентами молекулярной теплопроводности λ_i , Дж/мс К. Каждая фаза занимает свой неизменный объем

$$f_i = \frac{\Omega_i}{\Omega}$$

и может находиться в любом из трех агрегатных состояний. Пусть внутри каждой фазы теплопроводность описывается линейным законом

Фурье: $\mathbf{q}_i = -\lambda_i \nabla T_i$, где \mathbf{q}_i – локальный поток тепловой энергии, Дж/м²с; ∇T_i – локальный градиент температуры внутри i -й фазы, К/м. Локальная теплопроводность в такой среде принимает одно из двух значений λ_1 или λ_2 , так как $f_1 + f_2 = 1$. Тогда эффективный коэффициент молекулярной теплопроводности дисперсной среды λ^* определяется из линейного уравнения $\langle \mathbf{q} \rangle = -\lambda^* \langle \nabla T \rangle$, и безразмерная формула для вычисления эффективного коэффициента теплопроводности будет иметь следующий вид:

$$\frac{\alpha^* - 1}{\alpha - 1} = \frac{\psi_{21} f_2}{1 - (1 - \psi_{21}) f_2}, \quad (1)$$

где $\alpha^* = \frac{\lambda^*}{\lambda_1}$; $\alpha = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$; ψ_{21} – неизвестный линейный оператор ($\psi_2 = \psi_{21} \psi_1$), $\psi_i = \frac{\langle \nabla T_i \rangle \langle \nabla T \rangle}{\langle \nabla T \rangle^2}$.

Из формулы (1) видно, что вся информация о геометрической структуре дисперсной среды и характере коллективного взаимодействия частиц при их повышенной концентрации содержится в операторе ψ_{21} . Этот оператор определяет связь между локальными векторными полями $\langle \nabla T_2 \rangle$ и $\langle \nabla T_1 \rangle$. Это важно, поскольку в силу линейности закона Фурье, уравнения Лапласа и граничных условий процесс переноса тепла в дисперсной среде имеет локальный характер. Таким образом, векторное поле ∇T_2^k внутри каждой k -й частицы (и тепловой поток) определяются локальным полем ∇T_1^k , которое в зависимости от структуры среды может в разы отличаться от внешнего или среднего поля $\langle \nabla T \rangle$. Для сферических частиц локальное поле ∇T_1^k вычисляется в центре сферической полости k -й частицы, если ее удалить из среды. Следуя работе [9], задачу определения оператора ψ_{21} будем называть задачей о взаимодействии фаз.

В рамках макроскопического подхода эта задача имеет точное решение лишь для простейших слоистых структур. Действительно, если слои параллельны интенсивности внешнего поля $\mathbf{E} = \langle \nabla T \rangle$, то $\langle \nabla T_1 \rangle = \langle \nabla T_2 \rangle$. Подставляя $\psi_{21} = 1$ в формулу (1), получим: $\lambda^* = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$. Если слои перпендикулярны интенсивности внешнего поля, то равны потоки тепла:

$$\lambda_1 \langle \nabla T_1 \rangle = \lambda_2 \langle \nabla T_2 \rangle \text{ и } \psi_{21} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2},$$

соответственно:

$$\frac{1}{\lambda_{\perp}^*} = \frac{f_1}{\lambda_1} + \frac{f_2}{\lambda_2}.$$

Эти точные решения совпадают с границами Винера $\lambda_{\perp}^* \leq \lambda^* \leq \lambda_{\parallel}^*$, которые были получены независимыми методами в работах [6, 7] для дисперсной среды с произвольной анизотропной внутренней микроструктурой.

Совпадение границ Винера с точными решениями для слоистых сред не является случайным, поскольку, как правило, точные решения удается найти лишь в средах, которые обладают определенной степенью симметрии. В таких средах пространственное распределение неоднородностей соответствует некоторым предельным микроструктурам [10]. Слоистые среды являются такими предельными микроструктурами произвольной анизотропной дисперсной среды.

В общем случае задачу о взаимодействии фаз необходимо решать на более детальном микроструктурном уровне, решая уравнение Лапласа для дисперсной среды при удовлетворении соответствующих граничных условий на бесконечности и на всех межфазных поверхностях.

Далее будет показано, что точные решения для статистически однородной и изотропной дисперсной среды, одна из фаз которой представлена сферическими частицами, также соответствуют предельным микроструктурам, которые определяют границы изменения коэффициентов теплопроводности для любых двухфазных сред с произвольной микроструктурой, когда известны лишь свойства фаз и их концентрация. Действительно, сфера имеет бесконечное множество плоскостей симметрии и предельные геометрические свойства: для любого выпуклого тела заданного объема сфера имеет минимальную площадь поверхности. Более того, у сферы имеется и ряд экстремальных физических свойств. Так, например, из всех тел с данным объемом сфера имеет наименьшую электростатическую емкость (А. Пуанкаре, 1903; Г. Сеге, 1930).

В работе [11] в гидродинамической постановке идеальной несжимаемой жидкости впервые в аналитическом виде была решена задача о взаимодействии фаз в суспензии идентичных сферических частиц с учетом их парных взаимодействий для произвольных соотношений плотностей фаз $-\langle \nabla \varphi_2 \rangle = \psi_{21}^g \langle \nabla \varphi \rangle$, где $\langle \nabla \varphi \rangle = U^{(0)}$ – внешнее поле воздействия на среду. Из этого решения и соотношения $\langle \nabla \varphi \rangle = \langle \nabla \varphi_1 \rangle f_1 + \langle \nabla \varphi_2 \rangle f_2$ нетрудно получить оператор связи между локальными скоростями $\langle \nabla \varphi_2 \rangle = \psi_{21}^g \langle \nabla \varphi_1 \rangle$:

$$\psi_{21}^g = \frac{3}{1 + 2\gamma} [1 + k(\gamma) f_2], \quad (2)$$

$$k(\gamma) = \frac{7}{72} \frac{\gamma - 1}{1 + 2\gamma} + \frac{1415}{5632} \left(\frac{\gamma - 1}{1 + 2\gamma} \right)^2 + \frac{5}{2112} \left(\frac{\gamma - 1}{1 + 2\gamma} \right)^3,$$

где ψ_{21}^g – решение задачи о взаимодействии фаз в гидродинамической постановке;

$$\gamma = \frac{\rho_2}{\rho_1},$$

ρ_2 и ρ_1 – плотность дисперсной частицы и дисперсионной жидкости соответственно.

Решение (2) получено с учетом членов разложения искомых функций по малому параметру $\delta = \frac{a}{l}$ (где a – радиус дисперсной частицы, l – расстояние между центрами частиц) до степени δ^{14} , что важно при описании свойств среды при повышенной концентрации частиц [8] и соответствует погрешности вычисления коэффициента $k(\gamma)$ меньше 0.25%.

Используя решение (2) и формулы соответствия физической аналогии динамики идеальной несжимаемой жидкости и процессов теплопередачи (верхний индекс t) – $\psi_{21}^g \rightarrow \psi_{21}^t$, $\gamma \rightarrow \frac{\alpha + 1}{2}$ [9], легко получить решение задачи о взаимодействии фаз для процессов теплопередачи:

$$\psi_{21}^t = \frac{3}{\alpha + 2} [1 + k(\beta)], \quad (3)$$

$$k(\beta) = 0.0486\beta + 0.0628\beta^2 + 0.0003\beta^3. \quad (4)$$

В формулах (3) и (4)

$$\beta = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 2}.$$

После подстановки (3) в (1) получим искомую аналитическую зависимость для эффективной теплопроводности дисперсной среды, с учетом коллективного взаимодействия дисперсных частиц, в виде

$$\beta^* = f_2 \beta \frac{1 + k(\beta) f_2}{1 + k(\beta) f_2^2}. \quad (5)$$

В формуле (5)

$$\beta^* = \frac{\alpha^* - 1}{\alpha + 2}.$$

При слабом взаимодействии частиц, $k(\beta) \ll 1$, формула (5) переходит в так называемую эвристическую формулу Максвелла (Клаузиуса–Моссоти) при любой объемной концентрации дисперсных частиц $0 < f_2 < 1$:

$$\beta_M^* = f_2 \beta. \quad (6)$$

Таким образом, вопреки существующему мнению [12], в предположении отсутствия взаимодействия частиц, теория не накладывает никаких ограничений на объемную концентрацию дисперсных частиц в формуле (6). В дальнейшем формулу (6) будем называть аналитической формулой Максвелла, поскольку в научной литературе формулой Максвелла часто называют ее линейное приближение $\alpha^* = 1 + 3\beta f_2 + O(f_2^2)$.

Аналитическую формулу Максвелла (6) можно получить и не используя ограничения монодисперсности сферических частиц, непосредственно из формулы (1) и принципа локальности [9].

Используя полученное решение (5), оценим влияние взаимодействия дисперсных частиц на неточность аналитической формулы Максвелла при различных значениях параметра α и повышенных концентрациях дисперсных частиц. При изменении параметра α от нуля до бесконечности безразмерный параметр β изменяется в пределах $-0.5 < \beta < 1$, а коэффициент $k(\beta)$ — в пределах $-0.0086 < k(\beta) < 0.1117$. Максимальная погрешность ε формулы (6)

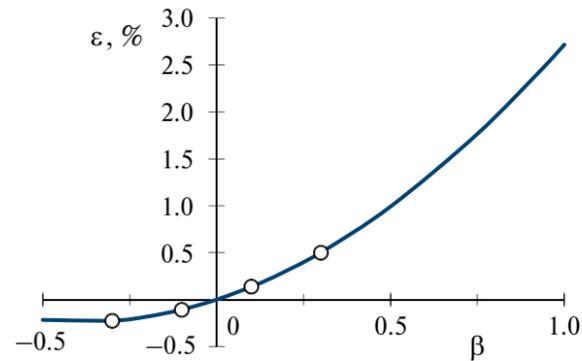


Рис. 1. Максимальная погрешность (при $f_2 = 0.5$) аналитической формулы Максвелла (6) в зависимости от параметра β , которая возникает из-за пренебрежения взаимодействием частиц. Линия — аналитическая зависимость ε . Точки — расчетные данные Фельдерхофа [8] при $-0.3 < \beta < 0.3$.

из-за пренебрежения взаимодействием дисперсных частиц

$$\varepsilon = \frac{\beta^* - \beta_M^*}{\beta_M^*} 100\%$$

достигается при $f_2 = 0.5$ и составляет при $\beta = 1$ около 2.7%, что, как правило, меньше погрешности измерения коэффициентов теплопроводности. На рис. 1 дана зависимость максимальной погрешности ε от параметра β . Там же приведены расчетные данные Фельдерхофа [8], полученные независимым статистическим методом. Видно, что они очень хорошо согласуются с полученной аналитической зависимостью.

Таким образом, основным фактором влияния на зависимость эффективного коэффициента теплопроводности дисперсной среды от концентрации дисперсных частиц является чисто геометрический фактор стесненности дисперсных частиц, который в полной мере учитывается аналитической формулой Максвелла (6). Влияние дистанционного взаимодействия частиц при повышенной концентрации дисперсной фазы приводит лишь к незначительным поправкам.

Используя это замечательное свойство аналитической формулы Максвелла и свойства симметрии однородной и изотропной дисперсной среды, можно построить еще два важных точных решения. Действительно, поскольку

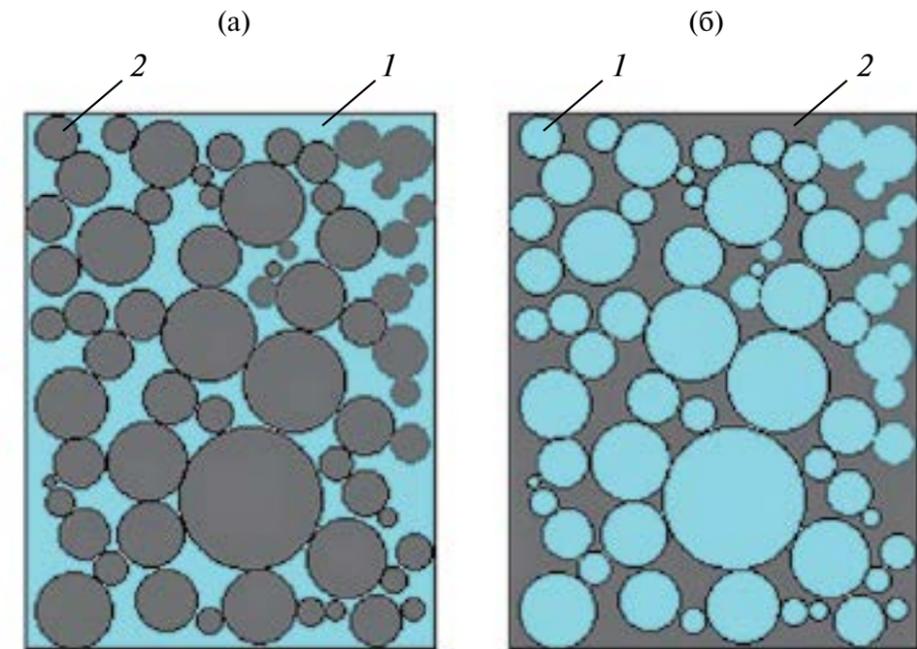


Рис. 2. Два симметричных типа микроструктуры однородной и изотропной дисперсной среды, образованной полидисперсными сферическими частицами: а — дисперсная фаза — сферические частицы, среда описывается формулой Максвелла (6); б — сферические частицы образуют непрерывную фазу (матрицу), среда описывается формулой (7). 1 — дисперсионная жидкость (матрица); 2 — дисперсная фаза.

формула (6) дает достаточно высокую точность во всем диапазоне параметров α и f_2 , то мы можем увеличивать объемную концентрацию дисперсной фазы до такой степени, что она образует сплошной континуум. В этом случае, поменяв местами в формуле (6) нижние индексы (1 ↔ 2), т.е. применив преобразование инверсии фаз $(\lambda_1, f_1) \leftrightarrow (\lambda_2, f_2)$ —

$$\alpha \rightarrow \frac{1}{\alpha}, \quad \alpha^* \rightarrow \frac{\alpha^*}{\alpha} \quad \text{и} \quad f_2 \rightarrow f_1 = 1 - f_2,$$

мы получим точное решение, которое описывает дисперсную среду с другой (предельной) геометрией матрицы и дисперсной фазы (см. рис. 2):

$$\frac{\alpha^* - \alpha}{\alpha^* + 2\alpha} = \frac{1 - \alpha}{1 + 2\alpha} f_1. \quad (7)$$

Сравнение формул (6) и (7) с границами X–Ш, которые (при $\alpha > 1$) имеют вид

$$1 + \frac{f_2}{\frac{1}{\alpha - 1} + \frac{f_1}{3}} \leq \alpha^* \leq \alpha \left(1 + \frac{f_1}{\frac{\alpha}{1 - \alpha} + \frac{f_2}{3}} \right), \quad (8)$$

показывает, что при $\alpha > 1$ аналитическая формула Максвелла (6) в точности совпадает с нижней границей X–Ш, а решение (7) — с верхней.

Таким образом, формулы (6) и (7) являются точными решениями (без учета взаимодействия частиц), которые совпадают с границами X–Ш и описывают предельные микроструктуры (а) и (б) рис. 2. Физическая реализуемость решения (6) в широком диапазоне параметров f_2 и α доказана сравнением с экспериментами в работах [9, 13]. Область практической применимости решения (7), второй границы X–Ш, требует уточнения.

Из рис. 1 видно, что микроструктура (б) дисперсной среды, когда сферы образуют непрерывную фазу, физически может реализоваться (не нарушая исходного условия однородности и изотропности среды) лишь при относительно

высоких концентрациях f_2 , когда трудно отличить, какая из фаз является непрерывной. Поэтому более реалистичной второй границей (при $\alpha > 1$ – верхняя граница) будет решение, инвариантное относительно преобразования инверсии фаз ($\lambda_1, f_1 \leftrightarrow \lambda_2, f_2$). Такое точное решение легко построить как линейную комбинацию решений (6) и (7):

$$\frac{\alpha^* - 1}{\alpha^* + 2}(\alpha + 2)f_1 + \frac{\alpha^* - \alpha}{\alpha^* + 2\alpha}(2\alpha + 1)f_2 = 0. \quad (9)$$

Нетрудно убедиться, что решение (9) не изменяется относительно замены нижних индексов $1 \leftrightarrow 2$, т.е. оно инвариантно относительно преобразования инверсии фаз. В частном случае, при равных объемных концентрациях фаз $f_1 = f_2 = 0.5$, формула (9) упрощается до уравнения

$$(\alpha^*)^2 + \frac{2\alpha}{\alpha + 1}\alpha^* - 2\alpha = 0. \quad (10)$$

На рис. 3 показано (линия 2) единственное положительное решение уравнения (10) $\alpha^* = f(\alpha)$. Там же приведены точные решения (6) и (7) при $f_1 = f_2 = 0.5$, которые, как было показано выше, определяют границы X–Ш, и многочисленные экспериментальные данные при $0.45 < f_2 < 0.65$, взятые из работы [12], где в виде таблиц приведены данные более 60 измерений различными авторами эффективных коэффициентов теплопроводности в самых различных двухфазных средах. Видно, что и при достаточно высоком значении $f_2 = 0.5$ точное решение (7), которое описывает ситуацию, когда дисперсные частицы образуют непрерывный континуум (рис. 2б), практически реализуется лишь в узком диапазоне $-0.3 < \beta < 0.3$, когда все три решения (6), (7) и (10) практически совпадают друг с другом. В то время как полученное в данной работе точное решение (10), инвариантное относительно преобразования инверсии фаз, не только существенно сужает границы X–Ш, но и четко ограничивает сверху все экспериментальные точки в широком диапазоне приведенных значений параметра $1.81 < \alpha < 743.8$.

На рис. 4 дано сравнение точных решений (6), (7) и (9) при $\alpha = 50$ с экспериментами [12] при близких значениях параметра $37.08 < \alpha < 66.7$ в координатах $\lambda^*/\lambda_1 = f(f_2)$.

Видно, что в диапазоне объемных концентраций дисперсной фазы $0.1 < f_2 < 0.74$ экспериментальные

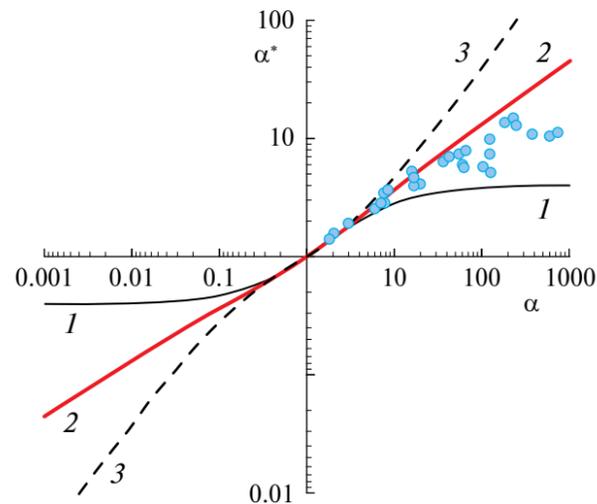


Рис. 3. Границы (линии 1–2) возможных изменений эффективного коэффициента теплопроводности в любой однородной и изотропной дисперсной среде с произвольной микроструктурой при $f_1 = f_2 = 0.5$: 1 – аналитическая формула Максвелла (6); 2 – решение (10), инвариантное относительно преобразования инверсии фаз, 3 – верхняя (нижняя) граница Хашина–Штрикмана при $\alpha > 1$ (при $\alpha < 1$). Точки – эксперименты [12].

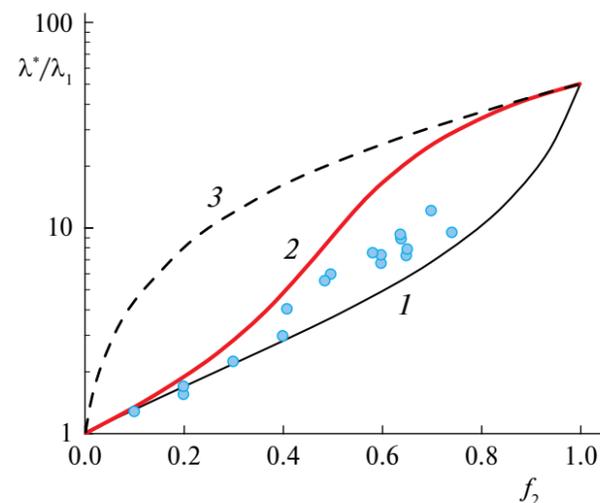


Рис. 4. Границы возможных изменений (линии 1–2) эффективного коэффициента теплопроводности в любой однородной и изотропной дисперсной среде с произвольной микроструктурой при $\alpha = 50$. Обозначения как на рис. 3.

данные ограничиваются снизу аналитической формулой Максвелла, а сверху, как и на рис. 3, – точным решением (9). Верхняя граница X–Ш (линия 3), которая совпадает с точным решением (7), может реализоваться на практике лишь

при $f_2 > 0.8$, где она приближается к решению (9). В работе [12] имеется лишь два экспериментальных подтверждения такой ситуации: $f_2 = 0.9$, $\alpha = 1167.3$, $\alpha^* = 992$ и $f_2 = 0.925$, $\alpha = 1879.4$, $\alpha^* = 1606$.

Таким образом, полученное в данной работе точное решение (9), инвариантное относительно преобразования инверсии фаз, существенно сужает известные границы Хашина–Штрикмана (8), тем самым существенно увеличивая область надежной предсказуемости свойств однородных и изотропных двухфазных дисперсных сред с произвольной микроструктурой.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (госзадание № 121112200122-7).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Li Z. Nanofluidics: An Introduction. CRC Press, 2018. 401 p.
2. Бошнятов Б.В. Микропузырьковые газожидкостные среды и перспективы их использования. Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2016. 170 с.
3. Torquato S. Random Heterogeneous Materials – Microstructure and Macroscopic Properties. N.Y.: Springer, 2002. P. 403–646.
4. Дульнев Г.Н., Новиков В.В. Процессы переноса в неоднородных средах. Л.: Энергоатомиздат. Ленингр. отд-ние, 1991. 248 с.

5. Pabst W., Hřibálová S. Describing the effective conductivity of two-phase and multiphase materials via weighted means of bounds and general power means // JOM. 2019. V. 71 (11). P. 4005–4014. <https://doi.org/10.1007/s11837-019-03693-4>
6. Hashin Z., Shtrikman S. A variational approach to theory of effective magnetic permeability of multiphase materials // J. Appl. Phys. 1962. V. 33 (10). P. 3125–3131. <https://doi.org/10.1063/1.1728579>
7. Bergman D.J. The dielectric constant of a composite material – a problem in classical physics // Physics Reports (Section C of Physics Letters). 1978. V. 43 (9). P. 377–407. [https://doi.org/10.1016/0370-1573\(78\)90009-1](https://doi.org/10.1016/0370-1573(78)90009-1)
8. Felderhof U. Bounds for the effective dielectric constant of a suspension of uniform spheres // J. Phys. C: Solid State Phys. 1982. V. 15. P. 3953–3966. <https://doi.org/10.1088/0022-3719/15/18/011>
9. Бошнятов Б.В. Теплопроводность пузырьковых газожидкостных сред повышенной концентрации // Вестн. Томского гос. ун-та. Математика и механика. 2017. № 45. С. 69–79. <https://doi.org/10.17223/19988621/45/6>
10. Фокин А.Г. Макроскопическая проводимость случайно-неоднородных сред. Методы расчета // УФН. 1996. Т. 166. № 10. С. 1069–1093.
11. Гуськов О.Б., Бошнятов Б.В. Взаимодействие фаз и присоединенная масса дисперсных частиц в потенциальных потоках жидкости // Вестн. Нижегород. ун-та им. Н.И. Лобачевского. 2011. № 4–3. С. 740–741.
12. Samantray P.K., Karthikeyan P., Reddy K.S. Estimating effective thermal conductivity of two-phase materials // Intern. J. Heat and Mass Transfer. 2006. V. 49 (21–22). P. 4209–4219. <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2006.03.015>
13. Бошнятов Б.В. К расчету эффективных коэффициентов переноса в моносферических суспензиях сферических частиц // Письма в ЖТФ. 2015. Т. 41 (3). С. 67–73.

EXACT SOLUTIONS AND BOUNDS FOR THE THERMAL CONDUCTIVITY COEFFICIENT OF A DISPERSED MEDIUM

B. V. Boshenyatov^a

^aInstitute of Applied Mechanics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

Presented by Academician of the RAS A.M. Lipanov

Exact solutions for the thermal conductivity coefficient of a two-phase dispersed medium are obtained using the most general physical principles of locality and symmetry. Two solutions define the well-known Hashin–Shtrikman bounds. The third solution, invariant under the phase inversion transformation, significantly narrows the Hashin–Shtrikman boundaries; this is confirmed by comparison with numerous experiments by other authors. It has been shown that taking into account the remote interaction of dispersed particles at their increased concentration only slightly (less than 3%) affects the result.

Keywords: two-phase dispersed medium, exact solutions, effective thermal conductivity coefficient, interaction of dispersed particles