

УДК 539.3

О КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ДВУХ ШТАМПОВ И МОДЕЛИ ТРЕЩИН НОВОГО ТИПА

© 2023 г. Академик РАН В. А. Бабешко^{1,2,*}, О. В. Евдокимова¹,
О. М. Бабешко², М. В. Зарецкая², В. С. Евдокимов²

Поступило 02.06.2023 г.

После доработки 17.09.2023 г.

Принято к публикации 19.09.2023 г.

Впервые строится точное решение контактной задачи о взаимодействии с многослойным основанием двух полубесконечных штампов, торцы которых параллельны друг другу. Штампы предполагаются абсолютно жесткими, а расстояние между ними может иметь любую конечную величину. Задача является важным этапом в алгоритме построения моделей трещины нового типа в материалах разных реологий. Механизм разрушения среды трещинами нового типа кардинально отличается от механизма разрушения среды трещинами Гриффитса и пока изучен слабо. Гриффитс объяснил происхождение своих трещин с гладкой границей как результат сжатия с боков эллиптической полости в пластине. Трещины нового типа имеют кусочно-гладкую границу, получаются в результате замены эллипса прямоугольником, сжимаемым с боков. Представленную в статье задачу можно рассматривать как результат формирования трещины нового типа с абсолютно жесткими берегами и деформируемой нижней границей. После ее решения появляется возможность перехода к деформируемым штампам и трещине нового типа в реологической среде. Решение этой задачи оказалось возможным вследствие построения точных решений интегральных уравнений Винера–Хопфа на конечном отрезке.

Показано, как решение одной из ранее не решавшихся точно задач позволяет исследовать и решать точно другие задачи, выявлять ранее не известные свойства и резонансы. В результате построения точного решения задачи подтвердился факт о неединственности решения динамических контактных задач для систем штампов и построено дисперсионное уравнение для нахождения резонансных частот.

Ключевые слова: контактная задача, многослойные среды, штампы, интегральное уравнение Винера–Хопфа, бесконечные алгебраические системы, резонансы

DOI: 10.31857/S2686740023060019, **EDN:** YCDLOT

Обзоры исследований по теории и методам решения контактных задач для одного штампа на многослойной среде весьма обширны. Часть из них изложена в работах [1–20]. Обзоров по теории контактных задач для совокупностей штампов значительно меньше. В работах [2–5] приводятся некоторые примеры исследований по контактным задачам для нескольких штампов, где применяются как аналитические, асимптотические, так и численные подходы. Роль этих задач важна во многих вопросах конструирования и

прочности. В работе [19] предложен один из способов точного решения достаточно общей контактной задачи для одного штампа, опирающийся на точное решение интегрального уравнения Винера–Хопфа на конечном отрезке. В настоящей работе на его основе строится точное решение контактной задачи для двух полубесконечных штампов, чем расширены возможности метода Винера–Хопфа. Заметим, что именно этот метод, в сочетании с методом блочного элемента, позволил обнаружить существование трещин нового типа, а с ними и новых землетрясений, названных стартовыми [20]. Этот тип землетрясений, пока единственный, который можно прогнозировать, дал ответ на причины разнообразия видов подвижек поверхности Земли в зонах эпицентров. Все связано с характером взаимного движения литосферных плит в зоне разлома, представляющего трещину нового типа [21]. Сле-

¹Южный научный центр Российской академии наук, Ростов-на-Дону, Россия

²Кубанский государственный университет, Краснодар, Россия

*E-mail: babeshko41@mail.ru

дует заметить, что попытки использования трещин Гриффитса в сейсмологии не дали ожидаемого результата, хотя успешны в инженерной практике. Наиболее детально математически они исследованы академиком Н.Ф. Морозовым [22], охватившим широкий спектр теории и приложений этих трещин. Рассматриваемая в настоящем сообщении контактная задача для двух абсолютно жестких штампов является важным этапом в алгоритме исследования трещин нового типа в реологических средах [21]. Можно трактовать эту контактную задачу как рассмотрение трещины нового типа, имеющей абсолютно твердые берега и деформируемое дно, представимое зоной многослойной среды, на поверхности которой находятся штампы. Частный случай этой задачи рассматривался в [23], но только для критического случая, когда расстояние между торцами штампов стало нулевым и концентрации контактных напряжений в зоне сближения плит оказывались сингулярными. Открытым оставался важнейший вопрос о поведении концентрации контактных напряжений при изменении расстояния между штампами и о поведении системы при вибрации. В работе [24], при изучении высокочастотного резонанса для двух штампов, был установлен факт не единственности решения для некоторых параметров задачи. Однако получить дисперсионное уравнение не удалось. В настоящей работе этот вопрос решается строго математически и может служить средством для использования в различных прикладных вопросах. В частности, в строительстве возникают проблемы оценки поведения и живучести сооружений, имеющих треснувшие фундаменты. Развиваемый при этом математический метод применим при решении ряда технических проблем, таких как разделительная дамба разной ширины для водоемов, термоизоляция отдаленных или близких объектов на термоупругом основании, электрические поля в зоне между пьезоэлектрическими объектами на некотором основании, для моделирования самоорганизации и самосборки наночастиц при их сближении [25] и других. Контактная задача для совокупностей штампов возникает при создании элементной базы электроники, фильтров на поверхностных акустических волнах, прочности сооружений при параллельных креплениях, стабильности креплений шахтных штолен при параллельном их расположении и во многих других практически важных вопросах прочности.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается многослойная линейно деформируемая среда, находящаяся в условиях вибрации, описываемой функцией $e^{-i\omega t}$. Считая, что внешние воздействия на многослойную среду осуществляются с такой же временной функцией,

исключая ее из уравнений и граничных условий, приходим к стационарной граничной задаче. На ее верхней границе вводится декартова система координат таким образом, что ось ox_3 направлена по внешней нормали, оси ox_1, ox_2 лежат в касательной плоскости. Предполагается, что в областях Ω_{-A} ($-\infty < x_1 \leq -A, |x_2| \leq \infty$), Ω_A ($A \leq x_1 < \infty, |x_2| \leq \infty$) действуют абсолютно жесткие штампы, контактирующие без трения с многослойным основанием.

Контактная задача, отвечающая этой постановке, описывается системой интегральных уравнений вида [1, 2]

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega_{-A}} h(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2) q_{-A}(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 + \\ & + \iint_{\Omega_A} h(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2) q_A(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 = u_r(x_1, x_2), \\ & x_1, x_2 \in \Omega_r, \quad r = -A, A, \\ & \langle \alpha, x \rangle = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \end{aligned} \quad (1)$$

$$h(x_1, x_2) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{R^2} H(\alpha_1, \alpha_2) e^{-i\langle \alpha, x \rangle} d\alpha_1 d\alpha_2,$$

$$H(\alpha_1, \alpha_2) = O(u^{-1}), \quad u = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \rightarrow \infty.$$

Здесь $u_r(x_1, x_2)$ — заданные смещения оснований штампов, $q_r(x_1, x_2)$ — контактные напряжения. Считаем, что функция $H(\alpha_1, \alpha_2)$ — четная по обоим переменным мероморфная функция двух комплексных переменных $\alpha_k, k = 1, 2$, ее примеры приведены в многочисленных публикациях. Например, в [2] построены интегральные уравнения для линейно упругого слоя конечной толщины, жестко соединенного с абсолютно твердым основанием. Ядро для динамического случая имеет подобный вид:

$$\begin{aligned} H(u) &= x_2^2(\sigma_1 \text{sh} \sigma_1 \text{ch} \sigma_2 - u^2 \sigma_2^{-1} \text{sh} \sigma_2 \text{ch} \sigma_1) \Delta^{-1}(u), \\ \Delta(u) &= u^2(2u^2 - \theta_2^2) + u^2 \sigma_1^{-1} \sigma_2^{-1} \text{sh} \sigma_1 \times \\ &\times \text{sh} \sigma_2 [2u^4 - (\theta_1^2 + 2\theta_2^2)u^2 + \theta_1^2 \theta_2^2 + 0.25\theta_2^4] - \\ &- \text{ch} \sigma_1 \text{ch} \sigma_2 (2u^4 - \theta_2^2 u^2 + 0.25\theta_2^4), \\ \sigma_1 &= \sqrt{u^2 - \theta_1^2}, \quad \sigma_2 = \sqrt{u^2 - \theta_2^2}, \\ \theta_1^2 &= (\lambda + 2\mu)^{-1} \rho \omega^2 h^2, \quad \theta_2^2 = \mu^{-1} \rho \omega^2 h^2. \end{aligned}$$

Применим к двумерному интегральному уравнению (1) преобразование Фурье по координате x_2 . В результате место координаты x_2 у каждой, подвергнутой преобразованию Фурье функции, займет свободный параметр преобразования Фурье α_2 . Чтобы упростить формулы, временно скроем параметр α_2 введением обозначений

$$\begin{aligned}
h(x_1) &= h(x_1, \alpha_2), \quad q_r(\xi_1) = q_r(\xi_1, \alpha_2), \\
h(x_1) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\alpha_1) e^{-i\alpha_1 x_1} d\alpha_1, \quad H(\alpha_1) = H(\alpha_1, \alpha_2), \quad (2) \\
u_r(x_1) &= u_r(x_1, \alpha_2), \quad r = -A, A.
\end{aligned}$$

В результате принятых замен получим систему одномерных интегральных уравнений с двумя неизвестными вида

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{-A} h(x_1 - \xi_1) q_{-A}(\xi_1) d\xi_1 + \\
& + \int_A^{\infty} h(x_1 - \xi_1) q_A(\xi_1) d\xi_1 = u_{-A}(x_1), \quad -\infty < x_1 \leq -A, \\
& \int_{-\infty}^{-A} h(x_1 - \xi_1) q_{-A}(\xi_1) d\xi_1 + \\
& + \int_A^{\infty} h(x_1 - \xi_1) q_A(\xi_1) d\xi_1 = u_A(x_1), \quad A \leq x_1 < \infty.
\end{aligned} \quad (3)$$

В случае многослойной среды функция $H(\alpha_1)$, являясь мероморфной, имеет счетное число нулей z_{mo} и полюсов ξ_{so} . Им свойственно асимптотическое поведение вида

$$\begin{aligned}
\xi_{so} &= iv(s + 0.5)(1 + o(1)), \quad s \rightarrow \infty, \\
z_{mo} &= ivm(1 + o(1)), \quad m \rightarrow \infty, \quad v = \text{const} > 0.
\end{aligned}$$

В динамическом случае при достаточно большой частоте ω появляется конечное число вещественных нулей и полюсов. В этом случае представление ядра интегрального уравнения описывается интегралом, берущимся по контуру:

$$h(x_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} H(\alpha_1) e^{-i\alpha_1 x_1} d\alpha_1.$$

Контур γ совпадает с вещественной осью всюду, кроме зон вещественных полюсов, которые обходятся им по полуокружностям малого радиуса [2].

Составим в преобразованиях Фурье уравнение перемещения всей поверхности многослойной среды с учетом обоих контактных зон. Для этого продолжим систему интегральных уравнений (3) на всю ось, добавив справа на отрезке $[-A, A]$ новую неизвестную функцию $w_0(x_1)$, представляющую перемещение поверхности среды в промежутках между штампами. Применив к этой системе уравнений преобразование Фурье по x_1 , приходим к функциональному уравнению вида

$$\begin{aligned}
H(\alpha_1) Q_0^-(\alpha_1) + W_0(\alpha_1) + H(\alpha_1) Q_0^+(\alpha_1) &= \\
&= U_0^-(\alpha_1) + U_0^+(\alpha_1),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_0^-(\alpha_1) &= \int_{-\infty}^{-A} q_{-A}(x_1) e^{ix_1 \alpha_1} dx_1, \\
Q_0^+(\alpha_1) &= \int_A^{\infty} q_A(x_1) e^{ix_1 \alpha_1} dx_1, \\
U_0^-(\alpha_1) &= \int_{-\infty}^{-A} u_{-A}(x_1) e^{ix_1 \alpha_1} dx_1, \\
U_0^+(\alpha_1) &= \int_A^{\infty} u_A(x_1) e^{ix_1 \alpha_1} dx_1.
\end{aligned} \quad (4)$$

Здесь $W_0(\alpha_1)$ – преобразование Фурье функции перемещения $w_0(x_1)$ в свободной от напряжений зоны между штампами. В том случае, когда штампы сошлись торцами, имеем $W_0(\alpha_1) = 0$ и уравнение принимает вид

$$H(\alpha_1) Q_0^-(\alpha_1) + H(\alpha_1) Q_0^+(\alpha_1) = U_0^-(\alpha_1) + U_0^+(\alpha_1). \quad (5)$$

Это уравнение исследовано в [20, 21], где показано, что оно имеет сингулярную концентрацию контактных напряжений в зоне сближения штампов. Применим для исследования функционального уравнения (4) аппарат факторизации функций [1, 2], позволяющий свести его к отдельным интегральным уравнениям. С этой целью для четной функции $H(\alpha_1)$ осуществим деление всех членов функционального уравнения (4) на $H(\alpha_1)$. В результате получим соотношение

$$\begin{aligned}
Q_0^-(\alpha_1) + H^{-1}(\alpha_1) W_0(\alpha_1) + Q_0^+(\alpha_1) &= \\
&= H^{-1}(\alpha_1) [U_0^-(\alpha_1) + U_0^+(\alpha_1)].
\end{aligned} \quad (6)$$

Осуществим переход от функционального уравнения (6) к интегральному уравнению, применив к (6) обращение Фурье, получим его в виде

$$\begin{aligned}
& \int_{-A}^A h_0(x_1 - \xi_1) w_0(\xi_1) d\xi_1 = f_0(x_1), \quad |x_1| \leq A, \\
w_0(x_1) &= w_0(x_1, \alpha_2), \quad h_0(x_1) = h_0(x_1, \alpha_2), \\
w_0(x_1) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_0(\alpha_1) e^{-i\alpha_1 x_1} d\alpha_1, \\
h_0(x_1) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H^{-1}(\alpha_1) e^{-i\alpha_1 x_1} d\alpha_1,
\end{aligned} \quad (7)$$

$$H^{-1}(\alpha_1) = P^{-1}(\alpha_1) R(\alpha_1).$$

Здесь функция $f_0(x_1)$ имеет представление

$$\begin{aligned}
f_0(x_1) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H^{-1}(\alpha_1) [U_0^-(\alpha_1) + U_0^+(\alpha_1)] e^{-i\alpha_1 x_1} d\alpha_1, \\
&|x_1| \leq A.
\end{aligned}$$

Свойства ядра интегрального уравнения (7) обуславливают у функции $H^{-1}(\alpha_1)$ на бесконечности асимптотическое поведение вида

$$H^{-1}(\alpha_1) = O(|\alpha_1|).$$

Это свидетельствует о том, что интегральное уравнение, представленное с помощью классических функций, является интегро-дифференциальным.

Не изменяя это уравнение, приведем его к представлению, как интегро-дифференциальное, вынеся дифференциальный оператор. Введем произвольный параметр $\tau > 0$ и представим уравнение в виде

$$\begin{aligned} \left(-\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \tau^2\right) \int_{-A}^A h_1(x_1 - \xi_1) w_0(\xi_1) d\xi_1 &= f_0(x_1), \\ H_1(\alpha_1) &= (\alpha_1^2 + \tau^2)^{-1} H^{-1}(\alpha_1), \\ h_1(x_1) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\alpha_1^2 + \tau^2)^{-1} H^{-1}(\alpha_1) e^{-i\alpha_1 x_1} d\alpha_1, \\ H_1(\alpha_1) &= O(\alpha_1^{-1}). \end{aligned} \quad (8)$$

Рассматривая в (8) интеграл слева как неизвестную функцию, на которую действует дифференциальный оператор, обратим его, тогда получим представление вида

$$\begin{aligned} \int_{-A}^A h_1(x_1 - \xi_1) w_0(\xi_1) d\xi_1 &= f(x_1), \\ f(x_1) &= f_1(x_1) + c_1 f_2(x_1) + c_2 f_2(x_1), \\ f_1(x_1) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\eta) e^{-i\eta x_1} d\eta, \quad |x_1| \leq A, \\ f_2(x_1) &= e^{\tau x_1}, \quad f_3(x_1) = e^{-\tau x_1}, \\ F_1(\eta) &= H^{-1}(\eta) (\eta^2 + \tau^2)^{-1} [U_0^-(\eta) + U_0^+(\eta)]. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь постоянные обращения дифференциального оператора c_m , $m = 1, 2$, нуждаются в определении, что будет выполнено после построения решения интегрального уравнения (9).

ПОСТРОЕНИЕ ТОЧНОГО РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Метод построения точного решения интегрального уравнения (9) контактной задачи на многослойной среде опирается на работу авторов [19]. Ради краткости и возможности использования результатов этой работы введем в уравнении (9) новые обозначения, чтобы воспользоваться принятыми в работе [19] обозначениями:

$$h_1(x) = k(x), \quad w_0(\xi_1) = \varphi(\xi), \quad A = a. \quad (10)$$

В результате интегральное уравнение (9) приобретает принятый в работе [19] вид:

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a k(x - \xi) \varphi(\xi) d\xi &= f(x), \\ |x| \leq a, \quad k(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(u) e^{-iux} du, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} K(u) &= (u^2 + \tau^2)^{-1} H^{-1}(u), \\ f(x_1) &= f_1(x_1) + c_1 f_2(x_1) + c_2 f_2(x_1). \end{aligned}$$

Это позволяет применять использованные там обозначения и полученные необходимые формулы. Поскольку многослойная среда имеет конечную толщину, то преобразование Фурье ядра интегрального уравнения, функция $K(u)$, является мероморфной в комплексной плоскости переменного u и обладает свойствами, принятыми в [19]:

$$K(u) = A|u|^{-1} [1 + o(1)], \quad |u| \gg 1.$$

В изотропном случае она является четной и может представляться в виде $K(u) = P^{-1}(u)R(u)$. Здесь целые функции $R(u)$ и $P(u)$ имеют первый порядок и конечный тип, обладают счетными множествами нулей, которые предполагаются однократными, имеющими точки сгущения на бесконечности в окрестности мнимых полуосей. Асимптотическое представление нулей и полюсов верхней полуплоскости, свойственное многослойной среде, имеет вид [19], свойственный функции $K(u)$:

$$\xi_s = ir(s+0.5)(1+o(1)), \quad s \rightarrow \infty, \quad z_m = ir m(1+o(1)), \quad (12)$$

$$m \rightarrow \infty, \quad r = \text{const} > 0.$$

Используя описанные нули (12), строятся четные целые функции $R(u, z)$, $P(u, z)$ в форме бесконечных произведений [19]. Последние будут иметь вид

$$\begin{aligned} R(u^2, z) &= R_+(u, z) R_-(u, z), \\ R_{\pm}(u, z) &= T_{\mp} e^{\mp i u} \prod_{s=1}^{\infty} \left(1 \pm \frac{u}{z_s}\right) e^{\frac{u}{\pm z_s}}, \quad T_{\mp} = \text{const}, \\ P(u, \xi) &= P_{\mp}(u, \xi) P_{\pm}(u, \xi), \\ P_{\pm}(u, \xi) &= S_{\mp} e^{\mp i u} \prod_{s=1}^{\infty} \left(1 \pm \frac{u}{\xi_s}\right) e^{\frac{u}{\pm \xi_s}}, \quad S_{\mp} = \text{const}. \end{aligned} \quad (13)$$

Они, после деления на $P(u)$, дадут мероморфные функции, обозначенные $K(u) = P^{-1}(u, \xi) R(u, z)$. Их нулями являются $\pm z_m$, а полюсами $\pm \xi_s$ (12).

С помощью полученных функций построим мероморфные функции, обозначающие факторизованный в виде произведения вид [19]:

$$K_{\pm}(u) = P_{\pm}^{-1}(u, \xi) R_{\pm}(u, z).$$

ПОСТРОЕНИЕ БЕСКОНЕЧНОЙ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Следуя [19], будем искать решение интегрального уравнения (11) для правой части $f(x)$ в виде

$$\varphi(x) = F(\eta)e^{-i\eta x} + \sum_{n=1}^{\infty} [C_n^+ e^{iz_n(a+x)} + C_n^- e^{iz_n(a-x)}],$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\eta) e^{-i\eta x} d\eta, \quad (14)$$

$$F(\eta) = \int_{-a}^a [f_1(x_1) + c_1 f_2(x_1) + c_2 f_2(x_1)] e^{i\eta \xi} d\xi.$$

Внесем его в интегральное уравнение (11), предварительно вычислив представление ядра по вычитам и получив выражение [19]

$$k(x) = i \sum_{s=1}^{\infty} b_s e^{i\xi_s |x|}, \quad b_s = [P'(\xi_s)]^{-1} R(\xi_s).$$

В результате вычислений и приравнивания левой части интегрального уравнения правой приходим к бесконечным системам линейных алгебраических уравнений вида

$$[A \pm B(a)] X(\pm) = D(\pm),$$

$$A = \left\| \frac{1}{\xi_r - z_m} \right\|, \quad B(a) = \left\| \frac{\exp i2az_m}{\xi_r + z_m} \right\|, \quad (15)$$

$$D(\pm) = \left\{ \frac{F(\eta)}{K(\eta)} \left[\frac{e^{i\eta \eta}}{\eta + \xi_r} \pm \frac{e^{-i\eta \eta}}{\eta - \xi_r} \right] \right\},$$

$$X(\pm) = \{x_m(\pm)\}, \quad x_m(\pm) = C_m^+ \pm C_m^-.$$

Знаки в системе уравнений берутся в соответствии с этажностью.

Построенная бесконечная система уравнений изучалась в [19]. В ней построена обратная к A матрица A^{-1} , имеющая вид

$$A^{-1} = \|\tau_{gr}\|, \quad \tau_{gr} = \frac{1}{K_+(-z_g)(\xi_r - z_g)[K_+(-\xi_r)]'}.$$

Для дальнейшего исследования остановимся на выборе случая верхнего этажа в уравнении (15), случай нижнего изучается аналогично. Подействуем для случая верхнего этажа слева обратной матрицей A^{-1} на уравнение (15), получим уравнение второго рода вида

$$X = -A^{-1}B(a)X + A^{-1}D. \quad (16)$$

В работе [19] показано, что оно может решаться методом последовательных приближений для всех значений параметра a .

Тогда в этом интервале изменения параметра a на конечном отрезке $[-a, a]$ методом последовательных приближений можно построить точное решение интегрального уравнения Винера–Хопфа, которое имеет вид

$$X = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (A^{-1}B(a))^n A^{-1}D. \quad (17)$$

Средствами функционального анализа, посредством представления функции от бесконечной матрицы, в виде [19]

$$X = [I + A^{-1}B(a)]^{-1} A^{-1}D. \quad (18)$$

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ ТРЕЩИНЫ НОВОГО ТИПА

Построенное решение содержит произвольные постоянные c_1, c_2 , входящие в $f(x)$ (9), которые необходимо определить. Для их определения возвратимся к функции $w_0(x_1)$ (10). В силу линейности интегрального уравнения построенное решение имеет представление, в котором указанные постоянные явно выделены. С учетом наличия у решения $w_0(x_1)$ данного типа интегрального уравнения (11) особенности вида $\sqrt{a^2 - x_1^2}$ [19], запишем его в форме с этой выделенной особенностью и составляющими решения при постоянных $c_n, n = 1, 2$, т.е.

$$w_0(x_1) = \frac{m_1(x_1) + c_1 m_2(x_1) + c_2 m_3(x_1)}{\sqrt{a^2 - x_1^2}}. \quad (19)$$

Функции $m_n(x_1), n = 1, 2, 3$, являются решениями интегрального уравнения (11) для функций $f_n(x)$ в правой части соответственно. Постоянные c_n вычисляются из условия ограниченности функции $w_0(x_1)$ у краев штампов $\pm a$. Соответствующие уравнения имеют вид

$$c_1 m_2(a) + c_2 m_3(a) + m_1(a) = 0,$$

$$c_1 m_2(-a) + c_2 m_3(-a) + m_1(-a) = 0.$$

Искомые постоянные принимают значения

$$c_1 = \Delta^{-1} [m_1(-a)m_3(a) - m_1(a)m_3(-a)],$$

$$c_2 = \Delta^{-1} [m_1(a)m_2(-a) - m_1(-a)m_2(a)],$$

$$\Delta = m_2(a)m_3(-a) - m_2(-a)m_3(a).$$

На основании полученного результата определяются остальные параметры трещины нового типа, у которой у дна находится многослойная среда, а боковые берега формируются абсолютно жесткими штампами. Для нахождения контактных напряжений под штампом подставим вычисленные параметры $c_n, n = 1, 2$, в решение интегрального уравнения (19) и затем внесем это найденное решение в функциональное уравнение (6).

В функциональном уравнении осуществим факторизацию всех членов в виде суммы. В результате приходим к традиционному в методе Винера–Хопфа аналитическому продолжению комплексных функций, регулярных в верхней и нижней полуплоскостях на всю плоскость функцией $\Gamma(\alpha_1)$, являющейся в нашем случае тождественным нулем [1, 2]:

$$\begin{aligned} & Q_0^-(\alpha_1) + \{K^{-1}(\alpha_1)W_0(\alpha_1)\}^- - \\ & - \{K^{-1}(\alpha_1)[U_0^-(\alpha_1) + U_0^+(\alpha_1)]\}^- = \\ & = \{K^{-1}(\alpha_1)[U_0^-(\alpha_1) + U_0^+(\alpha_1)]\}^+ - \\ & - \{K^{-1}(\alpha_1)W_0(\alpha_1)\}^+ - Q_0^+(\alpha_1) = \Gamma(\alpha_1) \equiv 0. \end{aligned}$$

Здесь скобка $\{\}^\pm$ обозначает результат факторизации по параметру α_1 в виде суммы функции, заключенной в скобке, с обеспечением регулярностью в верхней комплексной полуплоскости для плюса и в нижней полуплоскости — для минуса.

Следуя методу решения функциональных уравнений Винера–Хопфа [1, 2], таким путем находим преобразования Фурье контактных напряжений под обоими штампами. Они имеют вид, с учетом временно скрытого параметра α_2 в (2):

$$\begin{aligned} Q_0^-(\alpha_1, \alpha_2) &= \{K^{-1}(\alpha_1, \alpha_2)[U_0^-(\alpha_1, \alpha_2) + U_0^+(\alpha_1, \alpha_2)]\}^- - \\ &- \{K^{-1}(\alpha_1, \alpha_2)W_0(\alpha_1, \alpha_2)\}^-, \\ Q_0^+(\alpha_1, \alpha_2) &= \{K^{-1}(\alpha_1, \alpha_2)[U_0^-(\alpha_1, \alpha_2) + U_0^+(\alpha_1, \alpha_2)]\}^+ - \\ &- \{K^{-1}(\alpha_1, \alpha_2)W_0(\alpha_1, \alpha_2)\}^+. \end{aligned}$$

Воспользовавшись обозначениями (2) и перейдя к старым, содержащим параметр α_2 , значения контактных напряжений можем представить в виде

$$\begin{aligned} q_{-A}(x_1, x_2) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} Q_0^-(\alpha_1, \alpha_2) e^{-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)} d\alpha_1 d\alpha_2, \\ &|x_1| \geq A, \quad |x_2| < \infty, \\ q_A(x_1, x_2) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} Q_0^+(\alpha_1, \alpha_2) e^{-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)} d\alpha_1 d\alpha_2. \end{aligned}$$

Полученный результат, в случае динамической задачи, показывает, что наличие двух штампов приводит к резонансу в среде и к неединственности решения контактной задачи для двух штампов при некоторых значениях параметров. Дисперсионное уравнение, описывающее резонансные частоты ω , входит в знаменатели постоянных c_n , $n = 1, 2$, и имеет вид

$$m_2(a)m_3(-a) - m_2(-a)m_3(a) = 0.$$

Наличие изолированных резонансных частот подтверждает ранее полученное иным способом

утверждение о неединственности решений интегральных уравнений динамических контактных задач для двух абсолютно жестких штампов [24].

ВЫВОД

Построенное точное решение контактной задачи для двух абсолютно жестких штампов позволило не только подтвердить ранее полученный результат о неединственности решения динамических контактных задач для совокупности штампов на многослойной среде, но и получить дисперсионное уравнение для определения резонансных частот. Полученные результаты могут найти применение в разных областях инженерной практики. В сейсмологии этот результат показал, что сейсмическая напряженность может нарастать даже до того, как литосферные плиты сблизилась и вызвали стартовое землетрясение [20, 21]. Резонанс может побудить этот процесс колебательными воздействиями с возросшей амплитудой. Эти же процессы приводят в движение наночастицы при их самоорганизации и сборке [25].

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, проект 22-21-00128.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М., 1974. 456 с.
2. Ворович И.И., Бабешко В.А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 320 с.
3. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980. 303 с.
4. Штаерман И.Я. Контактная задача теории упругости. М.: Гостехиздат, 1949. 272 с.
5. Горячева И.Г., Добычин М.Н. Контактные задачи трибологии. М.: Машиностроение, 1988. 256 с.
6. Papangelo A., Ciavarella M., Barber J.R. Fracture Mechanics implications for apparent static friction coefficient in contact problems involving slip-weakening laws // Proc. Roy. Soc (London). 2015. A 471 Issue: 2180: Article Number: 20150271.
7. Ciavarella M. The generalized Cattaneo partial slip plane contact problem // I-Theory, II-Examples, Int. J. Solids Struct. 1998. 35. P. 2349–2378.
8. Zhou S., Gao X.L. Solutions of half-space and half-plane contact problems based on surface elasticity // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik. 2013. T. 64. S. 145–166.
9. Guler M.A., Erdogan F. The frictional sliding contact problems of rigid parabolic and cylindrical stamps on graded coatings // Int. J. Mech. Sci 2007. V. 49. P. 161–182.

10. Ke L.-L., Wang Y.-S. Two-Dimensional Sliding Frictional Contact of Functionally Graded Materials // *Eur. J. Mech. A/Solids*. 2007. V. 26. P. 171–188.
11. Almqvist A., Sahlin F., Larsson R., Glavatskih S. On the dry elasto-plastic contact of nominally flat surfaces // *Tribology International*. 2007. V. 40 (4). P. 574–579.
12. Almqvist A. An lcp solution of the linear elastic contact mechanics problem. <http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange> 2013. V. 43216.
13. Andersson L.E. Existence results for quasistatic contact problems with Coulomb friction // *Appl. Math. Optim.* 2000. V. 42. P. 169–202.
14. Cocou M. A class of dynamic contact problems with Coulomb friction in viscoelasticity // *Nonlinear Analysis: Real World Applications*. 2015. V. 22. P. 508–519.
15. Cocou M., Rocca R. Existence results for unilateral quasistatic contact problems with friction and adhesion. *Math. Modelling and Num.* // *Analysis*. 2000. V. 34. P. 981–1001.
16. Kikuchi N., Oden J. Contact Problems in Elasticity: A Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods // *SIAM Studies in Applied Mathematics*. 1988. SIAM, Philadelphia.
17. Raous M., Cangermi L., Cocou M. A consistent model coupling adhesion, friction, and unilateral contact // *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.* 1999. V. 177. P. 383–399.
18. Shillor M., Sofonea M., Telega J.J. Models and Analysis of Quasistatic Contact // *Lect. Notes Phys.* 655. B., Heidelberg: Springer, 2004.
19. Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М. Зарецкая М.В., Евдокимов В.С. Точное решение уравнения Винера-Хопфа на отрезке для контактных задач и задач теории трещин в слоистой среде // *Доклады РАН. Физика, технические науки*. 2023. Т. 509. С. 39–44.
20. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. On the possibility of predicting some types of earthquake by a mechanical approach // *Acta Mechanica*. 2018. V. 229. № 5. P. 2163–2175. <https://doi.org/10.1007/s00707-017-2092-0>
21. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. Earthquakes and cracks of new type complementing the Griffith-Irvin's crack. Ch. 2 // *Advanced Structured Materials* Editors H. Altenbach, V.A. Eremeyev, L.A. Igumnov. Springer. 2021. P. 11–26. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-54928-2>
22. Морозов Н.Ф. Математические вопросы теории трещин. М.: Наука, 1984. 256 с.
23. Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М. Сингулярные решения контактных задач и блочные элементы // *ДАН*. 2017. Т. 475. № 1. С. 34–38. <https://doi.org/10.1134/S1028335817070011>
24. Бабешко В.А. О неединственности решений динамических смешанных задач для систем штампов // *ДАН СССР*. 1990. Т. 310. № 6. С. 1327–1334.
25. Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М. // Об одной механической модели самоорганизации наночастиц // *МТТ*. 2022. № 6. С. 12–18. <https://doi.org/10.31857/S0572329922060034>

ON CONTACT PROBLEMS FOR TWO STAMPS AND A NEW TYPE OF CRACK MODEL

Academician of the RAS V. A. Babeshko^{a,b}, O. V. Evdokimova^a, O. M. Babeshko^b,
M. V. Zaretskaya^b, and V. S. Evdokimov^b

^a*Southern Scientific Center of the Russian Academy of Sciences, Rostov-on-Don, Russia*

^b*Kuban State University, Krasnodar, Russia*

In this work, for the first time, an exact solution of the contact problem of interaction with a multilayer base of two semi-infinite stamps, the ends of which are parallel to each other, is constructed. Stamps are assumed to be absolutely rigid, and the distance between them can have any finite value. The task is an important stage in the algorithm for constructing models of a new type of crack in materials of different rheologies. The mechanism of destruction of the medium by cracks of a new type is radically different from the mechanism of destruction of the medium by Griffiths cracks, and has so far been poorly studied. Griffiths formed his cracks with a smooth border as a result of compression from the sides of an elliptical cavity in the plate. Cracks of a new type have a piecewise smooth border, resulting from the replacement of an ellipse with a rectangle compressed from the sides. The problem considered in the article can be considered as the result of the formation of a new type of crack with absolutely rigid banks and deformable lower boundary. Thanks to it, after the solution, it becomes possible to switch to deformable stamps and a crack of a new type in the rheological medium. The solution of this problem turned out to be possible due to the construction of exact solutions of the Wiener–Hopf integral equations on a finite segment. The paper shows how the solution of one of the previously unsolved problems allows us to investigate and solve exactly other problems, to identify previously unknown properties and resonances. As a result of constructing an exact solution to the problem, the fact that the solution of dynamic contact problems for stamp systems is not unique was confirmed and a dispersion equation for finding resonant frequencies was constructed.

Keywords: contact problem, multilayer media, stamps, Wiener–Hopf integral equation, infinite algebraic systems, resonances