

УДК 538.945

УНИВЕРСАЛЬНОСТЬ СПЕКТРА МНОГОТЕРМИНАЛЬНОГО
ДЖОЗЕФСОНОВСКОГО КОНТАКТА© 2024 г. А. Ф. Посадский^{1,2,*}, А. Г. Семенов^{1,3,**},
член-корреспондент РАН П. И. Арсеев^{1,***}

Поступило 06.12.2023 г.

После доработки 06.12.2023 г.

Принято к публикации 14.12.2023 г.

В многотерминальных структурах на основе нормальных металлов и сверхпроводников присутствуют андреевские связанные состояния. Их спектр определяется параметрами системы, в частности фазами рассеяния и коэффициентами прохождения в узлах. В сообщении найдены условия, при которых андреевские связанные состояния обладают универсальностью: они не меняются при любом изменении фаз, набираемых квазичастицами при отражении от примеси. Как следствие, спектр полностью определяется транспортными характеристиками системы. Результат получен для структуры в виде M -конечной звезды из нормального металла, каждый из лучей (терминалов) N_k которой приведен в контакт со своим сверхпроводником S_k , $1 \leq k \leq M$. Вместе они образуют т.н. многотерминальный джозефсоновский контакт. В центре его находится немагнитная примесь, описываемая некоторой матрицей рассеяния.

Ключевые слова: сверхпроводимость, многотерминальные структуры, джозефсоновские контакты, андреевские связанные состояния

DOI: 10.31857/S2686740024020034, EDN: KHVNWC

ВВЕДЕНИЕ

В 1962 г. Б. Джозефсоном [1] был предсказан эффект бездиссипативного протекания тока через слабую связь между двумя сверхпроводниками в отсутствие напряжения. Это явление и до настоящего момента является основой для множества теоретических и экспериментальных исследований. В последнее время большой интерес вызывают джозефсоновские контакты с большим числом ($M > 2$) терминалов. Такие системы потенциально могут найти применение в качестве компонентов различных приборов.

Например, термоциркуляторов [2], датчиков магнитного поля [3]. Они не менее интересны и с чисто теоретической точки зрения. В таких структурах реализуются связанные состояния, благодаря явлению андреевского отражения [4]: электрон летит из металла и отражается от сверхпроводника в виде дырки и наоборот. Их уровни энергий зависят от разностей фаз сверхпроводников. Между такими фазовыми спектрами в M -терминальных джозефсоновских контактах и обычными спектрами в $(M - 1)$ -мерных твердых телах была найдена аналогия, послужившая толчком для множества новых исследований [5, 6, 7]. Сверхпроводящие разности фаз на переходе играют роль квазиимпульсов, периодичность энергий уровней по модулю 2π имитирует зону Бриллюэна.

В центре контакта всегда находится рассеиватель, который описывается некоторой S -матрицей. Квадрат модуля ее элемента

$$T_{i,j} = |s_{i,j}|^2$$

¹Физический институт им. П.Н. Лебедева
Российской академии наук, Москва, Россия

²Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет),
Долгопрудный, Московская обл., Россия

³Сколковский институт науки и технологий,
Москва, Россия

*E-mail: posadskij.af@phystech.edu

**E-mail: semenov@lpi.ru

***E-mail: ars@lpi.ru

дает вероятность соответствующей частице перейти из i -го терминала в j -й, а $\alpha_{i,j} = \arg s_{i,j}$ есть приобретаемая в этом процессе фаза. Поскольку матрица рассеяния отвечает за туннелирование между терминалами, уровни энергий андреевских состояний также зависят и от нее.

В данной работе рассматриваются некоторые особенности этой связи. А именно нас интересует вопрос, при каких условиях можно полностью восстановить спектр андреевских состояний, зная лишь транспортные характеристики системы? Транспортными характеристиками мы называем величины $T_{i,j}$. Поскольку они входят линейно в формулу Ландауэра [8] при малых напряжениях и пропорциональны контактансу перехода в одноканальном случае, то их можно измерить на эксперименте. Ток через терминал i тогда представляется в виде [8]

$$I_i = \sum_{j=1}^M G_{i,j} V_{i,j}, \quad (1)$$

где $V_{i,j}$ — напряжение между терминалами i и j , $G_0 = \frac{e^2}{\pi\hbar}$ — квант проводимости.

Простым примером системы, в которой выполняется выше указанное свойство, является короткий SNS-контакт (superconductor — normal metal — superconductor). Известно, что выражение для энергий андреевских состояний такой структуры в некоторых приближениях имеет вид [9]

$$E = \pm\Delta_0 \sqrt{1 - T_{1,2} \sin^2 \frac{\phi_{1,2}}{2}}, \quad (2)$$

где Δ_0 — энергия щели сверхпроводников, $\phi_{1,2} = \phi_1 - \phi_2$ — разность фаз сверхпроводников. Видно, что выражение (2) содержит в себе только вероятность туннелирования $T_{1,2}$, но не фазы элементов S -матрицы.

Можно пойти дальше и рассмотреть короткий трехтерминальный контакт. В случае симметрии к обращению времени матрица рассеяния электронов $\hat{s}_e(E)$ будет симметричной матрицей 3×3 :

$$\hat{s}_e(E) = \begin{pmatrix} s_{1,1} & s_{1,2} & s_{1,3} \\ s_{1,2} & s_{2,2} & s_{2,3} \\ s_{1,3} & s_{2,3} & s_{3,3} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Рассеяние дырок описывается матрицей $\hat{s}_h(E) = \hat{s}_e(-E)$. Кроме того, потребуем, чтобы она не зависела от энергии на масштабе $|E| < \Delta_0$. Тогда, если написать уравнение на спектр и решить его, оно даст простое решение $E = \pm\Delta_0$ и нетривиальное [10, 11]:

$$E = \pm\Delta_0 \sqrt{1 - T_{1,2} \sin^2 \frac{\phi_{1,2}}{2} - T_{2,3} \sin^2 \frac{\phi_{2,3}}{2} - T_{3,1} \sin^2 \frac{\phi_{3,1}}{2}}, \quad (4)$$

где $\phi_{i,j} = \phi_i - \phi_j$. Снова оказалось, что выражение для энергии уровня зависит только от коэффициентов прохождения и не содержит фазы матрицы рассеяния, которые нельзя определить из транспортных измерений. Заметим, что в чисто нормальных структурах такого эффекта не наблюдается. Если рассмотреть потенциальный ящик с несколькими терминалами, то в спектр связанных состояний явно будут входить фазы рассеяния.

В работе для общности выводов рассматривается джозефсоновский контакт с произвольным числом коротких терминалов M . При определенных условиях спектр такой структуры можно восстановить, зная только транспортные характеристики. При этом зависимость от прочих параметров матрицы рассеяния пропадает. Условия, наложенные на S -матрицу, играют в этом определяющую роль. Если хоть одно из них не выполнено, сокращения оставшихся свободных параметров не происходит.

1. ОПИСАНИЕ СТРУКТУРЫ

Опишем подробно изучаемую структуру и приближения, в которых будем работать. Пусть M сверхпроводников $S_1, \dots, S_M$ соединены каждый со своим нормальным металлом $N_1, \dots, N_M$. В свою очередь все нормальные области (т.н. терминалы) соединяются в одной точке. В ней расположена примесь, рассеяние частиц на которой описывается некоторой матрицей рассеяния. Такая система называется многотерминальным джозефсоновским контактом (рис. 1).

Будем считать, что по мере приближения к границам с нормальными областями сверхпроводящие выводы сужаются. В результате задача становится одномерной. Каждый нормальный металл имеет лишь один проводящий канал. Зависимость параметра порядка системы от координат ступенчатая [12]:

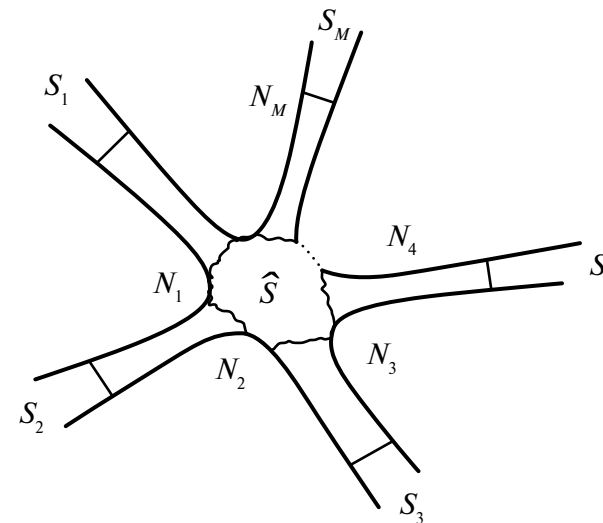


Рис. 1. Схематическое изображение M -терминального джозефсоновского контакта.

$$\Delta(r) = \begin{cases} \Delta_0 e^{i\phi_k}, & r \in S_k, \\ 0, & r \in N_k, \end{cases} \quad 1 \leq k \leq M. \quad (5)$$

В приближении среднего поля [13] возбуждения, которыми описываются процессы в нормальной части системы, можно условно разделить на электроноподобные и дырочноподобные. Для таких квазичастиц хорошо известно явление андреевского отражения [4]. Если электроноподобное возбуждение с энергией $E < \Delta_0$ в нормальном металле сталкивается с NS -границей, то в пределе $\Delta_0 \ll \mu$, где μ — химический потенциал, оно с вероятностью близкой к единице отражается в виде дырки. Аналогичный процесс происходит и с дыркой.

Итого в структуре присутствуют процессы двух типов. Во-первых, нормальное рассеяние электронов в центральной части описывается некоторой матрицей $\hat{s}_e(E)$. Рассеяние дырок описывается тогда матрицей, удовлетворяющей условию¹ $\hat{s}_h(E) = \hat{s}_e(-E)$. Во-вторых, андреевское отражение. Оно происходит во всех терминалах на границах между нормальным металлом и сверхпроводником. Поскольку мы считаем NS -границы чистыми, обычное рассеяние на них подавлено в сравнении с андреевским. Благодаря этим двум процессам в рассматриваемой структуре возникают связанные

¹ Данная связь следует из электрон-дырочной симметрии уравнений Боголюбова—де Жена [7].

состояния таких частиц в подщелевой области энергий.

2. УНИВЕРСАЛЬНОСТЬ СПЕКТРА АНДРЕЕВСКИХ СОСТОЯНИЙ

Из условия существования нетривиального решения уравнений Боголюбова—де Жена [13] в подщелевой области энергий получаем уравнение на спектр, известное как формула Бее-наккера [14]:

$$\det \left(1 - \gamma^2 e^{-i\hat{\phi}} \hat{s}_e(E) e^{i\hat{\phi}} \hat{s}_e^*(-E) \right) = 0, \quad (6)$$

где $\gamma = e^{-i\cos^{-1}\left(\frac{E}{\Delta_0}\right)}$, $\hat{\phi} = \text{diag}\{\phi_1, \dots, \phi_M\}$ — фазы сверхпроводников.

Выясним, при каких условиях уравнение (6) будет зависеть лишь от коэффициентов прохождения. Для этого потребуем, чтобы матрица рассеяния удовлетворяла двум свойствам:

независимость от энергии при $|E| < \Delta_0$

$$\hat{s}_e(E) = \hat{s}_e, \quad (7)$$

симметрия к обращению времени (отсутствие магнитного поля)

$$\hat{s}_e = \hat{s}_e^T. \quad (8)$$

Заметим теперь, что из-за унитарности S -матрицы не все вероятности туннелирования и фазы являются независимыми. Поэтому, прежде чем продвинуться дальше, необходимо определиться с параметризацией.

Произвольная унитарная симметричная матрица $M \times M$ определяется

$$2M^2 - M^2 - \frac{M^2 - M}{2} = \frac{M(M+1)}{2}$$

независимыми параметрами. Выберем в качестве таковых модули недиагональных элементов матрицы $\sqrt{T_{i,j}}$ и фазы диагональных элементов $\alpha_{i,j}$. Нетрудно проверить, что их

в сумме ровно $\frac{M(M+1)}{2}$. Теперь мы готовы сформулировать доказываемое утверждение: в выбранной параметризации спектр андреевских состояний полностью определяется только вероятностями туннелирования $T_{i,j}$ и не зависит от оставшихся параметров, диагональных фаз $\alpha_{i,i}$.

Чтобы показать это, представим $\hat{s}_e$ с учетом ее симметричности в виде произведения трех матриц:

$$\hat{s}_e = e^{i\frac{\hat{\alpha}}{2}} \hat{s}_0 e^{i\frac{\hat{\alpha}}{2}}, \quad (9)$$

где

$$\hat{\alpha} = \text{diag}\{\alpha_{1,1}, \dots, \alpha_{M,M}\},$$

$$\arg(\hat{s}_0)_{i,j} = \frac{1}{2}(2\alpha_{i,j} - \alpha_{i,i} - \alpha_{j,j}).$$

Видно, что в центре находится симметричная унитарная матрица $\hat{s}_0$ с действительными числами на диагонали. Такая матрица определяется $\frac{M(M-1)}{2}$ числом параметров. Выберем в качестве таковых модули недиагональных элементов $\sqrt{T_{i,j}}$. Тогда остальные величины $R_{i,i}$ и $\arg(\hat{s}_0)_{i,j}$ можно выразить через них из условий унитарности. Следовательно, матрица $\hat{s}_0$ полностью определяется параметрами $T_{i,j}$. Если подставить разложение (9) в формулу Беенаккера (6), то можно показать, что диагональные фазы $\alpha_{i,i}$ сокращаются:

$$\det\left(1 - \gamma^2 e^{-i\hat{\phi}} \hat{s}_0 e^{i\hat{\phi}} \hat{s}_0^*\right) = 0. \quad (10)$$

Таким образом, в спектр андреевских состояний не входят неизмеряемые набег фаз отражения. Поэтому, чтобы полностью определить уровни энергии, достаточно знать лишь транспортные характеристики системы.

3. КВАЗИКЛАССИЧЕСКИЕ ТРАЕКТОРИИ

Сокращение фаз в спектре можно продемонстрировать более наглядным способом. Для этого представим нормальную часть рассматриваемой структуры в виде ориентированного графа (рис. 2),

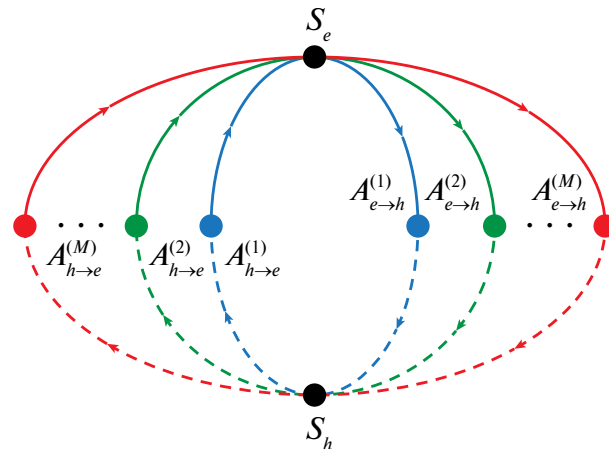


Рис. 2. Граф многотерминального джозефсоновского контакта. Вершины S_e, S_h соответствуют нормальному рассеиванию электронов и дырок, вершины $A_{\alpha \rightarrow \beta}^{(i)}$ — андреевскому рассеянию частицы α в частицу β . По сплошным ребрам перемещаются электроны, по штрихованным — дырки.

по которому могут путешествовать возбуждения. Вершина $S_{e/h}$ соответствует нормальному рассеянию электрона/дырки на центральной примеси. Каждому терминалу отвечают 4 ребра графа: для двух типов частиц и двух направлений движения. Вершина $A_{\alpha \rightarrow \beta}^{(i)}$ соответствует андреевскому отражению частицы α в частицу β в терминале i .

Рассмотрим квазиклассическую траекторию частицы на графе. Для простоты пусть в начале пути она будет электроном. Траектория определяется последовательностью терминалов, которые посещает квазичастица. При таком процессе меняются ее модуль и фаза. Нас интересует только вторая величина. Покажем, что на траекториях, определяющих связанные состояния, набег диагональных фаз сокращается.

Как следует из (9), фаза, приобретаемая электроном при рассеянии из терминала i_1 в терминал i_2 , может быть представлена в виде

$$\frac{\alpha_{i_1, i_1}}{2} + \frac{\alpha_{i_2, i_2}}{2} + \arg(\hat{s}_0)_{i_1, i_2}, \quad (11)$$

где величина $\arg(\hat{s}_0)_{i_1, i_2}$ зависит только от коэффициентов прохождения. Вообще говоря, также на пути частицы присутствует набег фаз за счет отражения от NS -границ, однако на доказательстве это не сказывается. Из связи $s_h = s_e^*$ аналогичное выражение можно записать для дырки. Ее набег фаз будет тогда отличаться от (11) лишь знаком.

Рассмотрим теперь произвольную квазиклассическую траекторию возбуждения в системе. Пусть на своем пути частица проходит последовательность терминалов $i_1 \rightarrow i_2 \rightarrow \dots \rightarrow i_k$. После суммирования вкладов каждого перехода получаем, что набранная при этом фаза равна

$$\frac{\alpha_{i_1, i_1}}{2} + (-1)^k \frac{\alpha_{i_k, i_k}}{2} + \Phi, \quad (12)$$

где Φ не зависит от величин $\alpha_{i,i}$.

Спектр рассматриваемой структуры определяется из правила квантования типа Бора–Зоммерфельда, поэтому вклад в него дают только замкнутые траектории на графе [15]. На таких путях полный набег фаз, как видно из (12), не зависит от фаз отражения. Хотя на произвольных траекториях он, конечно, может быть ненулевой.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В разделе 2 было показано, что спектр многотерминального джозефсоновского контакта полностью определяются транспортными характеристиками структуры, если матрица рассеяния удовлетворяет определенным условиям. Это также легко видеть и в квазиклассическом формализме (раздел 3). Фазы, набираемые на замкнутых траекториях в системе, не зависят от величин $\alpha_{i,i}$.

Требования (7), (8) являются определяющими. Невыполнение любого из них влечет за собой нарушение тонкого сокращения фаз отражения. Симметрию к обращению времени можно легко нарушить, введя магнитное поле в систему. Условие энергонезависимости в области $|E| < \Delta_0$ тоже не всегда может быть выполнено.

Если же матрица удовлетворяет этим требованиям, то такой джозефсоновский контакт демонстрирует нам некоторую универсальность. С физической точки зрения это означает, что спектры таких систем будут полностью идентичны, если одинаковы их транспортные характеристики. Например, на месте центрального рассеивателя может быть любая другая сколь угодно сложная нормальная структура. Однако если величины $T_{i,j}$ для новой системы остаются такими же, то спектр не поменяется. Матрица рассеяния же будет давать некоторое

эффективное описание центральной части контакта без подробностей о ее внутренней структуре.

Заметим, что процедура восстановления спектра по коэффициентам прохождения в общем случае является трудной задачей. Чтобы ее выполнить, вероятно, необходимо выразить все недиагональные фазы $\alpha_{i,j}$ матрицы рассеяния через величины $T_{i,j}$, используя условия унитарности. Однако система уравнений получается сложной, и неочевидно, существует ли у нее решение.

Интересно, что ровно такая же проблема возникает в задачах физики элементарных частиц, поскольку в этой области часто приходится иметь дело лишь с вероятностями рассеяния. В работе [16] исследовалась задача восстановления унитарной матрицы по значениям модулей ее элементов. Было показано, что в симметричном случае задача имеет несколько решений, однако эти решения отличаются только выбором знаков при матричных элементах.

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы выражают благодарность Р.А. Ниязову за помощь в поиске информации о параметризации матриц и А.С. Мельникову за ценные советы и обсуждение данной задачи.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант 23-22-00289).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Josephson B.D.* Possible new effects in superconductive tunnelling // Phys. Lett. 1962.
2. *Hwang S.-Y., Giazotto F., Sothmann B.* Phase-Coherent Heat Circulator Based on Multiterminal Josephson Junctions // Physical Review Applied. 2018. V. 10. P. 044062.
3. *Amin M.H.S., Omelyanchouk A.N., and Zagorskin A.M.* Mesoscopic multiterminal Josephson structures. I. Effects of nonlocal weak coupling // Low Temperature Physics. 2001. V. 27. P. 616.
4. *Andreev A.F.* The thermal conductivity of the intermediate state in superconductors // Sov. Phys. JETP. 1964. P. 1228–1234.
5. *Heck B. van, Mi S., and Akhmerov A.R.* Single fermion manipulation via superconducting phase multiterminal

- Josephson junctions // *Phys. Rev. B*. 2014. V. 90. P. 155450.
6. *Riwar R.-P., Houzet M., Meyer J.S., Nazarov Y.V.* Multiterminal Josephson junctions as topological materials // *Nature Communications*. 2016. V. 7. P. 11167.
 7. *Xie Hong-Yi, Vavilov M.G., and Levchenko A.* Weyl nodes in Andreev spectra of multiterminal Josephson junctions: Chern numbers, conductances, and supercurrents // *Phys. Rev. B*. 2018. V. 97. P. 035443.
 8. *Morfonios C.V., Schmelcher P.* Control of Magnetotransport in Quantum Billiards: Theory, Computation and Applications. *Lecture Notes in Physics*. V. 927. Springer International Publishing Switzerland 2017.
 9. *Bagwell Ph.F.* Suppression of the Josephson current through a narrow, mesoscopic, semiconductor channel by a single impurity // *Phys. Rev. B*. 1992. V. 46.
 10. *Xie Hong-Yi, Vavilov M.G., and Levchenko A.* Topological Andreev bands in three-terminal Josephson junctions // *Phys. Rev. B*. 2017. V. 96. P. 161406(R).
 11. *Savinov D.A.* Scattering-matrix approach to the theory of Josephson transport in mesoscopic multiterminal nodes // *Physica C Superconductivity*. 2015. V. 509. P. 22–28.
 12. *Beenakker C.W.J., and Houten H. van.* The Superconducting Quantum Point Contact // *Nanostructures and Mesoscopic Systems*. 1992. P. 481–497.
 13. *Gennes P.G. de* Superconductivity of Metals and Alloys. N.Y., W.A. Benjamin, 1966.
 14. *Beenakker C.W.J.* Universal Limit of Critical-Current Fluctuations in Mesoscopic Josephson Junctions // *Phys. Rev. Lett.* 1991. V. 67. P. 3836.
 15. *Gnutzmann S. and Smilansky U.* Quantum Graphs: Applications to Quantum Chaos and Universal Spectral Statistics // *Advances in Physics*. 2006. V. 55. P. 527–625.
 16. *Auberson G., Martin A. and Mennessier G.* On the Reconstruction of a Unitary Matrix from Its Moduli // *Commun. Math. Phys.* 1991. V. 140. P. 523–542.

UNIVERSALITY OF THE SPECTRA OF MULTITERMINAL JOSEPHSON JUNCTION

A. F. Posadskii^{a,b}, A. G. Semenov^{a,c}, Corresponding Member of the RAS P. I. Arseev^a

^a*P.N. Lebedev Physical Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

^b*Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University), Dolgoprudny, Moscow Region, Russia*

^c*Skolkovo Institute of Science and Technology, Moscow, Russia*

Andreev bound states are formed in multiterminal structures based on normal metals and superconductors. Their spectrum is determined by the system parameters, in particular the scattering phases and transmission coefficients at the nodes. The article found conditions under which Andreev bound states are universal: they don't change with any change in the reflection phases. As a consequence, the spectrum is completely determined by the transport characteristics of the system. The result was obtained for a structure in the form of a normal metal M -finite star, each of the rays (terminals) N_k of which is in contact with its superconductor S_k , $1 \leq k \leq M$. Together they form a multiterminal Josephson junction. At the center of the structure there is a non-magnetic impurity with its some scattering matrix.

Keywords: superconductivity, multiterminal structures, Josephson junctions, Andreev bound states