ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. ФИЗИКА, ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ, 2023, том 513, с. 55–60

МЕХАНИКА

УДК 532.517.45

КАЛИБРОВОЧНО-ИНВАРИАНТНЫЙ ЛАГРАНЖИАН, ОПРЕДЕЛЯЕМЫЙ *n*-ТОЧЕЧНОЙ ФУНКЦИЕЙ ПЛОТНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТИ ПОЛЯ ВИХРЯ ВОЛНОВОЙ ОПТИЧЕСКОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

© 2023 г. В. Н. Гребенёв[1,*], А. Н. Гришков[2,]**

Представлено академиком РАН М.П. Федоруком 02.03.2023 г.
Поступило 07.03.2023 г.
После доработки 07.03.2023 г.
Принято к публикации 27.07.2023 г.

Методы геометрии полей Янга—Миллса калибровочных преобразований применяются к нахождению инвариантного лагранжиана в расслоении конфигурационного $2d$ пространства X турбулентного потока, определяемого n-точечной функцией плотности распределения вероятности f_n (ФПРВ). Рассматривается двумерная волновая оптическая турбулентность в случае обратного каскада переноса энергии турбулентности при внешнем воздействии в виде белого гауссова шума и крупномасштабного трения. n-Точечная ФПРВ поля вихря удовлетворяет f_n-уравнению из иерархии Ландгрена—Монина—Новикова (ЛМН), и найдены условия инвариантности уравнения при внешнем воздействии. Построен лагранжиан, инвариантный относительно подгруппы $H \subset G$ — группы калибровочных преобразований в расслоении пространства X, и сохраняющиеся токи.

Ключевые слова: оптическая турбулентность, калибровочные преобразования, уравнения Ландгрена—Монина—Новикова, инвариантный лагранжиан

DOI: 10.31857/S2686740023060081, **EDN:** HTSZXS

Работа посвящена исследованию [1, 2] о конформной инвариантности n-точечной статистики линий нулевой завихренности. В [1] методология, представленная в [3—5] для вычисления преобразований симметрии 1-точечной статистики, используется при доказательстве конформной инвариантности n-точечной ($n > 1$) статистики изолиний $\mathbf{x}(l)$ в случае двумерной гидродинамической турбулентности в отсутствие внешнего воздействия и нулевой вязкости. В [2] результаты работы [1] применены к двумерной волновой оптической турбулентности, которая изучается в рамках гидродинамического приближения нелинейного уравнения Шрёдингера (НУШ) для весового поля скорости $\mathbf{u}$ [6] (оптический фазовый градиент волновой функции). Получен результат о конформной инвариантности n-точечной статистики (вероятностной меры) линии нулевой завихренности $\mathbf{x}(l,t)$ или контура кластера оптических вихрей. Граница кластеров вихрей наблюдается в [7], вне вихревого ядра поле скорости $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$, где вариация плотности (оптическая интенсивность волновой функции) от фонового значения $\rho = 1$ незначительна. Эксперименты для двухмерных квантовых жидкостей (поляритонов) демонстрируют турбулентные состояния, появление обратного каскада в диссипативных квантовых жидкостях, совместно с формированием кластеров вихрей. Указана возможность определить вклад сжимаемой и несжимаемой компонент поля скорости $\mathbf{u} = \sqrt{\rho/2}\mathbf{v}$ с весовой функцией $\sqrt{\rho}$ (ρ, $\mathbf{v}$ — плотность и скорость квантовой жидкости) в кинетическую энергию турбулентности, необходимую для формирования кластеров вихрей благодаря прямому доступу к измерению фазы квантовой жидкости на основе аналогии между квантовыми жидкостями и оптическими системами. Результаты применены к тороидальным оптическим вихрям. В [8] представлены данные экспериментов формирования тороидальных структур лучей в оптике. Для обоснования привлекалось $3d$-линейное уравнение Шрёдингера (параболическое приближение НУШ) при аномальной дисперсии групповой скорости волнового пакета Ψ,

[1]*Федеральный исследовательский центр информационных и вычислительных технологий, Новосибирск, Россия*
[2]*Институт математики и статистики, Университет Сан-Паулу, Сан-Паулу, Бразилия*
**E-mail: vngrebenev@gmail.com*
***E-mail: grishkov@ime.usp.br*

которое является инвариантным при конформных преобразованиях комплексной прямой C, где расположены два фазовых элемента Ψ. Уравнение используется в определенных приближениях, без учета нелинейных эффектов распространения оптических волн и взаимодействия с фоном случайных волн. Последнее ведет к тому, что обоснование подобных структур должно быть дано в рамках статистической теории с изучением симметрии статистических распределений поля завихренности. Расширение симметрии до конформной инвариантности – программа, предложенная А.М. Поляковым [9] для $2d$-статистической теории гидродинамической турбулентности. Цель сообщения – найти условия инвариантности f_n-уравнению иерархии ЛМН при внешнем воздействии в виде белого гауссова шума и крупномасштабного трения. Построить инвариантный лагранжиан, тензор энергии-импульса и бесконечное число сохраняющихся токов в пространстве расслоений конфигурационного $2d$-пространства X, что позволяет применить методы конформной теории поля [10] для статистической теории турбулентности.

1. ОСНОВНЫЕ КОНСТРУКЦИИ

1.1. Статистическая модель

Статистические выборки рассматриваются на многообразии X, возможно несвязном и недифференцируемом. Статистические модели представляют собой совокупность вероятностных мер $\{\mu_{\mathbf{x}} \,|\, \mathbf{x} \in X\}$ (параметризованных переменной $\mathbf{x} \in X$) или функций плотности распределения вероятностей, заданных на некотором пробном пространстве $\mathcal{M}$ наблюдаемых данных ω. Статистическая модель физической задачи состоит в выборе вероятностной меры. Рассмотрим n-точечную выборку $(\mathbf{x}_{(1)},\ldots,\mathbf{x}_{(n)}) \in X$, которой соответствуют наблюдаемые данные $(\omega_{(1)},\ldots,\omega_{(n)})$ и X как конфигурационное пространство $2d$-турбулентного потока такое, что $\omega_{(i)}$ – значения компоненты завихренности $\Omega(\mathbf{x}_{(i)},t)$. Пространство состояний точки $\mathbf{x}_{(i)}$ турбулентного потока – одномерное расслоение $\mathcal{M} \simeq R$ над X. Пространство состояний n-точечной выборки $(\mathbf{x}_{(1)},\ldots,\mathbf{x}_{(n)})$ – прямое произведение $\mathcal{M}^n = \mathcal{M} \times \ldots \times \mathcal{M} \simeq R^n$. Рассмотрим семейство вероятностных мер $\{\mu_{\mathbf{x}} \,|\, \mathbf{x} \in X\}$ (параметризованных $\mathbf{x}$) на $\mathcal{M}$ и стандартную меру Лебега ν, определенную в $\mathcal{M}$. Предполагается, что семейство мер $\{\mu_{\mathbf{x}}\}$ является абсолютно непрерывным относительно меры ν. Тогда отображение $\mu_{\mathbf{x}} \to (\mathrm{d}\mu_{\mathbf{x}}/\mathrm{d}\nu)^{1/2}$, где $\mathrm{d}\mu_{\mathbf{x}}/\mathrm{d}\nu$ – производная Радона–Никодима, определяет вложение семейства $\{\mu_{\mathbf{x}} \,|\, \mathbf{x} \in X\}$ в единичную сферу S гильбертова пространства $L^2(\mathcal{M},\nu)$. Производная $\mathrm{d}\mu_{\mathbf{x}}/\mathrm{d}\nu = f$ является ФПРВ в S, вид которой будет приведен ниже для модели волновой оптической турбулентности.

1.2. Калибровочные преобразования

В соответствии с теорией калибровочных преобразований выбирается группа преобразований (группа Ли), действующая на многообразие X, и рассматриваем конформные отображения $2d$-многообразия X, которые представляют собой бесконечномерную псевдо-группу Ли, реализованную на комплексной прямой C, действие которой может быть поднято на расслоение $\mathcal{P} = P_{\mathbf{x}_{(1)}} \times \ldots \times P_{\mathbf{x}_{(n)}}$ многообразия X с базой $\mathbf{x}_{(j)}$, где слой $P_{\mathbf{x}_{(j)}}$ – группа преобразований G_j. В дифференциальной геометрии такие расслоения называются главными.

1.3. Волновая оптическая турбулентность

Статистическое описание совокупности оптических вихрей основано на аналогии оптических и гидродинамических полей [12]. Имея гидродинамическое приближение НУШ, определяемое уравнением Эйлера идеальной несжимаемой жидкости, уравнения для многоточечных функций плотности распределения вероятностей f_n, $n = 1,\ldots,\infty$, поля вихря $\mathbf{w}$ определяются иерархией ЛМН-уравнений. Мы интересуемся свойствами статистики, которые не зависят от свойств внешней случайной силы, т.е. инвариантностью, когда турбулентность реализуется на масштабах, превышающих радиус корреляции внешней силы или в обратных каскадах. Для моделирования нелинейного распространения оптических волн, в терминах скалярной волновой комплексной функцией $\Psi(X,Y,T)$ для огибающих, привлекается НУШ, которое в обезразмеренных переменных x, y, t и ψ имеет вид

$$i\psi_t + \Delta\psi + \psi - |\psi|^2\psi = 0. \qquad (1)$$

Преобразование Маделунга [11]:

$$\psi = \sqrt{\rho}e^{i\phi}, \quad |\psi|^2 = \rho,$$

где $|\psi|^2$ – оптическая интенсивность, ϕ – фаза волновой функции, устанавливает соответствие между оптическими и гидродинамическими полями, ρ и $\mathbf{v}$ удовлетворяют уравнениям Эйлера для невязкого политропного газа с показателем адиабаты $\gamma = 2$. Таким образом, оптическая интенсивность представляет собой плотность ρ, оптический фазовый градиент $\nabla\phi$ является скоростью $\mathbf{v}$, нелинейное возмущение показателя рефракции соответствует давлению p, расстояние, пройденное оптической волной, – время t. В точках $\mathbf{x_i} = (x_i, y_i) \in R^2$, где $\psi = 0$, фаза ϕ неопределена, завихренность является распределением дельта-функции $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x_i})$. Переход к скорости $\mathbf{u} = \sqrt{\rho}\mathbf{v}$, как это сделано в [6], аппроксимируя $\mathbf{v}$ вблизи $\mathbf{x_i}$ вихревым решением Питаевского [13]) с весом $\sqrt{\rho}$, позволяет перейти к локализованному и быстро убывающему полю завихренности $\mathbf{w}$, которое все еще сингулярно при $r = 0 (r = |\mathbf{x} - \mathbf{x_i}|)$, но уже не является распределением дельта-функции. Гамильтониан НУШ

$$H = \int [|\nabla\psi|^2 + 1/2(|\nabla\psi|^2 - 1)^2] d\mathbf{x} \tag{2}$$

в гидродинамических переменных $\mathbf{u}$, ρ имеет вид

$$\begin{gathered} H = H_K + H_0, \quad H_K = \frac{1}{2}\int u^2 dx, \\ H_0 = \frac{1}{2}\int [(\rho - 1)^2 + 2|\nabla\sqrt{\rho}|^2] d\mathbf{x}, \quad u = |\mathbf{u}|, \end{gathered} \tag{3}$$

H_K совпадает с гамильтонианом идеальной несжимаемой жидкости. Как показано в [6], гамильтониан H_K является доминантным в разложении H на масштабах движения $\sim\xi$ радиуса ядра вихря, где значительно изменение давления ρ и $\rho \approx 1$ (фоновое значение плотности) для $r \gg \xi$. Дивергенция поля $\mathbf{u}$, т.е. $\gamma(x) = \nabla \cdot \mathbf{u}$, на этих масштабах движения есть величина $\gamma(\mathbf{x}) \ll 1$, см. [6]. Таким образом, гидродинамическое приближение НУШ на масштабах движения $\sim\xi$ определяется уравнением Эйлера идеальной несжимаемой жидкости.

1.4. Статистическое описание поля оптических вихрей

f_n-Уравнение иерархии ЛМН рассматривается при внешнем воздействии: белый гауссовый шум и крупномасштабное экмановское трение, что ведет к статистической стационарности ФПРВ. Используются следующие обозначения: $f_n(\mathbf{x}_{(1)}, \omega_{(1)}, \ldots, \mathbf{x}_{(n)}, \omega_{(n)})$ есть n-точечная ФПРВ, $n = 1, \ldots$, $\omega_{(i)}$, $i = 1, \ldots, n$ – значение компоненты завихренности $\Omega(\mathbf{x}_{(i)}, t) (\equiv \Omega_{(i)})$ в точке $\mathbf{x}_{(i)}$. Верхний индекс обозначает компоненту вектора. Используя $\mathbf{x}_{(i)}$, введем комплексные переменные $z_{(i)} = x^1_{(i)} + ix^2_{(i)}$, или $z_{(i)} = x_{(i)} + iy_{(i)}$. Произвольное f_n-уравнение иерархии ЛМН в комплексных переменных принимает вид [14]

$$\sum_{j=1}^{n} \mathrm{Re}(\nabla_{z_{(j)}} \cdot [\langle \mathcal{U}(z_{(j)}, \bar{z}_{(j)}) | \{\omega_{(l)}, z_{(l)}, \bar{z}_{(l)}\} \rangle]) f_n = \mathcal{F}, \tag{4}$$

$$\mathcal{F} = \beta \frac{\partial}{\partial \omega_{(n)}} (\omega_{(n)} f_n) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} Q(x_{(n)} - x_{(j)}) \frac{\partial^2}{\partial \omega^2_{(j)}} f_n, \quad \beta = \mathrm{const}. \tag{5}$$

Первое слагаемое – фрикционное демпфирование (трение Экмана), посредством которого энергия взаимодействия сдвигается в большие масштабы обратного каскада. Второе слагаемое – возбуждение системы белым гауссовым шумом с коротким радиусом корреляции, $Q(x_{(n)} - x_{(j)})$ – амплитуда внешнего воздействия, $j = 1, \ldots, n$, где $n = 1, \ldots, \infty$. Re – действительная часть комплексного числа. Вектор скорости равен

$$\begin{gathered} \langle \mathcal{U}(z_{(j)}, \bar{z}_{(j)}, t) | \{\omega_{(l)}, z_{(l)}, \bar{z}_{(l)}\} \rangle = \\ = \langle u(\mathbf{x}_{(j)}, t) | \omega_{(l)}, \mathbf{x}_{(l)} \rangle + i \langle v(\mathbf{x}_{(j)}, t) | \omega_{(l)}, \mathbf{x}_{(l)} \rangle, \end{gathered} \tag{6}$$

$$\begin{gathered} \langle u(\mathbf{x}_{(j)}, t) | \{\omega_{(l)}, \mathbf{x}_{(l)}\} \rangle = \\ = \int d\mathbf{x}_{(n+1)} d\omega_{(n+1)} \omega_{(n+1)} \alpha^1(\mathbf{x}_{(j)} - \mathbf{x}_{(n+1)}) \times \\ \times \frac{f_{n+1}(\mathbf{x}_{(n+1)}, \omega_{(n+1)}, \{\mathbf{x}_{(l)}, \omega_{(l)}\}, t)}{f_n(\{\mathbf{x}_{(l)}, \omega_{(l)}\}, t)}, \end{gathered} \tag{7}$$

$$\begin{gathered} \langle v(\mathbf{x}_{(j)}, t) | \{\omega_{(l)}, \mathbf{x}_{(l)}\} \rangle = \\ = \int d\mathbf{x}_{(n+1)} d\omega_{(n+1)} \omega_{(n+1)} \alpha^2(\mathbf{x}_{(j)} - \mathbf{x}_{(n+1)}) \times \\ \times \frac{f_{n+1}(\mathbf{x}_{(n+1)}, \omega_{(n+1)}, \{\mathbf{x}_{(l)}, \omega_{(l)}\}, t)}{f_n(\{\mathbf{x}_{(l)}, \omega_{(l)}\}, t)}. \end{gathered} \tag{8}$$

Класс ФПРВ определяется условиями нормализации, совпадения и разделения ФПРВ [14] на соответствующих масштабах.

2. КОНФОРМНО-КАЛИБРОВОЧНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СТАТИСТИКИ ПОЛЯ ВИХРЯ

2.1. Инфинитезимальный оператор

Калибровочное преобразование – функция $g(\mathbf{x})$, принимающая значения в группе G, действующей в пространстве расслоений над X. Действие псевдо-группы Ли конформных преобразований X может быть поднято на расслоение $\mathcal{P}$ многообразия X с базой $\mathbf{x}_{(j)}$. Слой $P_{\mathbf{x}_{(j)}}$ – группа преобразований Ли G_j (алгеброй Ли $\mathfrak{s}_j$), определяемая инфинитиземальным оператором $S_{(j)}$, $j = 1, \ldots, n$ [1]:

$$S_{(j)} = \xi^1 \frac{\partial}{\partial x^1_{(1)}} + \xi^2 \frac{\partial}{\partial x^2_{(1)}} + \xi^3 \frac{\partial}{\partial \omega_{(1)}} + \ldots$$

$$\begin{gathered} \ldots + \xi^{3n-2} \frac{\partial}{\partial x^1_{(n)}} + \xi^{3n-1} \frac{\partial}{\partial x^2_{(n)}} + \xi^{3n} \frac{\partial}{\partial \omega_{(n)}} + \eta^1_{(n)} \frac{\partial}{\partial f_n} + \\ + \xi^{3n+1} \frac{\partial}{\partial x^1_{(n+1)}} + \xi^{3n+2} \frac{\partial}{\partial x^2_{(n+1)}} + \end{gathered} \tag{9}$$

$$+\xi^{3n+3}\frac{\partial}{\partial\omega_{(n+1)}}+\eta^2_{(n)}\frac{\partial}{\partial f_{n+1}},$$

j индексирует $\xi^{3n+1}, \xi^{3n+2}, \xi^{3n+3}$. Координаты инфинитиземального оператора определяются формулами

$$\xi^1 = c^{11}(\mathbf{x}_{(1)})x^1_{(1)} + c^{12}(\mathbf{x}_{(1)})x^2_{(1)} + d^1(\mathbf{x}_{(1)}), \quad (10)$$

$$\xi^2 = c^{21}\left(\mathbf{x}_{(1)}\right)x^1_{(1)} + c^{22}\left(\mathbf{x}_{(1)}\right)x^2_{(1)} + d^2\left(\mathbf{x}_{(1)}\right), \quad (11)$$

$$\xi^3 = [6c^{11}(\mathbf{x}_{(1)})]\omega_{(1)}, \quad (12)$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots$$

$$\xi^{3n-2} = c^{11}(\mathbf{x}_{(n)})x^1_{(n)} + c^{12}(\mathbf{x}_{(n)})x^2_{(n)} + d^1(\mathbf{x}_{(n)}), \quad (13)$$

$$\xi^{3n-1} = c^{21}(\mathbf{x}_{(n)})x^1_{(n)} + c^{22}(\mathbf{x}_{(n)})x^2_{(n)} + d^2(\mathbf{x}_{(n)}), \quad (14)$$

$$\xi^{3n} = [6c^{11}(\mathbf{x}_{(n)})]\omega_{(n)}, \quad (15)$$

$$\xi^{3n+1} = c^{11}(\mathbf{x}_{(j)})x^1_{(n+1)} + c^{12}(\mathbf{x}_{(j)})x^2_{(n+1)} + d^1(\mathbf{x}_{(j)}), \quad (16)$$

$$\xi^{3n+2} = c^{21}(\mathbf{x}_{(j)})x^1_{(n+1)} + c^{22}(\mathbf{x}_{(j)})x^2_{(n+1)} + d^2(\mathbf{x}_{(j)}), \quad (17)$$

$$\xi^{3n+3} = [2c^{11}(\mathbf{x}_{(j)})]\omega_{(n+1)}, \quad (18)$$

$k = 1,\dots,n,$ c^{ls} удовлетворяют соотношениям $c^{11} = c^{22}$, $c^{12} = -c^{21}$, c^{11}, c^{12} и каждая пара ξ^1, ξ^2, ..., ξ^{3n-2}, ξ^{3n-1} – произвольные сопряженные гармонические функции. Координаты $\eta^1_{(n)}$ и $\eta^2_{(n)}$ имеют вид

$$\eta^1_{(n)} = a^{00}_{(n)}(t, \mathbf{x}_{(1)},\dots,\mathbf{x}_{(n)})f_n, \quad (19)$$

$$a^{00}_{(n)} = -\left(\frac{\partial\xi^1}{\partial x^1_{(1)}} + \frac{\partial\xi^2}{\partial x^2_{(1)}} + \dots + \frac{\partial\xi^{3n-2}}{\partial x^1_{(n)}} + \frac{\partial\xi^{3n-1}}{\partial x^2_{(n)}}\right), \quad (20)$$

$$\eta^2_{(n)} = a^{00}_{(n+1)}(t, \mathbf{x}_{(1)},\dots,\mathbf{x}_{(n+1)})f_{(n+1)}, \quad (21)$$

$$\begin{aligned} a^{00}_{(n+1)} = -\Bigg(&\frac{\partial\xi^1}{\partial x^1_{(1)}} + \frac{\partial\xi^2}{\partial x^2_{(1)}} + \frac{\partial\xi^4}{\partial x^1_{(2)}} + \\ &+ \frac{\partial\xi^5}{\partial x^2_{(2)}} + \dots + \frac{\partial\xi^{3n+1}}{\partial x^1_{(n+1)}} + \frac{\partial\xi^{3n+2}}{\partial x^2_{(n+1)}}\Bigg). \end{aligned} \quad (22)$$

Инфинитезимальный оператор $S_{(j)}$ порождает (псевдо-)группу Ли G_j (G_j, G_k, $j \neq k$ изоморфны), которая инвариантно преобразует уравнение характеристики (4) (см. [1])

$$\frac{d}{ds}\mathbf{X}_{n(j)}(s) = \langle \mathbf{u}(\mathbf{x}_{(j)},t)\,|\,\omega_{(l)},\mathbf{x}_{(l)}\rangle\Big|_{\{\omega_{(l)},\mathbf{x}_{(l)}\}=\{\Omega_{(l)}(s),\mathbf{X}_{n(l)}(s)\}} \quad (23)$$

с нулевой завихренностью $\Omega_{(l)}(s) = 0$, $l = 1,\dots,n$, и уравнение (4) вдоль $\mathbf{X}_{n(j)}(s)$. Определим $G = G_1\times\dots\times G_n$, как прямое произведение групп Ли G_j, G есть снова (псевдо-)группа Ли. Под действием G-преобразований f_n-уравнение остается инвариантным только вдоль $\mathbf{X}_{n(j)}(s)$, $j = 1,\dots,n$, с $\Omega_{(l)}(s) = 0$. G сохраняет класс ФПРВ [2]. Далее, левая часть (4) вдоль $\mathbf{X}_{n(j)}(s)$ преобразуется как

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n}\mathrm{Re}(\nabla_{z^*_{(j)}}\cdot[\langle U^*(z^*_{(j)},\overline{z}^*_{(j)})|\{\omega^*_{(l)},z^*_{(l)},\overline{z}^*_{(l)}\}\rangle])f^*_n = \\ &= \gamma\sum_{j=1}^{n}\mathrm{Re}(\nabla_{z_{(j)}}\cdot[\langle U(z_{(j)},\overline{z}_{(j)})|\{\omega_{(l)},z_{(l)},\overline{z}_{(l)}\}\rangle])f_n, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\gamma = \prod_{j=1}^{n}|F_{z_{(j)}}|^{-2}, \quad (25)$$

соответственно первое слагаемое правой части (4)

$$\beta\frac{\partial}{\partial\omega^*_{(n)}}(\omega^*_{(n)}f^*_n) = \gamma\beta\frac{\partial}{\partial\omega_{(n)}}(\omega_{(n)}f_n). \quad (26)$$

Рассмотрим второе слагаемое в F в преобразованных переменных

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}Q^*(x^*_{(n)}-x^*_{(j)})\frac{\partial^2}{\partial\omega^{*2}_{(j)}}f^*_n = \\ &= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}Q^*(x^*_{(n)}-x^*_{(j)})|F_{z_{(j)}}|^{-4}\gamma\frac{\partial^2}{\partial\omega^2_{(j)}}f_n. \end{aligned} \quad (27)$$

Для инвариантности (4) требуется условие на преобразование $Q(x_{(n)}-x_{(j)})$, именно

$$Q^*(x^*_{(n)}-x^*_{(j)}) = |F_{z_{(j)}}|^4 Q\left(x_{(n)}-x_{(j)}\right). \quad (28)$$

Из вида $S_{(j)}$ следует, что инфинитезимальный оператор

$$\begin{aligned} T_{(j)} &= \xi^{3j-2}\frac{\partial}{\partial x^1_{(j)}} + \xi^{3j-1}\frac{\partial}{\partial x^2_{(j+1)}} + \eta^1_{(n)}\frac{\partial}{\partial f_n}, \\ \eta^1_{(n)} &= -2\xi^{3j-2}_{x^1_{(j)}} \end{aligned} \quad (29)$$

порождает подалгебру Ли $\mathfrak{t}_j \subset \mathfrak{s}_j$ и (псевдо-)группу Ли H_j, действующую в $K_{\mathbf{x}_{(j)}} = C\times S$:

$$\begin{aligned} &z^*_{(j)} = F(z_{(j)}), \quad dz^*_{(j)} = F_{z_{(j)}}dz_{(j)}, \quad d\overline{z}^*_{(j)} = \overline{F}_{\overline{z}_{(j)}}d\overline{z}_{(j)}, \\ &f^*_n = |F_{z_{(j)}}|^{-2}f_n, \quad |F_{z_{(j)}}|^2 = F_{z_{(j)}}\overline{F}_{\overline{z}_{(j)}}, \end{aligned} \quad (30)$$

где $F = U + iV$, U, V – сопряженные гармонические функции, т.е. F – конформное отображение, $F_{z_{(j)}}$ – производная по $z_{(j)}$, параметр группы a опущен в обозначениях. Соответственно, $H = H_1\times\dots\times H_n$ – (псевдо-)группа Ли в $\mathcal{K} = K_{\mathbf{x}_{(1)}}\times\dots\times K_{\mathbf{x}_{(n)}} \subset \mathcal{P}$. Найдем представление алгебры Ли $\mathfrak{t}_j$. В комплексных переменных оператор $T_{(j)}$ принимает вид

$$T_{(j)} = F(z_{(j)})\frac{\partial}{\partial z_{(j)}} + \bar{F}(\bar{z}_{(j)})\frac{\partial}{\partial \bar{z}_{(j)}} - \\ - F_{z_{(j)}}(z_{(j)})f_n\frac{\partial}{\partial f_n} - \bar{F}_{\bar{z}_{(j)}}(\bar{z}_{(j)})f_n\frac{\partial}{\partial f_n}. \tag{31}$$

Преобразования $z_{(j)} \mapsto z_{(j)} + \epsilon(z_{(j)})$, $\bar{z}_{(j)} \mapsto \bar{z}_{(j)} + \bar{\epsilon}(\bar{z}_{(j)})$ определяют представление оператора $T_{(j)}$. Инфинитезимальные голоморфные преобразования $z_{(j)}$ и $\bar{z}_{(j)}$ имеют вид

$$z^*_{(j)} = z_{(j)} + \epsilon(z_{(j)}) = z_{(j)} + F(z_{(j)})\delta s, \\ \bar{z}^*_{(j)} = \bar{z}_{(j)} + \bar{\epsilon}(\bar{z}_{(j)}) = \bar{z}_{(j)} + \bar{F}(\bar{z}_{(j)})\delta s. \tag{32}$$

Используем разложение в ряд Лорана

$$\epsilon(z_{(j)}) = -\sum_{n=-\infty}^{\infty}\varepsilon_n z^{n+1}_{(j)}, \quad \bar{\epsilon}(\bar{z}_{(j)}) = -\sum_{n=-\infty}^{\infty}\bar{\varepsilon}_n \bar{z}^{n+1}_{(j)}.$$

Каждая гармоника ряда порождает преобразования $z_{(j)} \to z^*_{(j)} \equiv z_{(j)} - \varepsilon_n z^{n+1}_{(j)}$, $\bar{z}_{(j)} \to \bar{z}^*_{(j)} \equiv \bar{z}_{(j)} - \bar{\varepsilon}_n \bar{z}^{n+1}_{(j)}$ и соответствующие инфинитезимальные операторы $l_n = -z^{n+1}_{(j)}\frac{d}{dz_{(j)}}$, $\bar{l}_n = -\bar{z}^{n+1}_{(j)}\frac{d}{d\bar{z}_{(j)}}$, где ε_n, $\bar{\varepsilon}_n$ – параметры преобразования, которые являются базисом бесконечномерной конформной алгебры Ли (две копии алгебры Витта): базис оператора $T_{(j)}$ есть $k_n \oplus \bar{k}_n$, $n \in Z$,

$$k_n = -z^{n+1}_{(j)}\frac{d}{dz_{(j)}} - (n+1)z^n_{(j)}f_n\frac{d}{f_n}, \\ \bar{k}_n = -\bar{z}^{n+1}_{(j)}\frac{d}{d\bar{z}_{(j)}} - (n+1)\bar{z}^n_{(j)}f_n\frac{d}{df_n}. \tag{33}$$

Таким образом, алгебра, порожденная инфинитезимальным оператором $T_{(j)}$: $\mathfrak{t}_j \subset \mathfrak{s}_j$, – линейная оболочка над C базисных элементов $k_n \oplus \bar{k}_n$ и скобкой Ли: $[k_n, k_m]f = k_n k_m f - k_m k_n f = (n-m)k_{n+m}$, $[\bar{k}_n, \bar{k}_m]f = (n-m)\bar{k}_{n+m}f$, $[k_n, \bar{k}_m]f = 0$.

2.2. Лагранжиан

Инварианты групп преобразований – составная часть физического процесса. Геометрический объект, который стоит за процедурой измерения, – лагранжево многообразие с интегралом действия (лагранжиан) [15]. Центральные моменты или дифференциальные формы определяют собой дифференциальные инварианты допускаемой группы преобразований [15]. Рассмотрим слой $K_{\mathbf{x}_{(j)}}$ и дифференциальную форму $dz_{(j)}d\bar{z}_{(j)} = 1/2\left(dz_{(j)} \otimes d\bar{z}_{(j)} + d\bar{z}_{(j)} \otimes dz_{(j)}\right)$ [16]. Простые вычисления показывают с учетом (30), что инфинитезимальный оператор $T_{(j)}$ порождает инвариант $dl^2_{(j)} = f_n dz_{(j)}d\bar{z}_{(j)}$ (псевдо-)группы Ли H_j. Интеграл действия траектории (лагранжиан) $\gamma_{(j)}$, параметризованной параметром $\tau_{(j)}$ (ее длиной в метрике $dl^2_{(j)}$), определяется формулой [16]

$$\mathscr{E}_{(j)} = \int_{\gamma_{(j)}} f_n^{-1}(\tau^2_{(j)x^1_{(j)}} + \tau^2_{(j)x^2_{(j)}})d\tau_{(j)}, \\ \tau^2_{(j)x^1_{(j)}} + \tau^2_{(j)x^2_{(j)}} = f_n, \tag{34}$$

или

$$\mathscr{E}_{(j)} = 4\int_{\gamma_{(j)}}(f_n)^{-1}\left(z_{(j)}\bar{z}_{(j)}\right)\partial z_{(j)}\tau_{(j)}(z_{(j)}, \bar{z}_{(j)})\times \\ \times \partial_{\bar{z}_{(j)}}\tau_{(j)}\left(z_{(j)}, \bar{z}_{(j)}\right)d\tau_{(j)}. \tag{35}$$

H_j инвариантно преобразует (34), следовательно, и (35). Для доказательства инвариантности (34) достаточно найти симметрии уравнения (уравнение эйконала) (см. (34))

$$\tau^2_{(j)x^1_{(j)}} + \tau^2_{(j)x^2_{(j)}} = f_n. \tag{36}$$

Наиболее широкая группа преобразований (36) – преобразования эквивалентности, которая вычислена в [17]. Подалгебра алгебры преобразований эквивалентности, оставляющая инвариантным $\tau_{(j)}$, имеет вид

$$Y_{(j)} = \Phi(x^1_{(j)}, x^2_{(j)})\frac{\partial}{\partial x^1_{(j)}} + \Psi(x^1_{(j)}, x^2_{(j)})\frac{\partial}{\partial x^2_{(j)}} - \\ - 2\Phi_{x^1_{(j)}}(x^1_{(j)}, x^2_{(j)})f_n\frac{\partial}{\partial f_n}, \tag{37}$$

где Φ, Ψ – произвольные сопряженные функции. Таким образом, $T_{(j)}$, $Y_{(j)}$ совпадают.

Для лагранжиана (34) тензор энергии-импульса [16] имеет компоненты

$$T_{11} = 2\tau^2_{(j)x^1_{(j)}} - f_n, \quad T_{22} = 2\tau^2_{(j)x^2_{(j)}} - f_n, \\ T_{12} = T_{21} = 2\tau_{(j)x^1_{(j)}}\tau_{(j)x^2_{(j)}}. \tag{38}$$

$T = \{T_{ik}\}$ – бесследовый тензор, так как $T_{11} + T_{22} = 2(\tau^2_{(j)x^1_{(j)}} + \tau^2_{(j)x^2_{(j)}} - f_n) = 0$. Следовательно, $T_{z_{(j)}\bar{z}_{(j)}} = T_{\bar{z}_{(j)}z_{(j)}} = 0$, что подразумевает $\partial_{\bar{z}_{(j)}}T_{z_{(j)}z_{(j)}} = \partial_{z_{(j)}}T_{\bar{z}_{(j)}\bar{z}_{(j)}} = 0$. Следовательно, тензор имеет только две ненулевых компоненты: $T(z_{(j)}) = T_{z_{(j)}z_{(j)}}(z_{(j)}) = 1/4(T_{11} - 2iT_{12} - T_{22})$ и $\bar{T}(\bar{z}_{(j)}) = T_{\bar{z}_{(j)}\bar{z}_{(j)}}(\bar{z}_{(j)}) = 1/4(T_{11} + 2iT_{12} - T_{22})$. Кроме того, $T_{z_{(j)}z_{(j)}} = (\partial_{z(j)}\tau_{(j)})^2$ и $T_{\bar{z}_{(j)}\bar{z}_{(j)}} = (\partial_{\bar{z}_{(j)}}\tau_{(j)})^2$. Как результат, H_j сохраняет бесконечное число токов $j_{z_{(j)}} = T_{z_{(j)}z_{(j)}}\varepsilon_n z^{n+1}_{(j)}$ и $j_{\bar{z}_{(j)}} = T_{\bar{z}_{(j)}\bar{z}_{(j)}}\bar{\varepsilon}_n\bar{z}^{n+1}_{(j)}$.

Таким образом, лагранжиан и ток на расслоении $\mathscr{K}$ определяются как векторы $\mathbf{E} = (\mathscr{E}_{(1)}, \ldots, \mathscr{E}_{(n)})$ и $\mathbf{j} = (j_{z_{(1)}}, \ldots, j_{z_{(n)}})$, $\bar{\mathbf{j}} = (j_{\bar{z}_{(1)}}, \ldots, j_{\bar{z}_{(n)}})$, $n = 1, \ldots, \infty$. Псевдо-группа Ли H инвариантно преобразует **E** и сохраняет токи. H_j допускает интерпретацию как преобразование эквивалентности уравнения эйконала (36), сохраняющее длину луча.

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-11-00287, https://rscf.ru/project/22-11-00287/. А.Н. Гришков поддержан FAPESP (Brazil), проект 2021/09845-0.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гребенев В.Н., Гришков А.Н., Оберлак М.* Симметрии уравнений Лангрена–Монина–Новикова для распределения вероятности поля вихря // Доклады РАН. Физика, технические науки. 2023. Т. 508. № 1. С. 42–47.
2. *Гребенев В.Н., Гришков А.Н., Медведев С.Б., Федорук М.П.* Гидродинамическое приближение для двумерной оптической турбулентности: симметрии статистических распределений // Квантовая электроника. 2022. Т. 52. № 11. С. 1023–1030.
3. *Grebenev V.N., Wacławczyk M., Oberlack M.* Conformal invariance of the zero-vorticity Lagrangian path in 2D turbulence // J. Phys. A: Math. Theor. 2019. V. 50. P. 335501.
4. *Wacławczyk M., Grebenev V.N., Oberlack M.* Conformal invariance of characteristic lines in a class of hydrodynamic models // Symmetry. 2020. V. 12. P. 1482.
5. *Wacławczyk M., Grebenev V.N., Oberlack M.* Conformal invariance of the 1-point statistics of the zero-isolines of 2d scalar fields in inverse turbulent cascades // Phys. Rev. Fluids. 2021. V. 6. P. 084610.
6. *Bustamante M., Nazarenko S.V.* Derivation of the Biot-Savart equation from the nonlinear Schrödinger equation // Phys. Rev. E. 2015. V. 92. P. 052912.
7. *Panico R., Comaron P., Matuszewski M., Lanotte A.S., Trypogeorgos D., Gigli G., De Giorgi M., Ardizzone V., Sanvitto D., Ballarini D.* // Onset of vortex clustering and inverse energy cascade in dissipative quantum fluids // arXiv:2205.02925 [cond-mat.quant-gas] 2022.
8. *Wan C., Cao Q., Chen J., Chong A., Zhan Q.* Toroidal vortices of light // Nature Photonics. 2022. V. 16. P. 519–522.
9. *Polyakov A.M.* The theory of turbulence in two dimensions // Nuclear Phys. B. 1993. V. 396. P. 367–385.
10. *Belavin A.A.,Polyakov A.M., Zamolodchikov A.A.* Conformal field theory // Nuclear Phys. B. 1984. V. 241. P. 333–380.
11. *Madelung E.* Quantentheorie in hydrodynamischer form // Zeitschrift für Physik. 1927. V. 40. P. 322–326 .
12. *Bortolozzo U., Laurie J., Nazarenko S., Residori S.* Optical wave turbulence and the condensation of light // J. Optical Soc. America B. 2009. V. 26 (12). P. 2280–2284.
13. *Pitaevskii L.* Vortex Lines in an imperfect Bose gas // Sov. Phys. JETP. 1961. V. 13 (2). P. 451–454.
14. *Friedrich R., Daitche A., Kamps O., Lülff J., Michel Voßkuhle M., Wilczek M.* The Lundgren-Monin-Novikov hierarchy: Kinetic equations for turbulence // C. R. Physique. 2012. V. 13. P. 929–953.
15. *Lychagin V.V.* Contact geometry. Nonlinear PDEs, their geomtry, and applications. Tutor. Sch. Workshop Math. Sci., 3–52 Burkhäuser/Springer, Cham. 2019.
16. *Dubrovin B.A., Fomenko T.A., Novikov S.P.* Modern Geometry–Methods and Applications. Pt. 1. B.: Springer-Verlag, 1984.
17. *Меграбов А.Г.* Групповое расслоение и представление Лакса // ДАН. 2003. Т. 390. № 3. С. 325–329.

A GAUGE-INVARIANT LAGRANGIAN DETERMINED BY THE *n*-POINT PROBABILITY DENSITY FUNCTION OF VORTICITY FIELD OF THE WAVE OPTICAL TURBULENCE

V. N. Grebenev[a] and A. N. Grishkov[a]

[a]*Federal Research Center for Information and Computational Technologies, Novosibirsk, Russia*

[b]*Institute of Mathematics and Statistics, The University of Sao Paulo, Sao Paulo, Brazil*

Presented by Academician of the RAS M.P. Fedoruk

The geometry methods for Yang–Mills fields of the gauge transformations are applied to finding an invariant Lagrangian in fiber bundle of the configuration $2d$ space X of the turbulent flow defined by the n-point probability density function f_n (PDF). The two-dimensional wave optical turbulence is considered in the case of the inverse cascade of energy. The n-point PDF of the vorticity field satisfies the f_n-equation from the Landgren–Monin–Novikov (LMN) hierarchy. The basic result reads: we construct the Lagrangian which is invariant under a subgroup $H \subset G$ – the group of the gauge transformations in fiber bundles of the space X and the conserved currents.

Keywords: optical turbulence, Lundgren–Monin–Novikov equations, gage transformation, Lagrangian, conserved currents