

УДК 532.5

РАСЧЕТ ДВУМЕРНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ВОЗМУЩЕНИЙ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ В РАЗЛИЧНЫХ МОДЕЛЯХ СРЕДЫ

© 2023 г. Ю. Д. Чашечкин^{1,*}, А. А. Очиров^{1,**}

Представлено академиком РАН Д.М. Климовым 27.04.2023 г.

Поступило 02.05.2023 г.

После доработки 02.05.2023 г.

Принято к публикации 28.07.2023 г.

Методами теории сингулярных возмущений в линейном приближении впервые получены полные дисперсионные соотношения периодических движений плоской свободной поверхности с положительно определенной частотой и комплексным волновым числом, учитывающим пространственное затухание в вязкой стратифицированной, заряженной жидкости. Регулярные компоненты полного решения описывают плоские гравитационно-капиллярные волны, сингулярные характеризуют лигаменты — тонкие течения, отсутствующие в модели идеальной среды. Полученные дисперсионные соотношения в предельных случаях равномерно переходят в известные выражения для невязкой стратифицированной, вязкой однородной и идеальной жидкостей. Приведены рассчитанные зависимости длины волны и толщины лигамента, групповой и фазовой скорости компонентов от частоты при различных значениях параметров сред.

Ключевые слова: периодические поверхностные возмущения, вязкость, стратификация, поверхностный электрический заряд

DOI: 10.31857/S2686740023060032, **EDN:** HNVKND

Изучение волн на поверхности жидкости, наблюдаемых с доисторических времен и выраźnie-тельно описываемых с античных, действие которых остро ощущают жители прибрежных регионов и мореплаватели, вначале стали проводить экспериментально во Франции и в Англии, а с появлением систем уравнений движения жидкостей — и математически [1]. При выводе уравнений и Л. Эйлер и Дж. Г. Стокс отмечали необходимость учета “гетерогенности жидкости” — неоднородности распределения плотности, которая зависит от давления, температуры и концентрации растворенных веществ. Однако описание поверхностных волн, длина которых в земных условиях меняется в широких пределах, — от километров в инфранизкочастотных гравитационных волнах в океане до долей миллиметра в капиллярных волнах в течениях импакта капли, на практике ведется в приближении однородной жидкости, поскольку естественные вариации плотности малы по сравнению с ее базовым значением.

Начиная с середины XIX в. сформировались два направления изучения волн на поверхности жидкости. Аналитическая теория гравитационных и капиллярных линейных и нелинейных волн малой амплитуды развивалась на основе анализа системы фундаментальных уравнений методами теории возмущений [2]. Для описания волн конечной амплитуды привлекались конститутивные уравнения, среди которых широкое распространения получили модели Кортевега—де Фриза, Бюргерса, Шредингера и другие [1, 3, 4]. Оценки переноса вещества и затухания поверхностных волн с учетом идей теории пограничного слоя [5] проведены в [6, 7]. Влияние поверхностного электрического заряда на волновое движение в вязкой однородной жидкости оценивалось в [8].

По мере накопления данных о закономерностях реального распределения плотности в природных системах — в атмосфере и океане [9], все большее внимание стало уделяться изучению влияния стратификации на свойства внутренних волн в слоистых [10] и непрерывно стратифицированных средах [11]. Распространение поверхностных волн в невязкой экспоненциально стратифицированной среде проанализировано в [12].

Основания теории течений гетерогенных жидкостей рассмотрены в [13]. Полный учет вязкости расширил класс течений, допускаемых уравнени-

¹Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского
Российской академии наук, Москва, Россия

*E-mail: chakin@ipmnet.ru

**E-mail: otchirov@mail.ru

ями, в который, кроме волн, вошли лигаменты, характеризующие тонкие струйки, прослойки и волокна [14]. В данной работе в общей постановке впервые рассмотрена полная задача распространения двумерных инфинитезимальных периодических возмущений поверхности вязкой стратифицированной заряженной жидкости, проведена оценка влияния отдельных факторов.

Рассмотрение проводится в декартовой прямоугольной системе координат Oxz . Ось Ox совпадает с равновесным положением свободной поверхности жидкости $z = 0$, занимающей нижнее полупространство, а ось Oz направлена вертикально вверх против направления действия сил тяжести $\mathbf{g} = (0, -g)$. Свободная поверхность характеризуется коэффициентом поверхностного натяжения σ и его значением $\gamma = \sigma/\rho_{00}$, нормированным на плотность жидкости на равновесном уровне $\rho_{00} = \rho_0(0)$.

На поверхности идеально проводящей жидкости вертикальное электростатическое поле с напряженностью $\mathbf{E}_0$ наводит электрический заряд с поверхностной плотностью $\kappa_0 = E_0/4\pi$. Периодическое возмущение поверхности вызывает изменение электрического потенциала Φ , представленного в виде суммы составляющей $\Phi_0 = -E_0 z$ и волновой добавки $\tilde{\Phi}$.

Рассматривается несжимаемая экспоненциально стратифицированная жидкость с распределением плотности:

$$\rho = \rho_{00}(\exp(-z/\Lambda) + \tilde{\rho}(x, z, t)). \quad (1)$$

Исходная стратификация характеризуется масштабом плавучести $\Lambda = |\ln \rho / d z|^{-1}$, а функция $\tilde{\rho}(x, z, t)$ определяет возмущение плотности, которое считается малым по отношению к единице. Для упрощения выражений не выписываются уравнения состояния, определяющие зависимость плотности от температуры и концентрации растворенных веществ [9], а также дифференциальные уравнения их переноса. В принятых упрощениях двумерная система фундаментальных уравнений [2, 13] принимает вид

$$z < \zeta: \begin{cases} \rho(\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}) = \rho v \Delta \mathbf{u} - \nabla P + \rho \mathbf{g}, \\ \partial_t \rho + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \end{cases} \quad (2)$$

$$z > \zeta: \quad \Delta \Phi = 0. \quad (3)$$

Здесь $\mathbf{u} = (u, w)$ — скорость жидкости, $\zeta = \zeta(x, t)$ — положение смещенной поверхности жидкости. Давление жидкости P складывается из атмосферного P_0 , гидростатического, волнового $\tilde{P}$ и давления, создаваемого электростатическим полем с напряженностью $\mathbf{E}_0$:

$$P = P_0 + \frac{E_0^2}{8\pi} + \int_z^\zeta \rho(x, \xi, t) g d\xi + \tilde{P}(x, z, t). \quad (4)$$

Система дополняется стандартными граничными условиями: кинематическим, динамическим, на электрический потенциал на свободной поверхности жидкости, а также естественными условиями затухания возмущений с удалением от свободной поверхности [2]:

$$z = \zeta: \begin{cases} \partial_t(z - \zeta) + \mathbf{u} \cdot \nabla(z - \zeta) = 0, \\ \mathbf{\tau} \cdot ((\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{u}) + \mathbf{n} \cdot ((\mathbf{\tau} \cdot \nabla) \mathbf{u}) = 0, \\ P - P_0 - \sigma \operatorname{div} \mathbf{n} - 2\rho v \mathbf{n} \cdot ((\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{u}) = 0, \\ \Phi = 0, \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} z \rightarrow -\infty: \quad \mathbf{u} &\rightarrow 0, \\ z \rightarrow \infty: \quad \nabla \tilde{\Phi} &\rightarrow 0, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla(z - \zeta)}{|\nabla(z - \zeta)|} = \frac{-\partial_x \zeta \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_z}{\sqrt{1 + (\partial_x \zeta)^2}}, \quad \mathbf{\tau} = \frac{\mathbf{e}_x + \partial_x \zeta \mathbf{e}_z}{\sqrt{1 + (\partial_x \zeta)^2}}.$$

Здесь $\mathbf{n}$ и $\mathbf{\tau}$ — векторы внешней нормали и касательной к свободной поверхности соответственно. Величина поверхностного электрического заряда характеризуется отношением плотностей энергии электростатического поля и свободной поверхностной энергии $W = E_0^2 / (4\pi \sqrt{\rho_{00} g \sigma})$ — параметром Тонкса—Френкеля [8].

Размерные физические величины, входящие в системы уравнений, начальные и граничные условия, определяют набор собственных временных и пространственных масштабов течений стратифицированной (сильно или слабо) и однородной (потенциально и актуально) жидкостей. Значение величин для жидкости с параметрами воды [9] приведены в табл. 1.

Использование приближения Буссинеска, в котором вариациями плотности $\tilde{\rho}(x, z, t)$ пренебрегается везде, за исключением члена с силой тяжести, и предположения о несжимаемости среды, позволяет при рассмотрении двумерных задач ввести функцию тока ψ , производные которой определяют компоненты скорости жидкости:

$$u = \partial_z \psi, \quad w = -\partial_x \psi. \quad (7)$$

Задача рассматривается в линейном приближении. При изучении инфинитезимальных отклонений свободной поверхности после проведения процедуры сноса граничных условий на равновесный уровень $z = \zeta = 0$ [15], математическая постановка задачи принимает вид:

Таблица 1. Характерные масштабы рассматриваемых сред

Параметр	Жидкость			
	Стратифицированная		Однородная	
	сильно	слабо	потенциально	актуально
Частота плавучести $N, \text{с}^{-1}$	1	0.01	0.00001	0.0
Период плавучести T_b	10 с	10 мин	10 дней	∞
Капиллярно-вязкий временной масштаб $\tau_{vg}^\gamma = \gamma/\nu g, \text{с}$	7	7	7	7
Масштаб стратификации Λ	10 м	100 км	10^8 км	∞
Вязкий волновой масштаб $\delta_N^{gv} = (gv)^{1/3} N^{-1}, \text{см}$	2	200	2×10^5	∞
Микромасштаб Стокса $\delta_N^v = \sqrt{\nu/N}, \text{см}$	0.1	1	30	∞
Капиллярная постоянная $\delta_g^\gamma = \sqrt{\gamma/g}, \text{см}$	0.3	0.3	0.3	0.3
Вязкий масштаб $\delta_g^v = \sqrt[3]{\nu^2/g}, \text{см}$	0.005	0.005	0.005	0.005

$$\begin{cases}
z < 0: \begin{cases} \rho_{00}g\partial_x\zeta + \rho_{00}g\int_z^0 \partial_x\tilde{p}(x,\xi,t)d\xi + \\ + \rho_{00}\partial_{tz}\Psi - \rho_{00}\nu\partial_z\Delta\Psi + \partial_x\tilde{P} = 0, \\ -\rho_{00}\partial_{tx}\Psi + \rho_{00}\nu\partial_x\Delta\Psi + \partial_z\tilde{P} = 0, \\ \partial_t\tilde{p} + \frac{\exp(-z/\Lambda)}{\Lambda}\partial_x\Psi = 0, \end{cases} \\
z > 0: \Delta\tilde{\Phi} = 0,
\end{cases} \quad (8)$$

$$z = 0: \begin{cases} \tilde{P} + 2\rho_{00}\nu\partial_{zx}\Psi + \sigma\partial_{xx}\zeta - \frac{E_0}{4\pi}\partial_z\tilde{\Phi} = 0, \\ \partial_t\zeta + \partial_x\Psi = 0, \\ \partial_{zz}\Psi - \partial_{xx}\Psi = 0, \\ \tilde{\Phi} - E_0\zeta = 0; \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{aligned}
z \rightarrow -\infty: \partial_z\Psi \rightarrow 0, \quad \partial_x\Psi \rightarrow 0, \\
z \rightarrow \infty: \nabla\tilde{\Phi} \rightarrow 0.
\end{aligned} \quad (10)$$

Отыскивается решение системы (8)–(10) для периодических возмущений всех величин вида $A = A_0 \exp(i\mathbf{k}\mathbf{x} - i\omega t)$ с положительно определенной частотой $\omega > 0$ и комплексным волновым вектором $\mathbf{k} = \mathbf{k}_1 + i\mathbf{k}_2$:

$$\begin{pmatrix} \Psi \\ \zeta \\ \tilde{\Phi} \\ \tilde{P} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_m \exp(k_z z) \\ A_m \\ F_m \exp(k_z \Phi z) \\ P_m \exp(k_z z) \end{pmatrix} \exp(ik_x x - i\omega t) + C.C., \quad (11)$$

где символ $C.C.$ обозначает комплексно сопряженное выражение.

Перекрестное дифференцирование уравнений позволяет привести систему (8) к уравнению, со-

держашему только одну неизвестную – функцию тока:

$$\partial_{tt}\Delta\Psi - \nu\partial_t\Delta\Delta\Psi + N^2 \exp(-z/\Lambda)\partial_{xx}\Psi = 0. \quad (12)$$

Подстановка решения (11) в уравнение Лапласа для добавки к электрическому потенциалу (8) и в уравнение (12) приводит к дисперсионным соотношениям, связывающим компоненты волнового вектора между собой и с частотой:

$$k_{z\Phi}^2 = k_x^2, \quad (13)$$

$$\omega(k_x^2 - k_z^2)(i\nu k_x^2 - i\nu k_z^2 + \omega) - N^2 k_x^2 \exp(-z/\Lambda) = 0. \quad (14)$$

Естественные ограничения (10) – затухание возмущений с удалением от свободной поверхности, приводят к следующим условиям физической реализации корней:

$$\text{Re}(k_z) > 0, \quad \text{Re}(k_{z\Phi}) < 0. \quad (15)$$

Дисперсионное соотношение (14) удобно анализировать в безразмерных переменных, если в качестве нормирующих множителей выбирать собственные масштабы среды: временной масштаб – обратная частота плавучести $\tau_b = N^{-1}$, пространственный – вязкий волновой масштаб $\delta_N^{gv} = (\nu g)^{1/3} N^{-1}$ [14]. Отношение собственных масштабов среды – вязкого δ_g^v и вязкого волнового δ_N^{gv} естественно определяет малый параметр задачи $\epsilon = \delta_g^v / \delta_N^{gv} = N\nu^{1/3} / g^{2/3}$. В безразмерном виде дисперсионное соотношение (14) перепишется в виде

$$i\varepsilon(k_{*x}^2 - k_{*z}^2)\omega_* + (k_{*x}^2 - k_{*z}^2)\omega_*^2 - k_{*x}^2 \exp(-z/\Lambda) = 0, \quad (16)$$

где ω_* — безразмерная частота, а $k_{*x,z}$ — безразмерные компоненты волнового вектора.

Решения уравнения (16) находятся методами теории сингулярных возмущений [15, 16] в виде разложений по малому параметру ε , который присутствует в качестве множителя при старшей степени k_{*z}^2 . Для различия вида корней для сингулярного решения введено обозначение — k_l :

$$k_{*z} = \pm \sqrt{k_{*x}^2 - \frac{i\omega_*}{2\varepsilon} + \frac{i\sqrt{4i\varepsilon k_{*x}^2 \exp(-z/\Lambda) + \omega_*^3}}{2\varepsilon\sqrt{\omega_*}}} \approx \pm k_{*x} \frac{\sqrt{\omega_*^2 - \exp(-z/\Lambda)}}{\omega_*}, \quad (17)$$

$$k_{*l} = \pm \sqrt{k_{*x}^2 - \frac{i\omega_*}{2\varepsilon} - \frac{i\sqrt{4i\varepsilon k_{*x}^2 \exp(-z/\Lambda) + \omega_*^3}}{2\varepsilon\sqrt{\omega_*}}} \approx \pm \frac{1-i}{\sqrt{2\varepsilon}} \sqrt{\omega_*}.$$

В приближенных решениях (17) при положительно определенной частоте периодического возмущения для регулярного компонента выполняется неравенство $|\text{Im}(k_z)| \ll |\text{Re}(k_z)|$, а для сингулярного компонента справедливо $|\text{Im}(k_l)| \sim |\text{Re}(k_l)|$.

Решение k_z описывает волновую часть периодического течения, а k_l — сопутствующий волне лигамент, характеризующий тонкую структуру течения. Выбор знаков корней в (17) определяется физическими условиями (15).

Из граничных условий (9) при подстановке решения (11) с учетом (17) следует дисперсионное уравнение, связывающее компоненты волнового вектора с частотой ω :

$$(k_x^2 + k_z^2)(k_l \omega^2 - gk_x^2 - \sqrt{g\gamma} k_x^2 k_{z\Phi} W - \gamma k_x^4 + i\omega \nu k_l (3k_x^2 - k_l^2)) - (k_x^2 + k_l^2)(k_z \omega^2 - gk_x^2 - \sqrt{g\gamma} k_x^2 k_{z\Phi} W - \gamma k_x^4 + i\omega \nu k_z (3k_x^2 - k_z^2)) = 0. \quad (18)$$

Проведение обезразмеривания (18) приводит к дисперсионному уравнению:

$$(k_{*l}^2 + k_{*x}^2)(\delta^2 \varepsilon k_{*x}^4 + i\varepsilon^2 \omega_* k_{*z}(k_{*z}^2 - 3k_{*x}^2) + k_{*x}^2(1 + \delta\sqrt{\varepsilon} k_{*z\Phi} W) - \varepsilon k_{*z} \omega_*^2) - (k_{*z}^2 + k_{*x}^2) \times (\delta^2 \varepsilon k_{*x}^4 + i\varepsilon^2 \omega_* k_{*l}(k_{*l}^2 - 3k_{*x}^2) + k_{*x}^2(1 + \delta\sqrt{\varepsilon} k_{*z\Phi} W) - \varepsilon k_{*l} \omega_*^2) = 0. \quad (19)$$

Здесь символом $\delta = \delta_g^\gamma / \delta_N^\nu = \sqrt{N\gamma/vg}$ обозначен безразмерный параметр, характеризующий отношение капиллярной постоянной и микромасштаба Стокса. Подстановка в (19) приближенных значений (17) с учетом (13) приводит к следующему выражению:

$$k_{*x} \left(\frac{1-i}{\sqrt{2\varepsilon}} \sqrt{\omega_*} - k_{*x} \frac{\sqrt{\omega_*^2 - 1}}{\omega_*} \right) \left[\frac{1-i}{\sqrt{2\varepsilon}} \sqrt{\omega_*} k_{*x} + \left(\frac{\sqrt{\omega_*^2 - 1}}{\omega_*} - \frac{1-i}{\sqrt{2}} W \delta \sqrt{\omega_*} \right) k_{*x}^2 + \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}} \delta^2 \sqrt{\omega_*} k_{*x}^3 - \frac{\sqrt{\omega_*^2 - 1}}{\omega_*} \delta W k_{*x}^3 - \frac{1-i}{\sqrt{2}} \omega_*^{3/2} \sqrt{\omega_*^2 - 1} \right) \sqrt{\varepsilon} + \left(k_{*x} (1 - \omega_*^2) + \frac{\delta^2 \sqrt{\omega_*^2 - 1}}{\omega_*} k_{*x}^4 \right) \varepsilon \right] = 0. \quad (20)$$

Уравнение (20) имеет 6 корней, что, с учетом выражений (13) и (17), согласуется с условием полноты решения системы (8)–(9). Нетривиальные решения (20) не приведены в силу своей громоздкости.

В приближении однородной жидкости описание течений упрощается. Однако при этом из основных уравнений фактически исключается такое важное свойство среды, как плотность, которая, как общий множитель, сокращается и не входит в дисперсионные соотношения. В анализе не участвуют и другие собственные параметры среды — частота (период) плавучести, вязкий волновой масштаб и микромасштаб Стокса. При этом дисперсионное соотношение (14) принимает вид [14]:

$$(k_x^2 - k_z^2)(i\nu k_x^2 - i\nu k_z^2 + \omega) = 0. \quad (21)$$

Уравнение (21) также имеет два вида решений, описывающих волновое движение k_z и присоединенный лигамент k_l :

$$k_z = \pm k_x, \quad k_l = \pm \sqrt{k_x^2 - i \frac{\omega}{\nu}}. \quad (22)$$

Вид решения (22) определяет еще одну форму микромасштаба Стокса $\delta_\omega^\nu = \sqrt{\nu/\omega}$, см, в дополнение к приведенным в табл. 1.

Дисперсионное соотношение (18) с учетом (22) также упрощается:

$$k_x [2k_x (k_l \omega^2 - gk_x^2 - \sqrt{g\gamma} k_x^2 k_{z\Phi} W - \gamma k_x^4 + \\ + i\omega \nu k_l (3k_x^2 - k_l^2)) - (k_x^2 + k_l^2)(\omega^2 - gk_x - \\ - \sqrt{g\gamma} k_x k_{z\Phi} W - \gamma k_x^3 + 2i\omega \nu k_x^2) = 0. \quad (23)$$

В модели однородной жидкости параметры обезразмеривания отличаются от введенных ранее в силу исключения части собственных параметров задачи, характеризующих стратификацию. Набор оставшихся физических переменных позволяет определить следующие характерные масштабы: времени — $\tau_v^y = \gamma/(\nu g)$ и длины — $\delta_g^v = \sqrt[3]{\nu^2/g}$. При выбранных параметрах естественным образом возникает малый параметр $\varepsilon_h = \delta_g^v/\delta_g^y = \sqrt[6]{g\nu^4/\gamma^3}$, определяющий отношение вязкого масштаба и капиллярной постоянной. Дисперсионное уравнение, связывающее безразмерные компоненты волнового вектора k_{*x} и частоту ω_* , принимает вид

$$k_{*x} [2k_{*x} (\varepsilon_h^6 k_{*l} \omega_*^2 - \varepsilon_h^2 k_{*x}^2 - \varepsilon_h k_{*x}^2 k_{*z\Phi} W - k_{*x}^4 + \\ + i\varepsilon_h^4 \omega_* k_{*l} (3k_{*x}^2 - k_{*l}^2)) - (k_{*x}^2 + k_{*l}^2) \times \\ \times (\varepsilon_h^6 \omega_*^2 - \varepsilon_h^2 k_{*x}^2 - \varepsilon_h k_{*x}^2 k_{*z\Phi} W - k_{*x}^3 + 2i\varepsilon_h^4 \omega_* k_{*x}^2) = 0. \quad (24)$$

Выбор корней (22), (24) осуществляется с учетом условия (15).

Присутствие поверхностного электрического заряда в постановке задачи не добавляет качественно новых решений по сравнению с [14]. Анализ показывает, что поверхностный электрический заряд не оказывает заметного влияния на тонкую структуру поверхностных периодических течений. Его влияние на волновой компонент ограничено областью капиллярно-гравитационных волн: увеличение поверхностного электрического заряда приводит к уменьшению длины волны при фиксированной частоте периодических возмущений. Зависимости длины волны $\lambda = 2\pi/\sqrt{\text{Re}(k_x)^2 + \text{Im}(k_z)^2}$ от частоты периодического движения для жидкости с параметрами воды ($\sigma = 72$ эрг/см², $\rho_{00} = 1$ г/см³, $\nu = 0.01$ см²/с) при разных значениях поверхностного электрического заряда в области частот, в которой заметно влияние заряда, построены на рис. 1.

В модели незаряженной жидкости остаются справедливыми выражения (17) для стратифицированной жидкости. Дисперсионные соотношения, связывающие компоненты волнового вектора и частоту периодического возмущения в стратифицированной жидкости, нормированные на собственные параметры задачи: временной — $\tau_b = N^{-1}$, пространственный — вязкий волновой масштаб $\delta_N^{gv} = (\nu g)^{1/3} N^{-1}$, можно получить непосредственно из граничных условий или выполнив

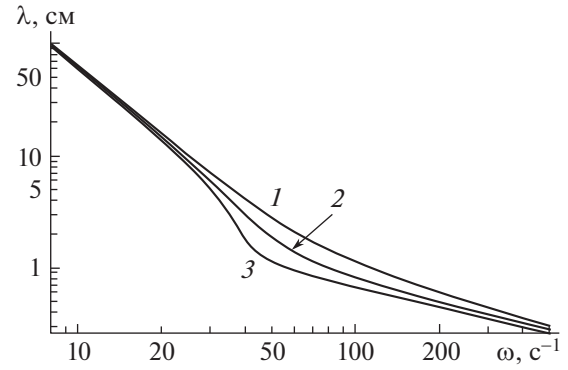


Рис. 1. Зависимость длины волны (регулярного компонента периодического течения) от частоты для сильно стратифицированной жидкости с параметрами воды, $N = 1$ с⁻¹, при разных значениях поверхностного заряда: кривые 1–3 — $W = 0, 1.0, 1.5$ соответственно.

предельный переход $W \rightarrow 0$ в (19) и в приближенном дисперсионном уравнении (20). При этом безразмерные параметры, характеризующие отношение собственных масштабов задачи $\varepsilon = \delta_g^v/\delta_N^{gv} = N\nu^{1/3}/g^{2/3}$ и $\delta = \delta_g^y/\delta_N^v = \sqrt{N\gamma/\nu g}$ остаются такими же, как и в модели заряженной жидкости.

С точностью до главных членов разложения дисперсионное уравнение в незаряженной вязкой стратифицированной жидкости принимает вид

$$k_{*x} \left(\frac{1-i}{\sqrt{2\varepsilon}} \sqrt{\omega_*} - k_{*x} \frac{\sqrt{\omega_*^2 - 1}}{\omega_*} \right) \left[\frac{1-i}{\sqrt{2\varepsilon}} \sqrt{\omega_*} k_{*x} + \right. \\ \left. + \frac{\sqrt{\omega_*^2 - 1}}{\omega_*} k_{*x}^2 + \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}} \delta^2 \sqrt{\omega_*} k_{*x}^3 - \frac{1-i}{\sqrt{2}} \omega_*^{3/2} \sqrt{\omega_*^2 - 1} \right) \sqrt{\varepsilon} + \right. \\ \left. + \left(k_{*x} (1 - \omega_*^2) + \frac{\delta^2 \sqrt{\omega_*^2 - 1}}{\omega_*} k_{*x} \right) \varepsilon \right] = 0. \quad (25)$$

В модели однородной жидкости с постоянной плотностью, в которой сохраняется сингулярный компонент течения, остаются справедливыми и соотношения между компонентами волнового вектора (22). В размерном виде дисперсионное уравнение в вязкой однородной жидкости согласуется с полученным в [17]:

$$k_x [2k_x (k_l \omega^2 - gk_x^2 - \gamma k_x^4 + i\omega \nu k_l (3k_x^2 - k_l^2)) - \\ - (k_x^2 + k_l^2)(\omega^2 - gk_x - \gamma k_x^3 + 2i\omega \nu k_x^2) = 0. \quad (26)$$

Используя параметры нормировки $\tau_v^y = \gamma/(\nu g)$ и длины $\delta_g^v = \sqrt[3]{\nu^2/g}$ и малый параметр $\varepsilon_h =$

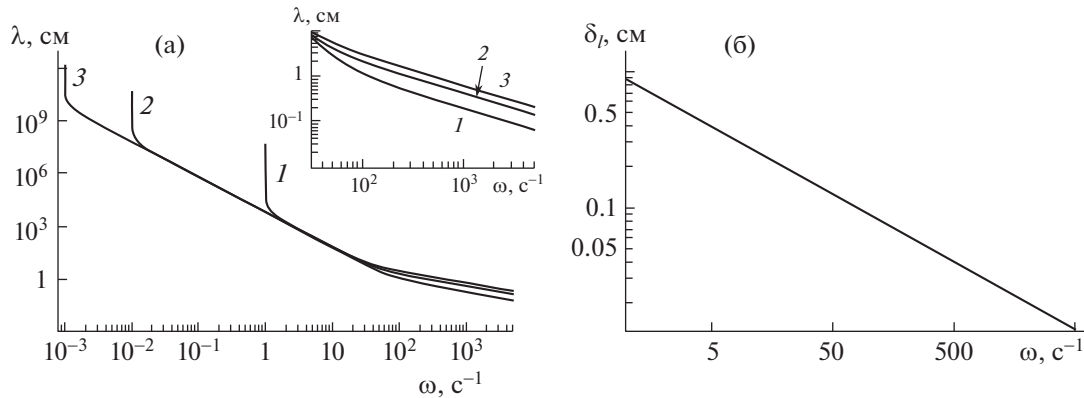


Рис. 2. Зависимость масштабов компонентов течения от частоты для стратифицированной жидкости с параметрами воды: а — длины волн, кривые 1–3: $N = 1, 0.01, 0.001 \text{ c}^{-1}$; б — толщины лигамента в сильно стратифицированной жидкости, $N = 1 \text{ c}^{-1}$.

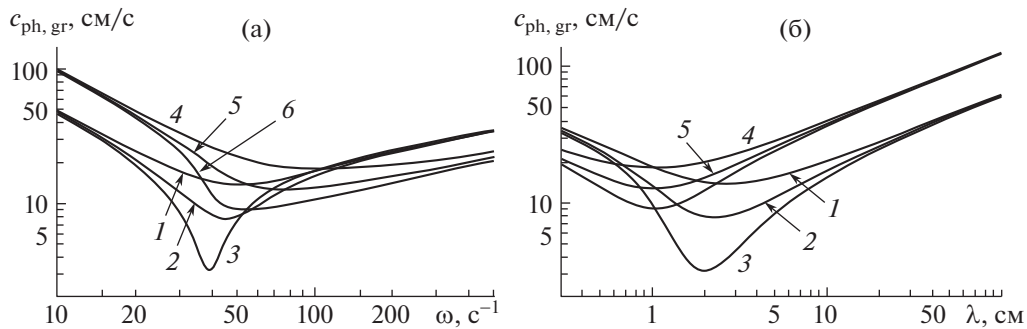


Рис. 3. Зависимости групповых (кривые 1–3) и фазовых скоростей (кривые 4–6) волнового компонента периодического течения в сильно стратифицированной жидкости с параметрами воды, $N = 1 \text{ c}^{-1}$: а — от частоты ω ; б — от длины волны λ , на линиях (1, 4) (2, 5) и (3, 6) $W = 0, 1.0, 1.5$ соответственно).

$= \delta_g^v / \delta_g^y = \sqrt[6]{g v^4 / \gamma^3}$, получим безразмерное дисперсионное уравнение:

$$k_{*x} [2k_{*x} (\epsilon_h^6 k_{*l} \omega_*^2 - \epsilon_h^2 k_{*x}^2 - k_{*x}^4 + i \epsilon_h^4 \omega_* k_{*l} (3k_{*x}^2 - k_{*l}^2)) - (k_{*x}^2 + k_{*l}^2) (\epsilon_h^6 \omega_*^2 - \epsilon_h^2 k_{*x}^2 - k_{*x}^3 + 2i \epsilon_h^4 \omega_* k_{*x}^2)] = 0. \quad (27)$$

В решении дисперсионных уравнений с учетом вязкости присутствуют регулярные компоненты, мнимая часть компонентов волнового вектора которых много меньше действительной части. Такие решения описывают волновое изменение положения свободной поверхности жидкости.

В рассматриваемых моделях полные решения также включают сингулярные компоненты, у которых мнимая и действительная части волнового вектора близки по своим абсолютным значениям. Такие решения описывают лигаменты — тонкие (в случае стратифицированной жидкости — высокоградиентные) компоненты течения, сопровож-

дающие поверхностные волны [14]. Анализ дисперсионных соотношений показывает, что степень выраженности стратификации оказывает влияние на масштаб регулярного компонента периодического течения (длину волны) и практически не меняет масштаб сингулярного компонента (лигамента $\delta_l = 2\pi / \sqrt{\text{Re}(k_x)^2 + \text{Im}(k_l)^2}$). На рис. 2 построены зависимости масштабов волны (рис. 2а) и сопровождающего лигамента (рис. 2б), в жидкости с параметрами воды в модели однородной жидкости и стратифицированной жидкости с различными значениями частоты плавучести.

Рассчитанные зависимости фазовых и групповых скоростей волн от частоты периодического возмущения ω и масштаба волнового компонента течения λ приведены на рис. 3.

Расчеты показали, что поверхностный электрический заряд не оказывает заметного влияния на характеристики скоростей переноса фазы и энергии лигаментами. На рис. 4 представлены зависимости фазовой и групповой скорости лига-

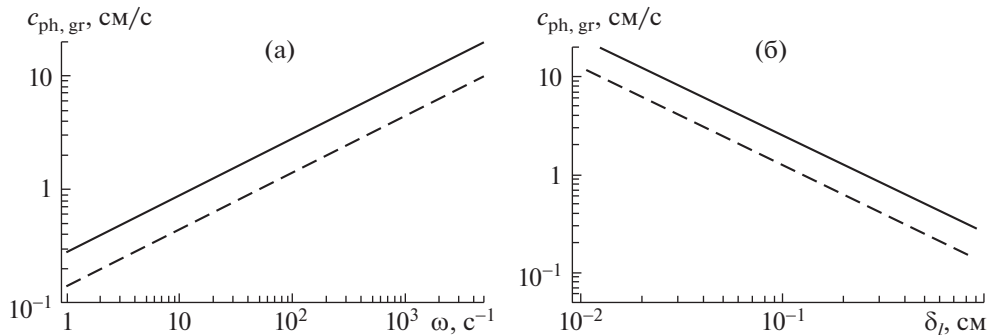


Рис. 4. Зависимости групповой (сплошная линия) и фазовой скоростей (штриховая линия) лигамента в сильно стратифицированной жидкости с параметрами воды, $N = 1 \text{ с}^{-1}$: от частоты (а) и от масштаба лигамента (б).

мента в сильно стратифицированной жидкости $N = 1 \text{ с}^{-1}$ с параметрами воды от частоты ω (рис. 4а) и масштаба лигамента δ_l (рис. 4б).

В модели идеальной жидкости основные уравнения движения предельно редуцируются и дисперсионные соотношения вырождаются — пропадает сингулярное решение и остается только волновой компонент. Связь между компонентами волнового вектора в среде с частотой плавучести N принимает вид [12]:

$$\omega^2(k_x^2 - k_z^2) - N^2 k_x^2 \exp(-z/\Lambda) = 0. \quad (28)$$

Дисперсионное соотношение между компонентами волнового вектора тоже получается достаточно простым:

$$k_z^2 = k_x^2(1 - N_\omega^2) \exp(-z/\Lambda), \quad N_\omega = N/\omega. \quad (29)$$

Зависимость компонента волнового вектора от частоты определяется редуцированным дисперсионным уравнением, которое с учетом (29) запишется:

$$\gamma k_x^3 + g k_x - \omega^2 \sqrt{1 - N_\omega^2} = 0. \quad (30)$$

Анализ показывает, что физически реализуем оказывается только один корень уравнения (30), который описывает волновой компонент периодического поверхностного течения в стратифицированной жидкости. Он также может быть получен при помощи предельных переходов в соответствующих решениях более полной задачи.

Решения дисперсионных уравнений (17) и (19), (22) и (24), (17) и (25), (22) и (27), (29) и (30) определяют требования к методике лабораторного эксперимента в части выбора размеров области наблюдения, длительности регистрации, временного и пространственного разрешения инструментов при изучении периодических течений на основе моделей распределения плотности гетерогенной, однородной или заряженной жидкости с учетом эффектов диссипации.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 19-19-00598-П “Гидродинамика и энергетика капли и капельных струй: формирование, движение, распад, взаимодействие с контактной поверхностью”, <https://rscf.ru/project/19-19-00598/>).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Darrigol O. Worlds of flow. A history of hydrodynamics from the Bernoullis to Prandtl. Oxford. University Press. 2005. 356 p.
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Курс теорет. физ. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
3. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 638 с.
4. Kistovich A.V., Chashechkin Yu.D. Propagating stationary surface potential waves in a deep ideal fluid // Water Resources. 2018. V. 45 № 5. P. 719–727. <https://doi.org/10.1134/S0097807818050111>
5. Schlichting H. Boundary Layer Theory. N.Y.: McGraw Hill Co, 1955. 812 p.
6. Longuet-Higgins M.S. Mass transport in the boundary layer at a free oscillating surface. // J. Fluid Mech. 1960. V. 8. № 2. P. 293–306. <https://doi.org/10.1017/S002211206000061X>
7. Liu A., Davis S. Viscous attenuation of mean drift in water waves. // J. Fluid Mech. 1977. V. 81. № 1. P. 63–84. <https://doi.org/10.1017/S0022112077001918>
8. Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И. Нелинейные периодические волны на заряженной поверхности глубокой маловязкой электропроводной жидкости // Журнал технической физики. 2004. Т. 74. №. 3. С. 5–13.
9. Федоров К.Н. Тонкая термохалинная структура вод Мирового океана. Л.: Гидрометеиздат, 1976. 184 с.
10. Chandrasekhar S. Hydrodynamic and hydromagnetic stability, International Series of Monographs on Physics. Oxford: Clarendon Press, 1961. 654 p.
11. Лайтхилл Дж. Волны в жидкостях. М.: Мир, 1981. 598 с.
12. Очиров А.А., Чашечкин Ю.Д. Двумерные периодические волны в невязкой непрерывно стратифи-

- цированной жидкости // Известия РАН. Физика атмосферы и океана. 2022. Т. 58. № 5. С. 524–533. <https://doi.org/10.31857/S000235152205008X>
13. Chashechkin Yu.D. Foundations of engineering mathematics applied for fluid flows // Axioms. 2021. V. 10. № 4. P. 286. <https://doi.org/10.3390/axioms10040286>
 14. Chashechkin Yu.D., Ochirov A.A. Periodic waves and ligaments on the surface of a viscous exponentially stratified fluid in a uniform gravity field // Axioms. 2022. V. 11. No. 8. P. 402. <https://doi.org/10.3390/axioms11080402>
 15. Nayfeh A., Hassan S. The method of multiple scales and non-linear dispersive waves // J. Fluid Mechanics. 1971. V. 48. № 3. P. 463–475.
 16. Найфэ А. Введение в методы возмущений М.: Мир, 1984. 535 с.
 17. Кистович А.В., Чашечкин Ю.Д. Отражение капиллярно-гравитационных волн от областей поверхностной конвекции // ДАН. 2005. Т. 404. № 2. С. 184–187.

FREE SURFACE TWO-DIMENSIONAL PERIODIC DISTURBANCES IN VARIOUS MODELS OF THE FLUID

Yu. D. Chashechkin^a and A. A. Ochirov^a

^a*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

Presented by Academician of the RAS D.M. Klimov

The complete dispersion relations of a flat free surface periodic perturbations with a positive definite frequency and a complex wavenumber taking into account spatial attenuation in a viscous stratified charged liquid were obtained in a linear approximation for the first time by methods of the theory of singular perturbations. Regular components of the complete solution describe plane gravitational-capillary waves. Singular components characterize ligaments – thin flows that are absent in the model of an ideal medium. The obtained dispersion relations in extreme cases uniformly transform into known expressions for inviscid stratified, viscous homogeneous and ideal liquids. The calculated dependencies of the wavelength and thickness of the ligament, the group and phase velocity of the components on the frequency at different values of the media parameters are given.

Keywords: periodic surface disturbances, viscosity, stratification, surface electric charge