

УДК 539.3

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕОДНОРОДНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В ПРЯМОУГОЛЬНИКЕ

© 2023 г. М. Д. Коваленко^{1,*}, А. П. Кержаев², И. В. Меньшова^{2,3}, Ю. Н. Карнет¹

Представлено академиком РАН А.М. Липановым 12.04.2023 г.

Поступило 26.04.2023 г.

После доработки 26.04.2023 г.

Принято к публикации 27.07.2023 г.

Предложен метод построения точных решений краевых задач теории упругости в прямоугольнике с ребрами жесткости, расположенными внутри области (неоднородная задача). Решения представляются в виде рядов по собственным функциям Папковича–Фадля, коэффициенты которых определяются в явном виде. Метод базируется на соотношении ортогональности Папковича и развитой авторами теории разложений по собственным функциям Папковича–Фадля в однородных краевых задачах теории упругости в прямоугольнике (бигармоническая проблема). Последовательность решения продемонстрирована на примере четно-симметричной задачи для прямоугольника, стороны которого свободны, а внешняя нагрузка действует вдоль ребра жесткости, расположенного на оси симметрии прямоугольника.

Ключевые слова: неоднородная задача, прямоугольник, собственные функции Папковича–Фадля, соотношение ортогональности Папковича, точные решения

DOI: 10.31857/S268674002306010X, **EDN:** HTMBLZ

ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ И МЕТОД РЕШЕНИЯ

Рассмотрим прямоугольник $\{R : |x| \leq d, |y| \leq 1\}$ со свободными сторонами. Вдоль его вертикальной оси y прикреплено ребро жесткости, к которому приложена нагрузка, действующая вдоль ребра (плоское напряженное состояние). Последовательность решения задачи следующая. Сначала рассмотрим неоднородную четно-симметричную краевую задачу для бесконечной полосы со свободными сторонами, в которой внешняя нагрузка действует вдоль оси y . Решение этой задачи записывается в виде рядов по собственным функциям Папковича–Фадля, коэффициенты которых определяются в замкнутом виде с помощью соотношения ортогональности Папковича [1–8]. Затем из условия равновесия элементарного участка ребра с помощью разложений в ряд Лагранжа по собственным функциям Папкови-

ча–Фадля [9] определим контактные напряжения между ребром жесткости и пластиной, которые подставим в решение неоднородной задачи для полосы. В результате найдем решение для полосы с ребром жесткости. Наконец, суперпозицией этого решения и решения однородной четно-симметричной задачи для прямоугольника со свободными горизонтальными сторонами и заданными на его торцах нормальными и касательными напряжениями [10] удовлетворим требуемым граничным условиям на торцах прямоугольника и тем самым получим решение рассматриваемой задачи. Таким образом, решения на каждом из трех этапов представляются рядами по собственным функциям Папковича–Фадля, коэффициенты которых определяются в явном виде. Благодаря этому удастся построить точное решение задачи.

РЕШЕНИЕ НЕОДНОРОДНОЙ ЗАДАЧИ В ПОЛОСЕ

Согласно [8] решение неоднородной задачи в полосе $\{|x| < \infty, |y| \leq 1\}$ можно представить в виде $(\operatorname{Re} \lambda_k < 0)$

$$\sigma_x(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re}[A_k s_x(\lambda_k, y) e^{\lambda_k |x|}],$$

¹Институт прикладной механики

Российской академии наук, Москва, Россия

²Институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики

Российской академии наук, Москва, Россия

³Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

*E-mail: kov08@inbox.ru

$$\begin{aligned}\sigma_y(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re}[A_k s_y(\lambda_k, y) e^{\lambda_k |x|}], \\ \tau_{xy}(x, y) &= \operatorname{sign} x \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re}[A_k t_{xy}(\lambda_k, y) e^{\lambda_k |x|}], \\ U(x, y) &= \operatorname{sign} x \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re}[A_k \xi(\lambda_k, y) e^{\lambda_k |x|}], \\ V(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re}[A_k \chi(\lambda_k, y) e^{\lambda_k |x|}].\end{aligned}\quad (1)$$

В формулах (1) $U(x, y) = Gu(x, y)$, $V(x, y) = Gv(x, y)$, где G — модуль сдвига, а $u(x, y)$ и $v(x, y)$ — продольное и поперечное перемещения соответственно; A_k — неизвестные коэффициенты разложений; λ_k — комплексные нули целой функции экспоненциального типа [11]

$$L(\lambda) = \lambda + \sin \lambda \cos \lambda. \quad (2)$$

Функция $L(\lambda)$ (кроме нулевого) имеет бесконечный набор четверок комплексных нулей $\pm \lambda_k, \pm \bar{\lambda}_k$ ($k = 1, 2, \dots$).

Функции

$$\begin{aligned}s_x(\lambda_k, y) &= (1 + \nu) \lambda_k \{(\sin \lambda_k - \lambda_k \cos \lambda_k) \cos \lambda_k y - \\ &\quad - \lambda_k y \sin \lambda_k \sin \lambda_k y\}, \\ s_y(\lambda_k, y) &= (1 + \nu) \lambda_k \{(\sin \lambda_k + \lambda_k \cos \lambda_k) \cos \lambda_k y + \\ &\quad + \lambda_k y \sin \lambda_k \sin \lambda_k y\}, \\ t_{xy}(\lambda_k, y) &= (1 + \nu) \lambda_k^2 (\cos \lambda_k \sin \lambda_k y - y \sin \lambda_k \cos \lambda_k y), \\ \xi(\lambda_k, y) &= \left(\frac{1 - \nu}{2} \sin \lambda_k - \frac{1 + \nu}{2} \lambda_k \cos \lambda_k \right) \cos \lambda_k y - \\ &\quad - \frac{1 + \nu}{2} \lambda_k y \sin \lambda_k \sin \lambda_k y, \\ \chi(\lambda_k, y) &= \left(\frac{1 + \nu}{2} \lambda_k \cos \lambda_k + \sin \lambda_k \right) \sin \lambda_k y - \\ &\quad - \frac{1 + \nu}{2} \lambda_k y \sin \lambda_k \cos \lambda_k y\end{aligned}\quad (3)$$

называются собственными функциями Папковича—Фадля, соответствующими краевой задаче в бесконечной полосе со свободными сторонами, ν — коэффициент Пуассона.

Коэффициенты A_k определяются с помощью соотношения ортогональности Папковича [8]:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 [s_x(\lambda_k, y) \xi(\lambda_m, y) - \chi(\lambda_k, y) t_{xy}(\lambda_m, y)] dy = \\ = \begin{cases} 2(1 + \nu) \lambda_m^3 & (\lambda_k = \lambda_m), \\ 0 & (\lambda_k \neq \lambda_m). \end{cases}\end{aligned}\quad (4)$$

В этой формуле числа λ_k и сопряженные с ними $\bar{\lambda}_k$ считаются различными. Поэтому при $\lambda_m = \bar{\lambda}_k$ интегралы в (4) будут равны нулю. Умно-

жим левую и правую части (4) последовательно на A_m и $\bar{A}_m$, затем сложим получившиеся выражения и просуммируем их по индексу $m = 1, 2, \dots$. Обозначив через

$$\begin{aligned}U(y) &= \sum_{m=1}^{\infty} [A_m \xi(\lambda_m, y) + \bar{A}_m \xi(\bar{\lambda}_m, y)], \\ \tau(y) &= \sum_{m=1}^{\infty} [A_m t_{xy}(\lambda_m, y) + \bar{A}_m t_{xy}(\bar{\lambda}_m, y)],\end{aligned}\quad (5)$$

на основании соотношения ортогональности (4) найдем

$$A_k = \frac{1}{2(1 + \nu) \lambda_k^3} \int_{-1}^1 [s_x(\lambda_k, y) U(y) - \chi(\lambda_k, y) \tau(y)] dy \quad (k \geq 1).$$

Формулы для комплексно сопряженных чисел $\bar{A}_k$ получаются из (6) при замене λ_k на $\bar{\lambda}_k$. Из условия симметрии $U(y) = 0$. Поэтому получим

$$A_k = \frac{-1}{2(1 + \nu) \lambda_k^3} \int_{-1}^1 \chi(\lambda_k, y) \tau(y) dy. \quad (7)$$

Пусть $Y(y) \delta(x)$ — внешняя нагрузка, действующая вдоль оси y в плоскости пластины, где $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака [12]. Так как задача четно-симметрична, то $Y(y)$ нечетна. Можно показать, что

$$Y(y) = -2 \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re}[A_k t_{xy}(\lambda_k, y)] = -2\tau(y) \quad (8)$$

есть взятый с обратным знаком скачок касательных напряжений при $x = 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОНТАКТНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ МЕЖДУ РЕБРОМ ЖЕСТКОСТИ И ПОЛОСОЙ

Рассмотрим уравнение равновесия элементарного участка ребра

$$fd\sigma(y) - 2r\tau(y)dy + q(y)dy = 0. \quad (9)$$

Здесь f — площадь поперечного сечения ребра, $\sigma(y)$ — напряжение в ребре, $\tau(y)$ — касательные напряжения на стыке ребра и пластины, ρ — толщина пластины, $q(y)$ — нагрузка, приложенная к ребру жесткости вдоль его оси (нечетная функция).

Обозначим через E_1 модуль упругости ребра. Воспользовавшись законом Гука для ребра и считая перемещения в ребре жесткости равными перемещениям в пластине при $x = 0$, а $\tau(y) = \tau_{xy}(0+, y)$, из (9) получим уравнение (штрихом обозначена производная по y)

$$DV''(0, y) - \tau_{xy}(0+, y) + \frac{q(y)}{2\rho} = 0, \quad D = \frac{E_1 f}{2G\rho}. \quad (10)$$

Между собственными функциями Папковича–Фадля имеется следующая связь, являющаяся следствием закона Гука и уравнений равновесия в напряжениях [13]:

$$s'_y(\lambda_k, y) = \frac{2}{1-\nu} [\chi''(\lambda_k, y) + \nu \lambda_k \xi'(\lambda_k, y)], \quad (11)$$

$$t_{xy}(\lambda_k, y) = -\frac{1}{\lambda_k} s'_y(\lambda_k, y). \quad (12)$$

Подставляя (11) в (12), приходим к формуле

$$t_{xy}(\lambda_k, y) = -\frac{2}{1-\nu} \left[\frac{\chi''(\lambda_k, y)}{\lambda_k} + \nu \xi'(\lambda_k, y) \right]. \quad (13)$$

Умножим (13) на некоторые коэффициенты a_k и просуммируем получившиеся ряды.

Из условия симметрии задачи

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re}(a_k \xi'(\lambda_k, y)) = 0,$$

поэтому

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re}(a_k t_{xy}(\lambda_k, y)) &= \\ &= -\frac{2}{1-\nu} \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left(a_k \frac{\chi''(\lambda_k, y)}{\lambda_k} \right). \end{aligned} \quad (14)$$

Подставив (14) в (10), получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left[a_k \left(D\lambda_k + \frac{2}{1-\nu} \right) \frac{\chi''(\lambda_k, y)}{\lambda_k} \right] = -\frac{2}{1-\nu} \frac{q(y)}{2\rho}, \quad (15)$$

или (в соответствии с (14))

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left[a_k \left(D\lambda_k + \frac{2}{1-\nu} \right) t_{xy}(\lambda_k, y) \right] = \frac{2}{1-\nu} \frac{q(y)}{2\rho}. \quad (16)$$

Ряды (15), (16) называются рядами Лагранжа [9] по собственным функциям Папковича–Фадля $\chi''(\lambda_k, y)$ и $t_{xy}(\lambda_k, y)$ ($k = 1, 2, \dots$) соответственно.

Ряды Лагранжа можно рассматривать как обобщения тригонометрических рядов Фурье. Теория разложений в ряды Лагранжа по системам собственных функций Папковича–Фадля базируется на преобразовании Бореля [11] в классе квазицелых функций экспоненциального типа.

Следуя [9], из (16) для каждого номера k получим

$$\begin{aligned} a_k \left(D\lambda_k + \frac{2}{1-\nu} \right) \lambda_k M_k &= \frac{2}{1-\nu} \int_{-1}^1 \frac{q(y)}{2\rho} t_k(y) dy, \\ M_k &= \cos^2 \lambda_k, \end{aligned} \quad (17)$$

где

$$t_k(y) = -\frac{\sin \lambda_k y}{2(1+\nu) \sin \lambda_k} \quad (18)$$

суть финитные части функций, биортогональных к собственным функциям Папковича–Фадля $t_{xy}(\lambda_k, y)$ [9]. Формулу для коэффициентов a_k представим в виде

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{q_k}{2\rho(1-\nu^2) \lambda_k M_k \sin \lambda_k} \left(D\lambda_k + \frac{2}{1-\nu} \right)^{-1}, \\ q_k &= \int_{-1}^1 q(y) \sin \lambda_k y dy. \end{aligned} \quad (19)$$

Теперь в формуле (7) надо принять

$$\tau(y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re}(a_k t_{xy}(\lambda_k, y)). \quad (20)$$

РЕШЕНИЕ ОДНОРОДНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПРЯМОУГОЛЬНИКА

Согласно [10] решение однородной четно-симметричной задачи для прямоугольника R в том случае, когда его стороны $y = \pm 1$ свободны, на торцах $x = \pm d$ нормальные напряжения равны $S(y)$, а касательные равны нулю, имеет вид

$$\begin{aligned} U^s(x, y) &= \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ 2 \operatorname{Re} \left(\sigma_k \lambda_k \frac{\xi(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k} \right) \frac{\operatorname{Im}(\bar{\lambda}_k \operatorname{sh} \bar{\lambda}_k d \operatorname{sh} \lambda_k x)}{\operatorname{Im}(\bar{\lambda}_k \operatorname{sh} \bar{\lambda}_k d \operatorname{ch} \lambda_k d)} \right\}, \\ V^s(x, y) &= \\ &= -\sum_{k=1}^{\infty} \left\{ 2 \operatorname{Re} \left(\sigma_k \frac{\chi(\lambda_k, y)}{M_k} \right) \frac{\operatorname{Im}(\bar{\lambda}_k \operatorname{sh} \bar{\lambda}_k d \operatorname{ch} \lambda_k x)}{\operatorname{Im}(\bar{\lambda}_k \operatorname{sh} \bar{\lambda}_k d \operatorname{ch} \lambda_k d)} \right\}, \\ \sigma_x^s(x, y) &= \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ 2 \operatorname{Re} \left(\sigma_k \frac{s_x(\lambda_k, y)}{M_k} \right) \frac{\operatorname{Im}(\bar{\lambda}_k \operatorname{sh} \bar{\lambda}_k d \operatorname{ch} \lambda_k x)}{\operatorname{Im}(\bar{\lambda}_k \operatorname{sh} \bar{\lambda}_k d \operatorname{ch} \lambda_k d)} \right\}, \\ \sigma_y^s(x, y) &= \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ 2 \operatorname{Re} \left(\sigma_k \lambda_k \bar{\lambda}_k \frac{s_y(\lambda_k, y)}{\lambda_k^2 M_k} \right) \frac{\operatorname{Im}(\lambda_k \operatorname{sh} \bar{\lambda}_k d \operatorname{ch} \lambda_k x)}{\operatorname{Im}(\bar{\lambda}_k \operatorname{sh} \bar{\lambda}_k d \operatorname{ch} \lambda_k d)} \right\}, \\ \tau_{xy}^s(x, y) &= \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ 2 \operatorname{Re} \left(\sigma_k \lambda_k \bar{\lambda}_k \frac{t_{xy}(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k} \right) \frac{\operatorname{Im}(\operatorname{sh} \bar{\lambda}_k d \operatorname{sh} \lambda_k x)}{\operatorname{Im}(\bar{\lambda}_k \operatorname{sh} \bar{\lambda}_k d \operatorname{ch} \lambda_k d)} \right\}, \end{aligned} \quad (21)$$

где коэффициенты Лагранжа [9]

$$\sigma_k = \int_{-1}^1 S(y) x_k(y) dy, \quad x_k(y) = \frac{\cos \lambda_k y}{2(1+\nu) \lambda_k \sin \lambda_k}. \quad (22)$$

Из (21) видно, что при $x = \pm d$

$$\sigma_x^s(d, y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left(\sigma_k \frac{s_x(\lambda_k, y)}{M_k} \right), \quad \tau_{xy}^s(d, y) = 0. \quad (23)$$

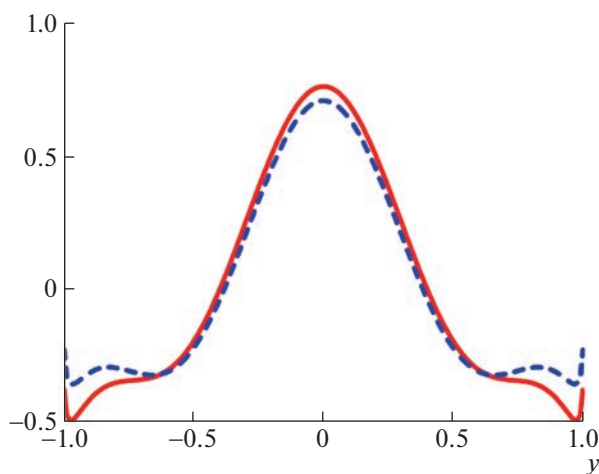


Рис. 1. Распределение нормальных напряжений вдоль оси y в прямоугольнике (сплошная кривая) и в полосе (штриховая).

Когда на торцах $x = \pm d$ заданы касательные напряжения $\pm T(y)$, а нормальные равны нулю, решение будет таким:

$$\begin{aligned}
 U^I(x, y) &= \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ 2 \operatorname{Re} \left(\tau_k \frac{\xi(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k} \right) \frac{\operatorname{Im}(\lambda_k \operatorname{ch} \bar{\lambda}_k d \operatorname{sh} \lambda_k x)}{\operatorname{Im}(\lambda_k \operatorname{ch} \bar{\lambda}_k d \operatorname{sh} \lambda_k d)} \right\}, \\
 V^I(x, y) &= \\
 &= - \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ 2 \operatorname{Re} \left(\tau_k \frac{\chi(\lambda_k, y)}{M_k} \right) \frac{\operatorname{Im}(\lambda_k \operatorname{ch} \bar{\lambda}_k d \operatorname{ch} \lambda_k x)}{\operatorname{Im}(\lambda_k \operatorname{ch} \bar{\lambda}_k d \operatorname{sh} \lambda_k d)} \right\}, \\
 \sigma_x^I(x, y) &= \\
 &= - \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ 2 \operatorname{Re} \left(\tau_k \frac{s_x(\lambda_k, y)}{M_k} \right) \frac{\operatorname{Im}(\operatorname{ch} \bar{\lambda}_k d \operatorname{ch} \lambda_k x)}{\operatorname{Im}(\lambda_k \operatorname{ch} \bar{\lambda}_k d \operatorname{sh} \lambda_k d)} \right\}, \quad (24)
 \end{aligned}$$

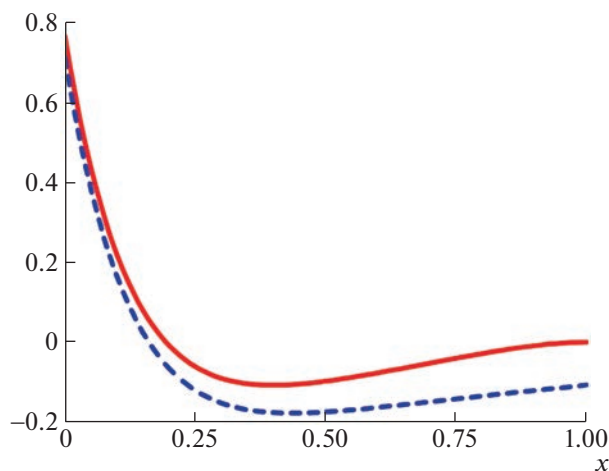


Рис. 2. Распределение нормальных напряжений вдоль оси x в прямоугольнике (сплошная кривая) и в полосе (штриховая).

$$\begin{aligned}
 \sigma_y^I(x, y) &= \\
 &= - \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ 2 \operatorname{Re} \left(\tau_k \frac{s_y(\lambda_k, y)}{\lambda_k^2 M_k} \right) \frac{\operatorname{Im}(\lambda_k^2 \operatorname{ch} \bar{\lambda}_k d \operatorname{ch} \lambda_k x)}{\operatorname{Im}(\lambda_k \operatorname{ch} \bar{\lambda}_k d \operatorname{sh} \lambda_k d)} \right\},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tau_{xy}^I(x, y) &= \\
 &= - \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ 2 \operatorname{Re} \left(\tau_k \frac{t_{xy}(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k} \right) \frac{\operatorname{Im}(\lambda_k \operatorname{ch} \bar{\lambda}_k d \operatorname{sh} \lambda_k x)}{\operatorname{Im}(\lambda_k \operatorname{ch} \bar{\lambda}_k d \operatorname{sh} \lambda_k d)} \right\},
 \end{aligned}$$

где коэффициенты Лагранжа

$$\tau_k = \int_{-1}^1 T(y) t_k(y) dy. \quad (25)$$

Из (24) видно, что

$$\sigma_x^I(d, y) = 0, \quad \tau_{xy}^I(d, y) = - \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left(\tau_k \frac{t_{xy}(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k} \right). \quad (26)$$

Примем в формулах (1) $x = d$ и будем считать, что при $x = d$

$$\begin{aligned}
 \sigma_x^S(d, y) + \sigma_x^I(d, y) &= -\sigma_x(d, y), \\
 \tau_{xy}^S(d, y) + \tau_{xy}^I(d, y) &= -\tau_{xy}(d, y).
 \end{aligned} \quad (27)$$

Учитывая (23), (26), отсюда получим

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left\{ \sigma_k \frac{s_x(\lambda_k, y)}{M_k} \right\} &= - \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} [A_k s_x(\lambda_k, y) e^{\lambda_k d}], \\
 \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left\{ \tau_k \frac{t_{xy}(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k} \right\} &= \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} [A_k t_{xy}(\lambda_k, y) e^{\lambda_k d}].
 \end{aligned} \quad (28)$$

Из равенства рядов Лагранжа (28) следует равенство их коэффициентов [9]:

$$\sigma_k = -A_k M_k e^{\lambda_k d}, \quad \tau_k = A_k M_k \lambda_k e^{\lambda_k d}. \quad (29)$$

Подставляя (29) в формулы (21), (24) и складывая их затем с соответствующими формулами (1),

получим решение рассматриваемой задачи для свободного прямоугольника с ребром жесткости.

Рассмотрим пример. Пусть $q(y) = \sin \pi y$. В этом случае

$$a_k = \frac{\pi}{\rho(1 - \nu^2)\lambda_k M_k(\lambda_k^2 - \pi^2)} \left(D\lambda_k + \frac{2}{1 - \nu} \right)^{-1}. \quad (30)$$

По формулам (30), (20), (7) найдем неизвестные коэффициенты A_k , входящие в решение задачи. Ниже для иллюстрации приведены два рисунка, на которых показаны распределения нормальных напряжений $\sigma_x(x, y)$ в прямоугольнике (сплошные кривые) и в полосе (штриховые). На рис. 1 напряжения действуют вдоль ребра жесткости $\{x = 0, |y| \leq 1\}$, на рис. 2 — вдоль горизонтальной оси $\{0 \leq x \leq d, y = 0\}$. При вычислениях считалось, что $\nu = 0.3$, $d = 1$, $D = 0.5$, $\rho = 1$. Когда $d \geq 2$, решения для прямоугольника и полосы практически совпадают.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В том случае, когда горизонтальные стороны прямоугольника жестко зашлемлены, достаточно в полученных формулах заменить собственные числа и собственные функции Папковича—Фадля на отвечающие краевой задаче для полосы с зашлемленными сторонами. К сожалению, для других типов однородных граничных условий (например, когда на сторонах полосы имеются ребра жесткости, работающие на растяжение-сжатие и/или изгиб) воспользоваться каким-либо из известных соотношений ортогональности Папковича невозможно. Это связано с тем, что метод их построения, независимо от системы координат (прямоугольная [3, 7], полярная [2], цилиндрическая [4–6]), всегда базируется на переходе к самосопряженной краевой задаче в пространстве вектор-функций [14]. Получить соотношение ортогональности, не зависящее от вида однородных граничных условий на сторонах полосы, можно, опираясь на теорию целых функций экспоненциального типа [11] и теорему Пэли—Винера [15]. Отметим, что задачи подобного рода, как правило, решаются приближенно-аналитически или численно [16–18].

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование М.Д. Коваленко и Ю.Н. Карнет выполнено в рамках государственного задания ИПРИМ РАН. Исследование А.П. Кержаева и И.В. Меньшовой выполнено в рамках государственного задания ИТПЗ РАН.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Папкович П.Ф. Об одной форме решения плоской задачи теории упругости для прямоугольной полосы // ДАН СССР. 1940. Т. 27. № 4. С. 335–339.
2. Гринберг Г.А. О методе, предложенном П.Ф. Папковичем для решения плоской задачи теории упругости для прямоугольной области и задачи изгиба прямоугольной тонкой плиты с двумя закрепленными кромками, и о некоторых его обобщениях // ПММ. 1953. Т. 17. № 2. С. 211–228.
3. Прокопов В.К. О соотношении обобщенной ортогональности П.Ф. Папковича для прямоугольной пластинки // ПММ. 1964. Т. 28. № 2. С. 351–355.
4. Little R.W., Childs S.B. Elastostatic boundary region problem in solid cylinders // Quart. Appl. Math. 1967. V. 25. № 3. P. 261–274.
5. Flügge W., Kelkar V.S. The problem of an elastic circular cylinder // Int. J. Solids Struct. 1968. V. 4. № 4. P. 397–420.
6. Little R.W. Semi-infinite strip problem with built-in edges // J. Appl. Mech. 1969. V. 36. № 2. P. 320–323.
7. Костарев А.В., Прокопов В.К. Соотношение расширенной ортогональности для некоторых задач теории упругости // ПММ. 1970. Т. 34. № 5. С. 945–951.
8. Коваленко М.Д., Шуляковская Т.Д. Разложения по функциям Фадля—Папковича в полосе. Основы теории // Изв. РАН. МТТ. 2011. № 5. С. 78–98.
9. Коваленко М.Д., Меньшова И.В., Шуляковская Т.Д. Разложения по функциям Фадля—Папковича. Примеры решений в полуполосе // Изв. РАН. МТТ. 2013. № 5. С. 121–144.
10. Коваленко М.Д., Меньшова И.В., Кержаев А.П., Шуляковская Т.Д. Некоторые решения теории упругости для прямоугольника // ПММ. 2021. Т. 85. № 3. С. 370–382.
11. Левин Б.Я. Распределение корней целых функций. М.: ГИТТЛ, 1956. 632 с.
12. Кеч В., Теодореску П. Введение в теорию обобщенных функций с приложениями в технике. М.: Мир, 1978. 518 с.
13. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука, 1979. 560 с.
14. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Физматлит, 2010. 528 с.
15. Винер Н., Пэли Р. Преобразование Фурье в комплексной области. М.: Наука, 1964. 268 с.
16. Бабурченков М.Ф., Бородачев Н.М. Бесконечные системы в задачах для подкрепленной прямоугольной пластины // Изв. РАН. МТТ. 2016. № 4. С. 77–93.
17. Саламатова В.Ю. Взаимодействие деформируемой накладки с напряженной полосой // Изв. РАН. МТТ. 2009. № 1. С. 67–72.
18. Vaysfel'd N., Popov G., Reut V. The axisymmetric contact interaction of an infinite elastic plate with an absolutely rigid inclusion // Acta Mech. 2015. V. 226. P. 797–810.

EXACT SOLUTIONS TO INHOMOGENEOUS BOUNDARY VALUE PROBLEMS OF THE THEORY OF ELASTICITY IN A RECTANGLE

M. D. Kovalenko^a, A. P. Kerzhaev^b, I. V. Menshova^{b,c}, and Yu. N. Karnet^a

^a*Institute of Applied Mechanics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

^b*Institute of Earthquake Prediction Theory and Mathematical Geophysics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

^c*Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia*

Presented by Academician of the RAS A.M. Lipanov

A method is proposed for constructing exact solutions to boundary value problems of the theory of elasticity in a rectangle with stiffeners located inside the region (an inhomogeneous problem). The solutions are represented by series in Papkovich–Fadle eigenfunctions, the coefficients of which are determined explicitly. The method is based on the Papkovich orthogonality relation and the theory of expansions in Papkovich–Fadle eigenfunctions developed by the authors in homogeneous boundary value problems of the theory of elasticity in a rectangle (the biharmonic problem). The solution sequence is demonstrated with the example of an even-symmetric problem for a rectangle the sides of which are free, and an external load acts along the stiffener located on the axis of symmetry of the rectangle.

Keywords: inhomogeneous problem, rectangle, Papkovich–Fadle eigenfunctions, Papkovich orthogonality relation, exact solutions