

УДК 532.516: 532.529

АНАЛИТИЧЕСКАЯ СВЯЗЬ МЕЖДУ КОЭФФИЦИЕНТАМИ ПРИСОЕДИНЕННОЙ МАССЫ И ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В СУСПЕНЗИИ СФЕРИЧЕСКИХ ЧАСТИЦ

© 2023 г. Б. В. Бошнятов^{1,*}

Представлено академиком РАН Р.И. Нигматулиным 27.02.2023 г.

Поступило 15.03.2023 г.

После доработки 15.03.2023 г.

Принято к публикации 07.05.2023 г.

Получена аналитическая зависимость между безразмерными коэффициентами присоединенной массы и теплопроводности в суспензии сферических частиц. Зависимость подтверждается сравнением с теоретическими данными других авторов, в том числе при повышенных концентрациях дисперсных частиц с учетом их гидродинамического взаимодействия.

Ключевые слова: суспензия, идеальная несжимаемая жидкость, коэффициент присоединенной массы, коэффициент теплопроводности

DOI: 10.31857/S2686740023050024, EDN: OWNGMS

Поиск функциональных соотношений между различными свойствами гетерогенных сред и материалов является одной из фундаментальных проблем механики неоднородных сред, имеющей важное практическое значение. Такие соотношения становятся особенно полезными при разработке многофункциональных композиционных материалов или когда одно свойство сложной дисперсной среды легче измерить, чем другое. Известно, что теплопроводность, электро- и магнитостатика, диэлектрическая проницаемость и диффузия описываются уравнением Лапласа ($\nabla^2 \varphi = 0$) и идентичными граничными условиями: на бесконечности – при $\mathbf{r} \rightarrow \infty$, $\varphi \rightarrow 0$, на поверхности раздела фаз

$$\Lambda_2 \frac{d\varphi_2}{dn} = \Lambda_1 \frac{d\varphi_1}{dn}. \quad (1)$$

В уравнении (1) φ – потенциал соответствующего скалярного поля; нижний индекс 1 относит параметры к дисперсионной среде, индекс 2 – к дисперсной фазе; $\mathbf{n}$ – вектор нормали к поверхности раздела фаз; Λ – обобщенный коэффициент проводимости [1], который линейным образом связывает потоки $\mathbf{j}_i$ ($i = 1, 2$) и $\langle \mathbf{j} \rangle$ с соответствующим градиентом скалярного поля

$$\mathbf{j}_i = -\Lambda_i \nabla \varphi_i, \quad \langle \mathbf{j} \rangle = -\Lambda^* \langle \nabla \varphi \rangle. \quad (2)$$

В уравнении (2): угловые скобки $\langle \dots \rangle$ означают усреднение локальных параметров среды по представительному объему Ω , который намного больше микроструктурных неоднородностей дисперсной среды, но намного меньше масштаба ее макроскопических неоднородностей $l^3 \ll \Omega \ll L^3$; Λ^* – эффективный обобщенный коэффициент проводимости дисперсной среды. Поэтому решение для эффективного коэффициента теплопроводности дисперсной среды в безразмерном виде λ^*/λ_1 одинаково пригодно для вычисления коэффициентов электропроводности σ^*/σ_1 и любого другого безразмерного параметра $\alpha^* = \Lambda^*/\Lambda_1$, характеризующего перечисленные выше физические процессы.

Значительно сложнее оказалось найти связь между обобщенным коэффициентом проводимости дисперсной среды и коэффициентом присоединенной массы [2, 3]. Теоретически присоединенную массу обычно находят, рассматривая течение в приближении идеальной несжимаемой жидкости [4], кинематика которого, как и теплопроводность, описывается уравнением Лапласа, однако условие на границе фаз отличается. Вместо (1) мы имеем $\frac{d\varphi_2}{dn} = \frac{d\varphi_1}{dn}$ – условие равенства компонент скорости нормальных к поверхности раздела фаз. Поэтому авторы работы [2] пришли к выводу, что такой универсальной взаимосвязи в

¹Институт прикладной механики
Российской академии наук, Москва, Россия

*E-mail: bosbosh@mail.ru

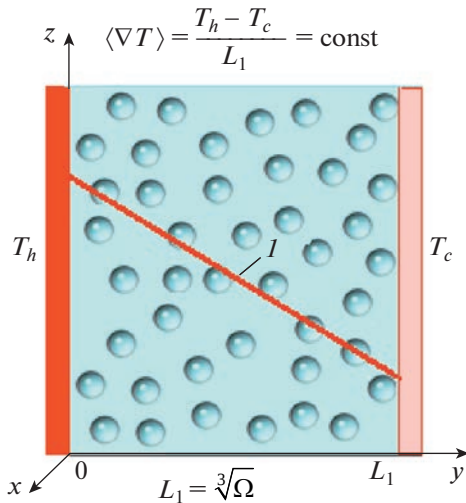


Рис. 1. Схема макроскопического процесса теплопередачи в дисперсной среде: I – линейное изменение температуры в слое дисперсной среды $\langle T \rangle = -cy$, $\langle \nabla T \rangle = -c = \text{const}$, поток тепловой энергии $\langle j \rangle = -\lambda^* \langle \nabla T \rangle$.

общем случае не существует. С другой стороны, в работе [3] в результате сравнительного анализа уравнений электростатики и линеаризованных уравнений Навье–Стокса показано, что коэффициенты присоединенной массы и коэффициент сопротивления дисперсных частиц в суспензии могут быть выражены точно через параметры ее диэлектрической проницаемости. Тем самым в работе [3] фактически доказано существование соответствующей физической аналогии. Однако аналитическая зависимость, которая бы связывала в безразмерной форме эффективные коэффициенты присоединенной массы и обобщенной проводимости в дисперсной среде, до сих пор никем не получена.

Рассмотрим статистически однородную и изотропную двухфазную дисперсную среду, состоящую из однородных и изотропных компонентов: сферических дисперсных частиц и непрерывной дисперсионной жидкости. Условия соответствия физической аналогии тепловых и гидродинамических процессов в таких средах, при условии отсутствия гидродинамического взаимодействия дисперсных частиц, были получены в работе [5]. При этом сравнивались два точных решения для одиночной сферы: решение динамической задачи о движении сферы в однородном поле скоростей в приближении идеальной несжимаемой жидкости (уравнение Лапласа плюс уравнение движения [6]) и аналогичная задача о теплопроводности (диэлектрической проницаемости) одиночной сферы (уравнение Лапласа [7]). В проекции на направление внешнего поля $\langle \nabla \Phi \rangle_y$ и

$\langle \nabla T \rangle_y$, условия соответствия тепло-гидродинамической аналогии имеют следующий вид (далее везде нижний индекс “y” опущен):

$$\alpha \leftrightarrow 2\gamma - 1; \quad \frac{\langle \nabla T_2 \rangle}{\langle \nabla T_1 \rangle} \leftrightarrow \frac{\langle \nabla \Phi_2 \rangle}{\langle \nabla \Phi_1 \rangle}, \quad (3)$$

где $\alpha = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$, $\gamma = \frac{\rho_2}{\rho_1}$, ρ – плотность, T – скалярное поле температур.

Чтобы найти функциональную связь между эффективными коэффициентами присоединенной массы и теплопроводности, необходимо их представить в безразмерном виде, как функции параметров соответствия (3).

Формулы для расчета эффективного коэффициента теплопроводности $\alpha^* = \lambda^*/\lambda_1$ следуют непосредственно из уравнений (2):

$$\frac{\alpha^* - 1}{(\alpha - 1)f_2} = \frac{\langle \nabla T_2 \rangle}{\langle \nabla T \rangle}, \quad (4)$$

$$\langle \nabla T \rangle = \langle \nabla T_1 \rangle (1 - f_2) + \langle \nabla T_2 \rangle f_2, \quad (5)$$

где $f_2 = 1 - f_1$ – объемная концентрация дисперсной фазы.

Формула (4) описывает макроскопическую (усредненную по объему Ω) теплопроводность дисперсной среды. Такой процесс теплопередачи реализуется, если дисперсную среду, объемом Ω , поместить между горячей T_h и холодной T_c плоскими стенками (рис. 1), при этом напряженность внешнего поля $\langle \nabla T \rangle = \text{const}$.

Гидродинамическим аналогом такого процесса теплопередачи является течение дисперсной среды, в приближении идеальной несжимаемой жидкости, под воздействием внешнего поля скоростей $\langle \nabla \Phi \rangle = \text{const}$. Присоединенная масса дисперсных частиц возникает при нестационарном процессе, если дисперсную среду, которая первоначально находилась в покое относительно инерциальной системы отсчета $x-y-z$ (рис. 2а), привести в движение импульсным образом, мгновенно изменяя ее скорость на бесконечности от нуля до $W^0 = \text{const}$:

$$W(t) = \begin{cases} 0, & \text{при } t \leq 0, \\ W^0, & \text{при } t > 0. \end{cases} \quad (6)$$

Уравнение движения дисперсной частицы, вдали от стенки, в той же (инерциальной) системе отсчета будет иметь следующий вид [6, 8, 9]:

$$\frac{d}{dt} \rho_2 \tau v_2 = \rho_1 \tau \frac{dW}{dt} - m_w \frac{d}{dt} (v_2 - W). \quad (7)$$

В уравнении (7) $\tau = \frac{4}{3} \pi a^3$, a – радиус дисперсной частицы; m_w – присоединенная масса.

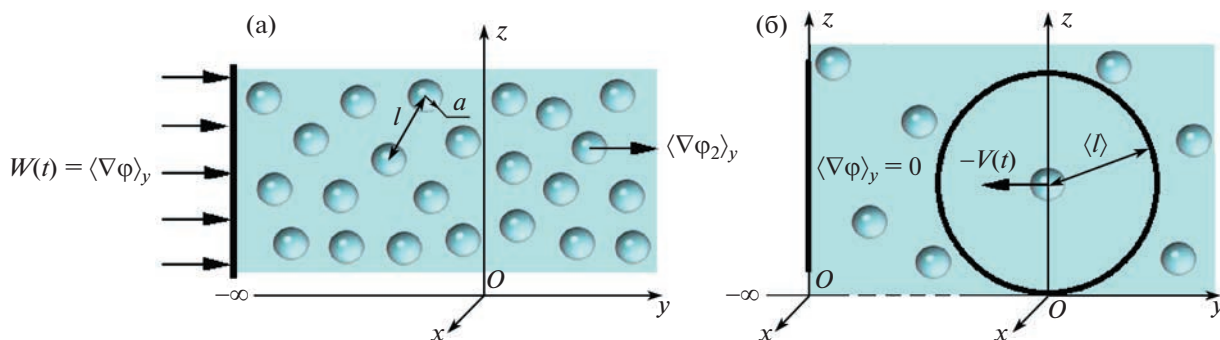


Рис. 2. Постановка гидродинамической задачи: а – для дисперсной среды, в том числе с учетом взаимодействия сферических частиц; б – Зубером (N. Zuber) при вычислении присоединенной массы дисперсной частицы “методом ячейки”.

С левой стороны уравнения (7) – производная по времени от импульса дисперсной частицы. С правой стороны – силы, которые действуют на дисперсную частицу. Первый член – сила, аналогичная силе Архимеда, из-за ускорения $\frac{dW}{dt}$, второй член – сила реакции на дисперсную частицу из-за инерции присоединенных масс жидкости. Интегрируя уравнение (7) по времени и заменяя $v_2 = \langle \nabla \varphi_2 \rangle$, $W^0 = \langle \nabla \varphi \rangle$, получим формулу для расчета эффективного коэффициента присоединенной массы дисперсной частицы $\mu_w = \frac{m_w}{\rho_1 \tau}$:

$$\frac{1 + \mu_w}{\gamma + \mu_w} = \frac{v_2}{W^0} = \frac{\langle \nabla \varphi_2 \rangle}{\langle \nabla \varphi \rangle}. \quad (8)$$

Поскольку из (3) и (5) следует формула соответствия $\frac{\langle \nabla \varphi_2 \rangle}{\langle \nabla \varphi \rangle} \leftrightarrow \frac{\langle \nabla T_2 \rangle}{\langle \nabla T \rangle}$, то, приравнявая левые части уравнений (4) и (8), получим искомую функциональную связь эффективных коэффициентов α^* и μ_w :

$$\frac{\alpha^* - 1}{(\alpha - 1)f_2} = \frac{1 + \mu_w}{\gamma + \mu_w}, \quad \alpha \leftrightarrow 2\gamma - 1. \quad (9)$$

Подтвердим справедливость формулы (9), используя известные теоретические и численные расчеты других авторов. Впервые теоретическую зависимость коэффициента присоединенной массы μ_w от концентрации частиц получил Зубер [10]:

$$\mu_w = \frac{11 + 2f_2}{2(1 - f_2)}. \quad (10)$$

Из формулы (10) следует ранее известный результат: при $f_2 \rightarrow 0$ $\mu_w = 1/2$. При выводе формулы (10) Зубер использовал приближение идеальной несжимаемой жидкости и модель жесткой сферической “ячейки” (рис. 2б), имеющей сред-

ний радиус $\langle l \rangle = a/f_2^{1/3}$, в центре которой была помещена сферическая (с радиусом a) дисперсная частица. Скорость частицы относительно жесткой стенки ячейки задается формулой (6): $\nabla \varphi_2 = -V(t)$. Если предположить, что на динамику данной частицы не оказывают влияния гидродинамические поля возмущений от соседних частиц (гидродинамическое взаимодействие частиц отсутствует), то жесткая граница ячейки переносится на $\mathbf{r} \rightarrow \infty$ и дает граничное условие для дисперсной среды $\mathbf{r} \rightarrow \infty$, $\nabla \varphi \rightarrow 0$. С учетом принципа относительности Галилея постановка задачи Зубером совпадает с постановкой задачи в данной работе (рис. 2а) и в работах [2, 9, 11].

В работе [2] приведены результаты численных расчетов присоединенной массы дисперсных частиц в зависимости от их объемной концентрации при различных пространственных распределениях частиц – хаотичном и гексагональном (body-centered cubic arrays – BCC). При этом, как и в работе [3], авторы использовали линеаризованные уравнения Навье–Стокса. На рис. 3 показаны зависимости коэффициента присоединенной массы пузырьков ($\gamma \ll 1$) от их объемной концентрации, полученные различными авторами. Из рис. 3 видно, что численные расчеты [2] удивительным образом подтверждают справедливость формулы Зубера, которая не учитывает гидродинамическое взаимодействие частиц, во всем расчетном диапазоне концентраций $0 < f_2 < 0.5$. При этом характер пространственного распределения пузырьков (хаотичное или периодическая гексагональная решетка) практически не влияет на результаты численных расчетов. Теории линейного приближения, даже с учетом взаимодействия частиц [3, 9, 11], дают результат, совпадающий с численным экспериментом [2] лишь в диапазоне $0 < f_2 < 0.1$.

Если мы в формулу (9) подставим зависимость Зубера (10) для коэффициента присоединенной

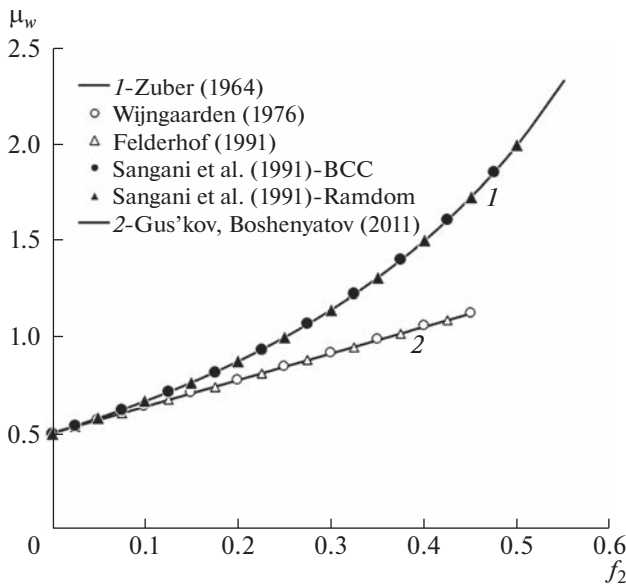


Рис. 3. Зависимость присоединенной массы пузырьков ($\gamma \ll 1$) от их объемной концентрации: 1 – формула Зубера (10), которая не учитывает гидродинамическое взаимодействие пузырьков; 2 – зависимость с учетом гидродинамического взаимодействия пузырьков в линейном приближении.

массы, то получим знаменитую формулу Максвелла:

$$\alpha^* = \frac{1 + 2\beta f_2}{1 - \beta f_2}, \quad \text{где} \quad \beta = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 2}, \quad (11)$$

которая предназначена для вычисления электро- и теплопроводности дисперсной среды. В работах [5, 12] было показано, что формула (11) дает приемлемую точность в диапазоне объемных концентраций $0 < f_2 < 0.5$. Таким образом, формула Зубера (10) является точным аналогом знаменитой формулы Максвелла (11), что замечательным образом подтверждает справедливость полученной нами функциональной зависимости (9) для случая, когда взаимодействием дисперсных частиц можно пренебречь.

Проверим справедливость формулы (9) на примерах теоретических расчетов эффективных коэффициентов α^* и μ_w с учетом гидродинамического взаимодействия дисперсных частиц. Если мы в формулу (9) подставим коэффициент присоединенной массы (вычисленный с учетом взаимодействия частиц) в первом приближении по концентрации $\mu_w = 1 + k_\mu^{(1)} f_2 + O(f_2^2)$, то мы получим эффективный коэффициент теплопроводности $\alpha^* = 1 + k_\alpha^{(1)} f_2 + k_\alpha^{(2)} f_2^2 + O(f_2^3)$ во втором приближении по концентрации. Поскольку на коэффициент $k_\alpha^{(1)} = 3\beta$ взаимодействие дисперсных

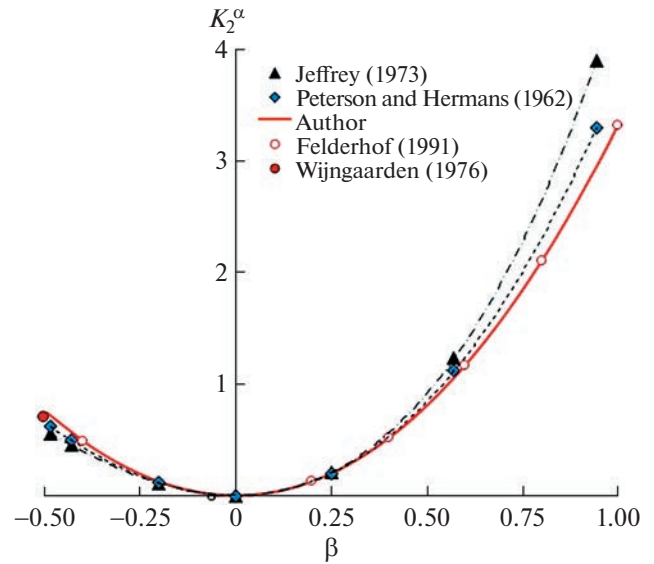


Рис. 4. Сравнение формулы (13) с теоретическими расчетами других авторов с учетом гидродинамического взаимодействия дисперсных частиц.

частиц влияния не оказывает, нетрудно показать, что из формулы (9) следует

$$k_\alpha^{(2)} = \beta^2 k_\mu^{(1)}. \quad (12)$$

Если мы в формулу (12) или (9) подставим аналитическую зависимость $k_\mu^{(1)} = \frac{151}{48} - \frac{4245}{112641} \frac{1-\gamma}{1+2\gamma} + \frac{40}{11264} \left(\frac{1-\gamma}{1+2\gamma} \right)^2$, полученную в работе [11], то, с учетом (3), получим аналитическую зависимость $k_\alpha^{(2)} = f(\beta)$ для вычисления эффективного коэффициента теплопроводности во втором приближении по концентрации:

$$k_\alpha^{(2)} = \beta^2 (3.1458 + 0.1884\beta + 8.88 \times 10^{-4} \beta^2). \quad (13)$$

На рис. 4 дано сравнение формулы (13) с расчетами коэффициентов $k_\alpha^{(2)}$, полученными в работе [13] независимым методом в результате решения задачи о теплопроводности дисперсной среды с учетом гидродинамического взаимодействия. Приведены также результаты расчета коэффициента $k_\alpha^{(2)}$ с использованием формулы (12) и теоретические данные работ [3, 9].

Из рис. 4 видно, что аналитическая формула (13), которая является следствием формулы (9), вполне согласуется с теоретическими расчетами других авторов с учетом гидродинамического взаимодействия дисперсных частиц. Таким образом, полученная в настоящей работе функциональная связь эффективных коэффициентов α^* и μ_w (9) подтверждается и в условиях, когда необходимо

учитывать дистанционное гидродинамическое взаимодействие дисперсных частиц.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (госзадание № 121112200122-7).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дульнев Г.Н., Новиков В.В. Процессы переноса в неоднородных средах. Л.: Энергоатомиздат. Ленингр. отд., 1991. 248 с.
2. Sangani A.S., Zhang D.Z., Prosperetti A. The added mass, Basset, and viscous drag coefficients in nondilute bubbly liquids undergoing small amplitude oscillatory motion // *Phys. Fluids A*. 1991. V. 3. № 12. P. 2955–2970.
<https://doi.org/10.1063/1.857838>
3. Felderhof B.U. Virtual mass and drag in two-phase flow // *J. Fluid Mech.* 1991. V. 225. P. 177–196.
<https://doi.org/10.1017/S002211209100201X>
4. Fackrell S. Study of the added mass of cylinders and spheres. Ph.D. thesis. University of Windsor, 2011.
5. Бошеняттов Б.В. К теории электро- и теплопроводности пузырьковых газожидкостных сред // *ДАН*. 2014. Т. 459. № 6. С. 693–695.
<https://doi.org/10.7868/S0869565214360080>
6. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. Теоретическая физика. Т. VI. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. 736 с.
7. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. Теоретическая физика. Т. 8. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1982. 620 с.
8. Бошеняттов Б.В. Гидродинамическое взаимодействие и присоединенная масса дисперсных частиц // *Изв. вузов. Физика*. 2014. Т. 57. № 8/2. С. 50–60.
<http://vital.lib.tsu.ru/vital/access/manager/Repository/vtls:000515869>
9. Van Wijngaarden L. Hydrodynamic interaction between gas bubbles in liquid // *J. Fluid Mechanics*. 1976. V. 77 (1). P. 27–44.
<https://doi.org/10.1017/S0022112076001110>
10. Brennen C.E. *Fundamentals of Multiphase Flows*. Cambridge: Cambridge University Press, 2005. 414 p.
11. Гуськов О.Б., Бошеняттов Б.В. Гидродинамическое взаимодействие сферических частиц в потоке невязкой жидкости // *ДАН*. 2011. Т. 438. № 5. С. 626–628.
12. Бошеняттов Б.В. К расчету эффективных коэффициентов переноса в монодисперсных суспензиях сферических частиц // *Письма в ЖТФ*. 2015. Т. 41. Вып. 3. С. 67–73.
13. Jeffrey D.J. Conduction through a random suspension of spheres // *Proc. Roy. Soc. London*. 1973. V. A335. P. 355–367.
<https://doi.org/10.1098/rspa.1973.0130>

ANALYTICAL RELATIONSHIP BETWEEN THE COEFFICIENTS OF THE ADDED MASS AND THERMAL CONDUCTIVITY IN A SUSPENSION OF SPHERICAL PARTICLES

B. V. Boshenyatov^a

^a*Institute of Applied Mechanics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

Presented by Academician of the RAS R.I. Nigmatulin

An analytical dependence between the dimensionless coefficients of the added mass and thermal conductivity was obtained in a suspension of spherical particles. The dependence is confirmed by comparison with the theoretical data of other authors, including at elevated concentrations of dispersed particles, taking into account their hydrodynamic interaction.

Keywords: suspension, ideal incompressible fluid, added mass coefficient, thermal conductivity coefficient