

УДК 537.6

ВИХРЕВОЕ КОЛЬЦО В ФЕРРОМАГНЕТИКЕ

© 2023 г. Член-корреспондент РАН А. Б. Борисов^{1,*}, Д. В. Долгих^{1,**}

Поступило 02.06.2023 г.

После доработки 17.09.2023 г.

Принято к публикации 19.09.2023 г.

Предсказан новый тип вихревых структур в трехмерном ферромагнетике — вихревые кольца. Численными методами установлено, что эти структуры обладают конечной энергией. Также исследован характер взаимодействия пар таких колец в простейших случаях.

Ключевые слова: модель Гейзенберга, ферромагнетик, вихрь, вихревая нить, вихревое кольцо

DOI: 10.31857/S2686740023060020, **EDN:** HUEUTK

Вихревые распределения параметра порядка (вихри) широко используются в физике конденсированных сред. В теории магнетизма к таким структурам относятся плоские вихри (мероны), инстантоны [1–3] и скирмионы [4] в несоизмеримых двумерных магнетиках, предсказанные много лет назад. Помимо академического интереса такие структуры важны для спинтронной промышленности, где они рассматриваются как перспективные объекты переноса и хранения информации. Гамильтониан, определяющий магнитные структуры в ферромагнетиках, учитывает довольно много взаимодействий, которые образуют определенную иерархию. При этом наибольший вклад вносит обменное взаимодействие Гейзенберга. Поэтому один из подходов к исследованию новых локализованных магнитных структур заключается в минимизации обменной энергии и предсказании тем самым метастабильных состояний. В континуальном приближении статическим структурам отвечает плотность обменной энергии с постоянной J :

$$E_0 = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2} J (\nabla n_i) (\nabla n_i) \quad (1)$$

для единичного вектора намагниченности $\mathbf{n} = \mathbf{M}/M_0$. В безразмерных переменных уравнения вариационной задачи для статических распределений параметра порядка $\mathbf{n} = \mathbf{n}(x_1, x_2)$ имеют вид

$$\Delta \mathbf{n} - \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \Delta \mathbf{n}) = 0, \quad \mathbf{n}^2 = 1. \quad (2)$$

Для дальнейшего анализа удобно параметризовать вектор $\mathbf{n}$ сферическими углами Φ, θ :

$$\mathbf{n} = (\cos \Phi \sin \theta, \sin \Phi \sin \theta, \cos \theta).$$

Тогда уравнения (2) записываются в виде

$$\Delta \theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta (\nabla \Phi)^2 = 0, \quad (3)$$

$$2 \cos \theta (\nabla \theta \cdot \nabla \Phi) + \sin \theta \Delta \Phi = 0. \quad (4)$$

Модель (1) часто называется $O(3)$ -моделью в двумерном пространстве. Она имеет многочисленные приложения в теории поля и физике конденсированных сред (жидкие кристаллы [4]).

Магнитные вихри являются частным случаем дефектов физики конденсированных сред, которые достаточно давно наблюдались и исследовались в различных средах. Исторически исследование вихрей прежде всего связано с гидродинамикой. Начиная с работы Гельмгольца в 1868 г., в гидродинамике исследованы различные типы вихревых структур [5–7]. Среди них особый интерес вызывают тороидальные вихревые кольца в обычной жидкости и воздухе. Отметим также, что в последние годы активно исследуются вихревые кольца в различных молях теории поля (например, [8, 9]).

Цель этой работы — предсказать и проанализировать вихревые кольца в трехмерном ферромагнетике.

Плотность энергии (1) инвариантна относительно группы спиновых и пространственных вращений $SO(3) \times SO(3)$, и без ограничений общности мы рассмотрим решение для вихревой нити в форме окружности радиуса R в плоскости $z = 0$ с центром в начале координат, когда вектор

¹Институт физики металлов имени М.Н. Михеева
Уральского отделения Российской академии наук,
Екатеринбург, Россия

*E-mail: borisov@imp.uran.ru

**E-mail: dolgihd@imp.uran.ru

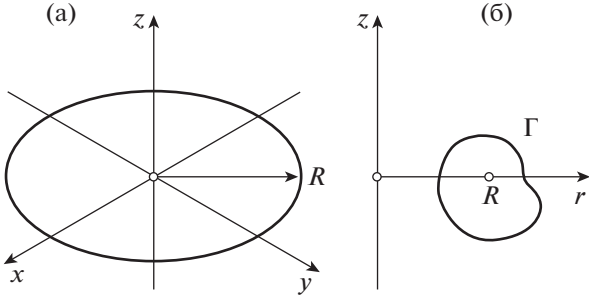


Рис. 1. Вихревое кольцо в плоскости Oxy декартовой системы координат (а) и контур Γ в цилиндрической системе (б).

намагниченности $\mathbf{n}$ лежит в плоскости ($\theta = \pi/2$). Тогда поле Φ в цилиндрической системе координат (r, z, φ) не зависит от угла φ , и уравнение (4) переходит в уравнение Лапласа

$$\partial_r^2 \Phi + \frac{1}{r} \partial_r \Phi + \partial_z^2 \Phi = 0. \quad (5)$$

Вихревая структура поля Φ (вихревое кольцо, рис. 1а) с топологическим зарядом $Q \in \mathbb{Z}$ характеризуется условием

$$\oint_{\Gamma} \partial_r \Phi dr + \partial_z \Phi dz = 2\pi Q, \quad \partial_r \Phi \rightarrow 0, \quad (6)$$

$$\partial_z \Phi \rightarrow 0 \quad (r^2 + z^2 \rightarrow \infty),$$

где Γ — произвольный контур в плоскости r, z , окружающий точку $r = R, z = 0$ (рис. 1б).

С помощью формулы Грина условие (6) записывается в виде некоммутативности частных производных от вихревого поля Φ :

$$\partial_z \partial_r \Phi - \partial_r \partial_z \Phi = \Delta(r, z). \quad (7)$$

Здесь введено обозначение $\Delta(r, z) = 2\pi Q \delta(r - R) \delta(z)$. Для решения задачи (5), (7) достаточно найти явный вид частных производных $\partial_r \Phi, \partial_z \Phi$, которые обозначим как новые поля $\varphi_1 = \partial_r \Phi, \varphi_2 = \partial_z \Phi$. Тогда, дифференцируя уравнение

$$\partial_r \varphi_2 - \partial_z \varphi_1 = \Delta(r, z)$$

по переменной r и складывая его с уравнением (5), продифференцированным по z , с учетом равенства $\partial_r \partial_z \varphi_1 = \partial_z \partial_r \varphi_1$ получаем замкнутое уравнение для расчета φ_2 :

$$\partial_r^2 \varphi_2 + \partial_z^2 \varphi_2 + \frac{1}{r} \partial_r \varphi_2 = \partial_r \Delta + \frac{1}{r} \Delta. \quad (8)$$

Уравнение

$$\partial_r^2 \varphi_1 + \partial_z^2 \varphi_1 + \partial_r \left(\frac{1}{r} \varphi_1 \right) = \partial_z \Delta \quad (9)$$

можно получить аналогичным способом. Решение линейного неоднородного уравнения (8) имеет вид

$$\varphi_2(r, z) = \int_0^\infty dr' \int_{-\infty}^\infty dz' G_2(r, r', z, z') \times \left(\partial_{r'} \Delta(r', z') + \frac{1}{r'} \Delta(r', z') \right), \quad (10)$$

где функция Грина $G_2(r, r', z, z')$ подчиняется уравнению

$$\partial_r^2 G_2 + \frac{1}{r} \partial_r G_2 + \partial_z^2 G_2 = \delta(r - r') \delta(z - z'). \quad (11)$$

Ее явный вид можно получить, используя представление в виде

$$G_2(r, r', z, z') = \frac{1}{2\pi} \iint J_0(k_2 r) C(k_1, k_2, r') \exp i k_1 (z - z') dk_1 dk_2 \quad (12)$$

и выражая правую часть уравнения (11) через функции Бесселя J_0 первого рода нулевого порядка:

$$\delta(r - r') \delta(z - z') = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty J_0(k_2 r') \times J_0(k_2 r) k_2 dk_2 \int_{-\infty}^\infty \exp(i k_1 (z - z')) dk_1.$$

Тогда

$$C(k_1, k_2, r') = -\frac{r' k_2}{k_1^2 + k_2^2} J_0(k_2 r')$$

и интеграл в (12) вычисляется с помощью теоремы о вычетах и табличной формулы:

$$\int_0^\infty \exp(-px) J_0(bx) J_0(cx) dx = \frac{k}{\pi \sqrt{bc}} K(k),$$

где

$$k = \frac{2\sqrt{bc}}{\sqrt{p^2 + (b + c)^2}}.$$

В результате функция Грина выражается через полный эллиптический интеграл первого рода $K(k)$ [10]:

$$G_2(r, r', z, z') = \frac{r'}{\pi \sqrt{(z - z')^2 + (r + r')^2}} K(k) \quad (13)$$

с модулем

$$k = \frac{2\sqrt{rr'}}{\sqrt{(z - z')^2 + (r + r')^2}}, \quad (14)$$

зависящим от координат r, r', z, z' . Нетрудно убедиться, что величина k меняется от нуля (при

$r \rightarrow \infty$) до единицы (при $r' \rightarrow r$, $z' \rightarrow z$). Из-за сингулярного поведения полного эллиптического интеграла первого рода

$$K(k) \approx \ln \frac{4}{\sqrt{1-k^2}}$$

при $k \rightarrow 1$ выражение (13) при $r' \rightarrow r$, $z' \rightarrow z$ имеет характерную логарифмическую особенность. Тогда из (10) сразу следует явное выражение для $\partial_z \Phi$:

$$\begin{aligned} \partial_z \Phi &= -\partial_{r'} G_2(r, R, z, 0) + \frac{1}{r'} G_2(r, R, z, 0) = \\ &= -\frac{Q}{\sqrt{(R+r)^2 + z^2}} \left[\frac{R^2 - r^2 - z^2}{(R-r)^2 + z^2} E(\kappa) + K(\kappa) \right] \end{aligned} \quad (15)$$

через полные эллиптические интегралы первого $K(\kappa)$ и второго рода $E(\kappa)$ с модулем

$$\kappa = \frac{2\sqrt{rR}}{\sqrt{(R+r)^2 + z^2}}. \quad (16)$$

Подобным образом с помощью функции Грина

$$G_1(r, r', z, z') = -\frac{r'}{2\pi k \sqrt{r'}} [(2-k^2)K(k) - 2E(k)],$$

где k определяется формулой (14), для уравнения (9) можно найти выражение для $\partial_r \Phi$:

$$\begin{aligned} \partial_r \Phi &= -\frac{Qz}{r\sqrt{(R+r)^2 + z^2}} \times \\ &\times \left[\frac{R^2 + r^2 + z^2}{(R-r)^2 + z^2} E(\kappa) - K(\kappa) \right]. \end{aligned} \quad (17)$$

Тогда из (15), (17) находим вихревую структуру поля Φ при $r \rightarrow R$, $z \rightarrow 0$:

$$\Phi(r, z) = -Q \arctg \frac{r-R}{z}. \quad (18)$$

В явном виде функцию $\Phi(r, z)$ можно получить численным интегрированием уравнения (15) или (17). В поперечном сечении плоскостью $x=0$ ясно виден дублет плоских вихрей с зарядами $Q = -1$ и $Q = 1$ в точках $(z=0, y=1)$ и $(z=0, y=-1)$ соответственно (рис. 2). Для наиболее полного понимания структуры кольца в R^3 мы приводим два видеоряда, в которых векторное поле представлено с помощью сечений вертикальной плоскостью, проходящей через ось Oz : в первом [11] плоскость вращается относительно оси Oz неподвижной системы координат $Oxyz$, во втором [12] поле представлено в этой же секущей плоскости, наблюдаемой в связанной с ней подвижной системе координат.

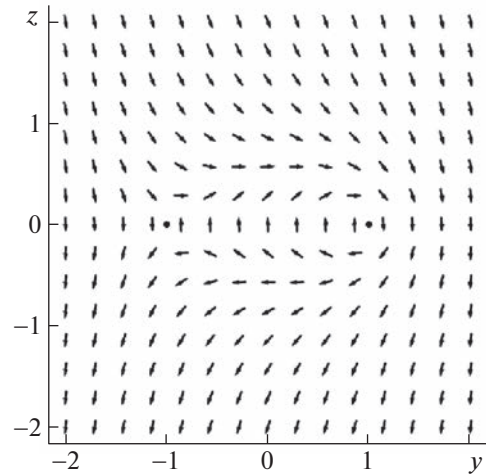


Рис. 2. Структура векторного поля $\mathbf{n} = (\cos \Phi, \sin \Phi)$ в окрестности вихревого кольца при $R=1$, сечение плоскостью $x=0$.

Обсудим энергию вихревого кольца. В соответствии с (1), (15), (17) полная энергия E вихревого кольца имеет вид

$$E = \frac{1}{2} J \int [(\partial_r \Phi)^2 + (\partial_z \Phi)^2] dr.$$

Известно [1, 2], что полная энергия плоского вихря в магнетике в образце с размером L пропорциональна $\pi \ln(L/a)$, где a — радиус кора (сердцевинный вихрь). На расстояниях $r < a$ не применимо континуальное приближение, и нужно использовать аппроксимацию решений или учитывать дискретность решетки. Энергия взаимодействия двух плоских вихрей (рис. 2), удаленных друг от друга на расстоянии $2R$, пропорциональна $\pi \ln(R/a)$. Поэтому в грубом приближении энергия вихревого кольца должна быть пропорциональна $\pi \ln(R/a)$, умноженной на длину кольца $2\pi R$, и не должна зависеть от размеров образца. Проведенные численные расчеты приводят к формуле

$$E \sim JQ^2 R \left(2\pi^2 b \ln \frac{R}{a} + c \right) \quad (b \approx 1.01, c \approx 0.87). \quad (19)$$

Параметры b и c вычислены методом наименьших квадратов. Эта формула хорошо аппроксимирует энергию кольца при численных расчетах (рис. 3) и очень хорошо совпадает с качественной оценкой в логарифмическом приближении. Отметим, что при вычислениях мы не учитываем область внутри тороида

$$(r^2 + z^2 + R^2 - a^2)^2 - 4R^2(r^2) = 0,$$

где неприменимо континуальное приближение.

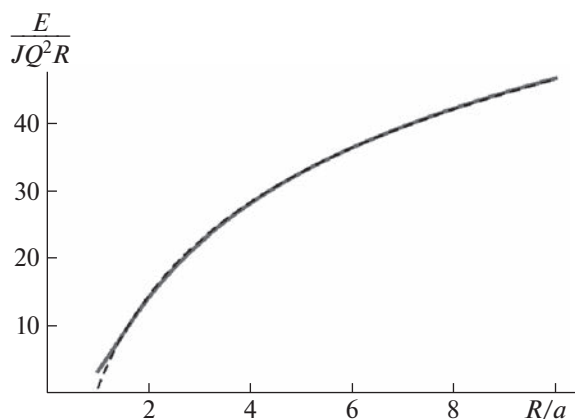


Рис. 3. Энергия кольца E , отнесенная к радиусу R (сплошная серая линия – численный расчет), и ее аппроксимация (19) (штриховая линия).

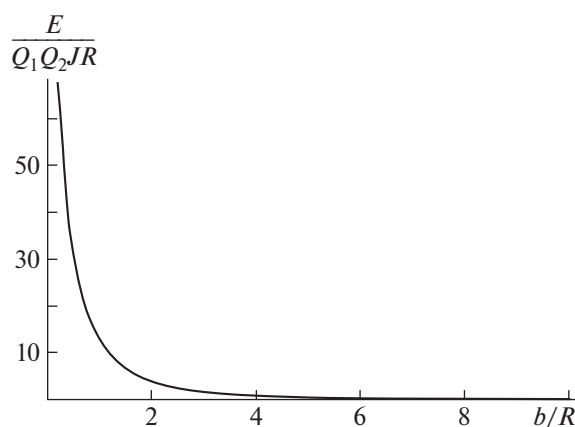


Рис. 4. Зависимость энергии взаимодействия двух соосных колец от расстояния между их центрами b (численный расчет). Радиус кора $a = 0.1R$, $Q_i \in \mathbb{Z}$, $Q_1 \cdot Q_2 > 0$.

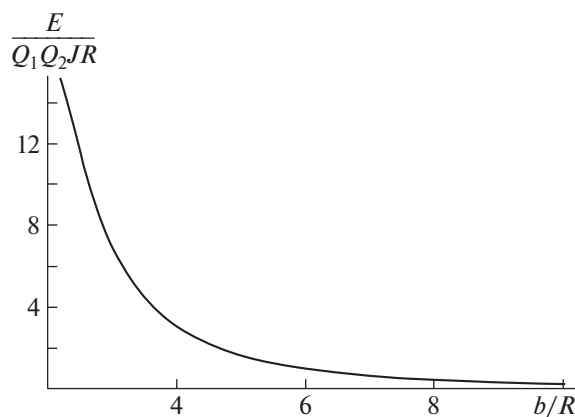


Рис. 5. Зависимость энергии взаимодействия двух колец, расположенных в одной плоскости, от расстояния между их центрами b (численный расчет). Радиус кора $a = 0.1R$, $Q_i \in \mathbb{Z}$, $Q_1 \cdot Q_2 > 0$.

Чтобы понять характер взаимодействия вихревых колец, были проведены численные расчеты для двух простых случаев. Вначале мы рассмотрели два вихревых кольца одинакового радиуса R с положительными топологическими зарядами Q_1 и Q_2 , центры которых располагаются на оси Oz и отстоят друг от друга на расстоянии b . График зависимости энергии их взаимодействия от b приведен на рис. 4.

Во втором случае исследовалось взаимодействие двух колец, расположенных в плоскости xOy . Зависимость энергии взаимодействия от расстояния между центрами колец b качественно соответствует предыдущему случаю (рис. 5). Аналитическое описание взаимодействия вихревых колец является предметом дальнейшего изучения.

Предсказанные вихревые кольца метастабильны. Такие структуры могут зарождаться только при учете тепловых флуктуаций. В реальных трехмерных магнетиках кольца стабильны только при наличии дефекта в центре кольца или при наличии анизотропии или магнитного поля в легкой плоскости.

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы глубоко признательны В.В. Киселеву за интерес к работе и полезные замечания.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки России (тема “Квант”, номер г.р. 122022000038-7).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Косевич А.М., Иванов Б.А., Ковалев А.С. Нелинейные волны намагниченности. Динамические и топологические солитоны. Киев: Наукова думка, 1983. 123 с.
2. Kosevich A.M., Ivanov B.A., Kovalev A.S. Magnetic Solitons // Physics Reports. 1990. V. 194. № 3–4. P. 117–238.
[https://doi.org/10.1016/0370-1573\(90\)90130-T](https://doi.org/10.1016/0370-1573(90)90130-T)
3. Богданов А.Н., Яблонский Д.А. Термодинамические устойчивые “вихри” в магнитоупорядоченных кристаллах. Смешанное состояние магнетиков // ЖЭТФ. 1989. Т. 95. № 1. С. 178–182.
4. Курик М.В., Лаврентович О.Д. Дефекты в жидких кристаллах: гомотопическая теория и экспериментальные исследования // УФН. 1988. № 3. С. 381–431.
<https://doi.org/10.3367/UFG.0154.198803b.0381>
5. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. М: Мир, 1973. 778 с.

6. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Проблемы гидродинамики и их математические модели. М.: Наука, 1973. 416 с.
7. Ламб Г. Гидродинамика. М.: ОГИЗ, 1947. 929 с.
8. Bazeia D., Marques M.A., Melnikov D. Planar ringlike vortices // *Physics Letters B*. 2018. V. 785. № 10. P. 454–461.
<https://doi.org/10.1016/j.physletb.2018.09.012>
9. Bazeia D., Liao M.A., Marques M.A., Menezes R. Multilayered vortices // *Phys. Rev. Research*. 2019. V. 1. P. 033053.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevResearch.1.033053>
10. Byrd P.F., Friedman M.D. Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Scientists. N.Y., Heidelberg, Berlin: Springer–Verlag, 1971. 358 p.
11. Структура векторного поля в R^3 .
<https://youtu.be/Hi0PwsjwEs4>
12. Векторное поле в поперечном сечении вихревого кольца. <https://youtu.be/zuBcOU5Ds6U>

THE VORTEX RING IN FERROMAGNET

Corresponding Member of the RAS **A. B. Borisov^a** and **D. V. Dolgikh^a**

^a*M.N. Mikheev Institute of Metal Physics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, Russia*

A new type of vortex structures in the 3D ferromagnet is predicted – the vortex rings. It was established by experimental methods that these structures have finite energy. The nature of the interaction of pairs of such rings in the simplest cases was investigated.

Keywords: Heisenberg model, ferromagnet, vortex, vortex axis, vortex ring