

УДК 539.3

## ТРЕХМЕРНАЯ ОБОЛОЧЕЧНАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ ПОСЛОЙНОГО ИССЛЕДОВАНИЯ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ТРЕХСЛОЙНЫХ НЕРЕГУЛЯРНЫХ КОНИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

© 2023 г. В. Н. Бакулин<sup>1,\*</sup>

Представлено академиком РАН А.М. Липановым 11.01.2023 г.

Поступило 11.01.2023 г.

После доработки 02.05.2023 г.

Принято к публикации 24.05.2023 г.

Рассмотрена методология построения трехмерных оболочечных моделей для послойного исследования напряженно-деформированного состояния трехслойных нерегулярных конических оболочек, все более широко применяемых на практике. Разработка таких моделей позволяет расширить класс решаемых задач и с необходимой точностью и степенью детализации исследовать напряженно-деформированное состояние в общем случае нерегулярных трехслойных конических оболочек. Возможности предложенной методологии проиллюстрированы на примере исследования напряженно-деформированного состояния трехслойных конических оболочек с прямоугольными в плане вырезами.

*Ключевые слова:* трехмерные оболочечные модели, послойный анализ, напряженно-деформированное состояние, трехслойные нерегулярные оболочки, прямоугольные в плане вырезы

**DOI:** 10.31857/S2686740023050012, **EDN:** OWORIW

Интерес к трехслойным оболочкам [1, 2] в современной ракетной, авиакосмической, судостроительной, строительной и других отраслях промышленности объясняется стремлением к уменьшению массы при обеспечении высоких прочностных, жесткостных и многих других важных характеристик (стойкость, тепло-, звуко-, виброизоляционные свойства, а также возможность регулирования свойств изменением характеристик слоев).

Для ракетных двигателей, для камер и сопел твердотопливных двигателей [3, 4] важным при обтекании является высокое качество внутренней поверхности, обеспечить которое позволяет применение трехслойных оболочек. Поэтому часто эффективной для многих современных изделий является трехслойная структура оболочечных конструкций [2].

Трехслойные оболочки применяются в конструкциях головных обтекателей космической техники, элементов корпусов ракет, транспортно-пусковых контейнеров, сопловых блоков двигателей на твердом топливе и многих других изделий. Ярким примером широкого применения

трехслойных оболочек могут служить корпуса транспортно-пусковых контейнеров мобильных ракетных комплексов (рис. 1) [5, 6].

На практике наибольшее распространение получили и получают трехслойные оболочки с тонкими и жесткими несущими слоями и сравнительно толстым, но менее жестким слоем заполнителя [7]. Для расчета напряженно-деформированного состояния (НДС) таких конструкций необходимо разрабатывать модели, учитывающие моментное



**Рис. 1.** Пример применения трехслойных конических оболочек.

<sup>1</sup>Институт прикладной механики  
Российской академии наук, Москва, Россия  
\*E-mail: vbak@yandex.ru

состояние в несущих слоях и трехмерное НДС в слое заполнителя.

Построение адекватных моделей, позволяющих учесть важные особенности, которые в настоящее время учитываются недостаточно точно, а некоторые из особенностей вообще не учитываются, является актуальной научной проблемой, имеющей важное прикладное значение.

Осуществить построение таких моделей и получить на их основе решение поставленных задач позволяет подход послойного анализа [7, 8].

При послойном моделировании получение аналитических решений для большого числа актуальных научных и важных практических задач по расчету напряженно-деформированного состояния трехслойных и слоисто-неоднородных оболочек, особенно ослабленных прямоугольными в плане вырезами, сталкивается с непреодолимыми математическими сложностями.

Следует отметить, что вопросы расчета трехслойных сферических оболочек с малыми круговыми, эллиптическими и криволинейными отверстиями рассматривались в работах Г.А. Ванина и его соавторов, например, в [9].

Аналитико-численный метод конечных тел решения краевой задачи для цилиндрической ортотропной оболочки с немалым прямоугольным отверстием рассмотрен в работе [10].

Концентрация напряжений около отверстий в трансверсально-изотропных оболочках рассматривалась в монографии [11].

Недостаточная изученность проблемы исследования напряженно-деформированного состояния трехслойных конических оболочек с прямоугольными в плане вырезами связана с большими сложностями получения решения. Это приводит к необходимости применения численных методов.

Наиболее подходящим для решения указанных задач является метод конечных элементов (МКЭ), позволяющий создавать модели, с помощью которых можно проводить послойное исследование в общем случае нерегулярных трехслойных оболочек с прямоугольными в плане вырезами.

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В представленной работе подход послойного анализа реализуется с помощью построенных конечно-элементных моделей (КЭМ) естественной кривизны, точно представляющих геометрическую форму исследуемых трехслойных конических оболочек. Подход состоит в построении по толщине оболочки блоков из оболочечных конечных элементов (КЭ) моментных несущих слоев (двумерные КЭ) и КЭ слоя заполнителя (трехмерные КЭ) (в отличие от работы [12], в которой

рассматриваются блочные элементы и аналитические решения граничных задач для систем дифференциальных уравнений).

Использование различных аппроксимирующих функций в двумерных и трехмерных оболочечных конечных элементах при моделировании соответственно напряженно-деформированного состояния в моментных несущих слоях и слое заполнителя приведет к разрыву обобщенных перемещений на поверхностях стыковки этих КЭ.

В работе применен подход, позволяющий избежать такого разрыва аппроксимирующих функций перемещений на поверхностях стыковки оболочечных КЭ несущих слоев и КЭ слоя заполнителя [7]. Разработанный подход построения аппроксимирующих функций перемещений для оболочечных трехмерных конечно-элементных моделей проиллюстрирован на примере в общем случае нерегулярных трехслойных конических оболочек. Следует отметить, что рассмотренные модели применимы для послойного исследования напряженно-деформированного состояния в общем случае нерегулярных трехслойных оболочек вращения и конической, и цилиндрической формы, т.е. трехслойных оболочек вращения нулевой гауссовой кривизны, охватывающих широкий круг конструкций.

### АППРОКСИМИРУЮЩИЕ ФУНКЦИИ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ДЛЯ ДВУМЕРНОЙ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЙ МОДЕЛИ НЕСУЩИХ СЛОЕВ ТРЕХСЛОЙНЫХ НЕРЕГУЛЯРНЫХ КОНИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

Если несущие слои рассматриваемой трехслойной оболочки являются достаточно тонкими и жесткими, то для моделирования НДС в них применяются КЭ моментных оболочек Кирхгофа–Лява [13].

При построении моделей послойного исследования напряженно-деформированного состояния трехслойных нерегулярных конических оболочек рассмотрим прямоугольные в плане КЭ естественной кривизны для несущих слоев и слоя заполнителя. Конечные элементы для моделирования НДС в несущих слоях имеют четыре узла с тремя линейными перемещениями и двумя углами поворота нормали к срединной поверхности соответствующего несущего слоя. Таким образом, КЭ несущих слоев имеет двадцать степеней свободы.

Для улучшения сходимости рассматриваемых моделей применены аппроксимирующие функции, включающие перемещения как жесткого целого [7], полученные интегрированием геометрических соотношений, связывающих деформации

с перемещениями [13], при нулевых значениях деформаций.

Аппроксимирующие функции перемещений как твердого тела запишем через шесть неопределенных коэффициентов  $\alpha_1, \dots, \alpha_6$ , являющихся константами интегрирования, оставшиеся четырнадцать неопределенных коэффициентов  $\alpha_7, \dots, \alpha_{20}$  (число неопределенных коэффициентов  $\alpha_1, \dots, \alpha_{20}$  равно числу степеней свободы КЭ) отвечают за перемещения, вызванные деформированием несущего слоя.

Вид аппроксимирующих функций перемещений несущих слоев трехслойной нерегулярной конической оболочки вращения представлен в табл. 1.

Здесь  $u, v, w$  – перемещения точек на срединной поверхности каждого несущего слоя трехслойной конической оболочки;  $x, \beta$  – координаты на срединной поверхности каждого несущего слоя:  $x$  – линейная координата, направленная вдоль меридиана,  $\beta$ ,  $r$  –угловая координата и радиус окружности в плоскости, перпендикулярной оси оболочки;  $c = \cos\gamma$ ,  $s = \sin\gamma$ ,  $s_1 = \sin\beta$ ,  $c_1 = \cos\beta$ ,  $r = R_2 \cos\gamma$ ,  $\gamma$  – угол конусности,  $R_2$  – радиус кривизны срединной поверхности несущего слоя трехслойной конической оболочки [14]. Местные системы координат у конечных элементов несущих слоев и слоя заполнителя расположим на срединной поверхности этих КЭ.

Подставив функции, аппроксимирующие перемещения конечного элемента несущих слоев трехслойной конической незамкнутой оболочки вращения (табл. 1), в выражения для углов поворота нормали ( $\vartheta_\beta, \vartheta_x$ ) к срединной поверхности относительно осей  $x, \beta$ , после проведения необходимых математических операций получим запись  $\vartheta_x$  и  $\vartheta_\beta$  через вектор неопределенных коэффициентов:

$$\begin{aligned} \vartheta_x = & \alpha_3 s s_1 (x s + r) / r - \alpha_4 s c_1 (x s + r) / r - \alpha_6 c (x s + r) / r - \\ & - \alpha_{10} \beta c / r - \alpha_{11} x \beta c / r + \alpha_{12} x / r + 2 \alpha_{14} \beta / r + \alpha_{15} x^2 / r + \\ & + 2 \alpha_{16} x \beta / r + 3 \alpha_{18} \beta^2 / r + \alpha_{19} x^3 / r + 3 \alpha_{20} x \beta^2 / r, \quad (1) \\ \vartheta_\beta = & \alpha_3 c_1 + \alpha_4 s_1 - \beta \alpha_{12} - 2 x \alpha_{13} - 2 x \beta \alpha_{15} - \\ & - \beta^2 \alpha_{16} - 3 x^2 \alpha_{17} - 3 x^2 \beta \alpha_{19} - \beta^3 \alpha_{20}. \end{aligned}$$

Сходимость, достоверность и точность модели конечного элемента несущих слоев трехслойной незамкнутой оболочки вращения, построенной на основе рассмотренных аппроксимирующих функций перемещений, подтверждена сопоставлением с аналитическими и численными решениями на известных и широко распространенных для оболочечных конечных элементов тестах [7], а также сравнением с экспериментальными данными для конической оболочки.

**Таблица 1.** Матрица аппроксимирующих функций перемещений конечного элемента несущих слоев трехслойной конической незамкнутой оболочки вращения (в пустых клеточках таблицы коэффициенты равны нулю)

	$u$	$v$	$w$
$\alpha_1$	$s c_1$	$-s_1$	$c c_1$
$\alpha_2$	$s s_1$	$c_1$	$c s_1$
$\alpha_3$	$r c c_1$	$x c s_1$	$-(rs + x)c_1$
$\alpha_4$	$r s s_1$	$-x c c_1$	$-(rs + x)s_1$
$\alpha_5$	$c$		$-s$
$\alpha_6$		$r + xs$	
$\alpha_7$	$x$		
$\alpha_8$	$\beta$		
$\alpha_9$	$x \beta$		
$\alpha_{10}$		$\beta$	
$\alpha_{11}$		$x \beta$	
$\alpha_{12}$			$x \beta$
$\alpha_{13}$			$x^2$
$\alpha_{14}$			$\beta^2$
$\alpha_{15}$			$x^2 \beta$
$\alpha_{16}$			$x \beta^2$
$\alpha_{17}$			$x^3$
$\alpha_{18}$			$\beta^3$
$\alpha_{19}$			$x^3 \beta$
$\alpha_{20}$			$x \beta^3$

#### АППРОКСИМИРУЮЩИЕ ФУНКЦИИ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ДЛЯ ТРЕХМЕРНОЙ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЙ МОДЕЛИ СЛОЯ ЗАПОЛНИТЕЛЯ ТРЕХСЛОЙНЫХ НЕРЕГУЛЯРНЫХ КОНИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

Для того чтобы избежать разрыва перемещений на конических поверхностях стыковки двумерных и трехмерных оболочечных конечных элементов при моделировании соответственно НДС в моментных несущих слоях и слое заполнителя, на внутренней и внешней конических поверхностях КЭ заполнителя (КЭЗ) применим рассмотренные выше аппроксимирующие функции перемещений КЭ несущих слоев. Для этого в каждом из восьми узлов, находящихся в угловых точках на внутренней и внешней конических поверхностях конечных элементов слоя заполнителя, назначаются те же пять узловых обобщенных перемещений, что и у КЭ несущих слоев.

В соответствии с предложенным подходом построения трехмерных оболочечных КЭ-слоя за-

полнителя (индекс  $f$ ) вектор перемещений в этих конечных элементах  $\delta_j^f = \{u_j, v_j, w_j\}^T$  запишем через векторы перемещений на внутренней  $\delta_j^1$  и внешней  $\delta_j^2$  конических поверхностях конечного элемента слоя заполнителя:

$$\delta_j^f = \delta_j^1 \varphi_j^1 + \delta_j^2 \varphi_j^2, \quad (2)$$

где  $\varphi_j^1 = \frac{1}{2} \left( 1 - 2 \frac{z_j}{h_j} \right)$ ,  $\varphi_j^2 = 1 - \varphi_j^1$ ,  $j$  – номер конечного элемента по толщине слоя заполнителя, считая от его внутренней поверхности,  $z_j$  – нормальная координата к срединной поверхности  $j$ -го КЭ по толщине слоя заполнителя,  $h_j$  – толщина  $j$ -го трехмерного КЭ-слоя заполнителя.

В этих выражениях и далее верхние индексы 1, 2 соответствуют внутренней и внешней коническим поверхностям  $j$ -го КЭ-слоя заполнителя.

Аппроксимирующие функции перемещений конечных элементов несущих слоев приведем к соответствующей конической поверхности стыковки с КЭ-слоя заполнителя с помощью матриц перехода аналогично тому, как это приведено в работе [15] для слоистых конечных элементов оболочки вращения двойной кривизны, построенных на основе модели Тимошенко для пакета слоев.

Если слой заполнителя трехслойной оболочки моделируется по толщине одним трехмерным конечным элементом, то его конические поверхности будут являться поверхностями раздела с несущими слоями.

Запишем векторы перемещений КЭ несущих слоев на поверхностях сопряжения с КЭ-слоя заполнителя, где нижний индекс 1 относится к внутреннему, а 3 к внешнему несущему слоям

$$\bar{\delta}_1^c = \{\bar{u}_1^c, \bar{v}_1^c, \bar{w}_1^c\}^T, \quad \bar{\delta}_3^c = \{\bar{u}_3^c, \bar{v}_3^c, \bar{w}_3^c\}^T, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \bar{u}_1^c &= u_1^c + \vartheta_{\beta 1}^c h_1^c / 2, & \bar{v}_1^c &= v_1^c - \vartheta_{x 1}^c h_1^c / 2, & \bar{w}_1^c &= w_1^c, \\ \bar{u}_3^c &= u_3^c - \vartheta_{\beta 3}^c h_3^c / 2, & \bar{v}_3^c &= v_3^c + \vartheta_{x 3}^c h_3^c / 2, & \bar{w}_3^c &= w_3^c, \end{aligned}$$

где  $h_1^c, h_3^c$  – толщина, соответственно, внутренне-го и внешнего несущих слоев трехслойной конической незамкнутой оболочки вращения.

Тогда условия стыковки в векторной форме примут следующий вид для случая одного КЭЗ по толщине слоя заполнителя трехслойной конической незамкнутой оболочки вращения:

$$\delta_1^1 = \bar{\delta}_1^c; \quad \delta_1^2 = \bar{\delta}_3^c. \quad (4)$$

С учетом (1)–(4) и зная аппроксимирующие функции перемещений КЭ несущих слоев трехслойной конической незамкнутой оболочки вращения (табл. 1), после проведения необходимых

математических операций получим аппроксимирующие функции перемещений трехмерного КЭЗ для случая одного конечного элемента по толщине слоя заполнителя (т.е. когда  $j = 1$ ), записанные с помощью сорока неопределенных коэффициентов  $\alpha_1, \dots, \alpha_{40}$ :

$$\begin{aligned} u_j &= ((\alpha_1 c_1 + \alpha_2 s_1) s + (\alpha_3 c_1 + \alpha_4 s_1) r_1 c + \\ &+ \alpha_5 c + \alpha_7 x + \alpha_8 \beta + \alpha_9 x \beta + \\ &+ (\alpha_3 c_1 + \alpha_4 s_1 - \beta \alpha_{12} - 2x \alpha_{13} - 2x \beta \alpha_{15} - \\ &- \beta^2 \alpha_{16} - 3x^2 \alpha_{17} - 3x^2 \beta \alpha_{19} - \beta^3 \alpha_{20}) h_1^c / 2) \varphi_1 + \\ &+ ((\alpha_{21} c_1 + \alpha_{22} s_1) s + (\alpha_{23} c_1 + \alpha_{24} s_1) r_3 c + \\ &+ \alpha_{25} c + \alpha_{27} x + \alpha_{28} \beta + \alpha_{29} x \beta - \\ &- (\alpha_{23} c_1 + \alpha_{24} s_1 - \beta \alpha_{32} - 2x \alpha_{33} - 2x \beta \alpha_{35} - \\ &- \beta^2 \alpha_{36} - 3x^2 \alpha_{37} - 3x^2 \beta \alpha_{39} - \beta^3 \alpha_{40}) h_3^c / 2) \varphi_2, \\ v_j &= (-\alpha_1 s_1 + \alpha_2 c_1 + (\alpha_3 s_1 - \alpha_4 c_1) x c + \\ &+ \alpha_6 (r_1 + x s) + \alpha_{10} \beta + \alpha_{11} x \beta - \\ &- (\alpha_3 s s_1 (x s + r_1) / r_1 - \alpha_4 s c_1 (x s + r_1) / r_1 - \\ &- \alpha_6 c (x s + r_1) / r_1 - \alpha_{10} \beta c / r_1 - \\ &- \alpha_{11} x \beta c / r_1 + \alpha_{12} x / r_1 + 2 \alpha_{14} \beta / r_1 + \\ &+ \alpha_{15} x^2 / r_1 + 2 \alpha_{16} x \beta / r_1 + \\ &+ 3 \alpha_{18} \beta^2 / r_1 + \alpha_{19} x^3 / r_1 + 3 \alpha_{20} x \beta^2 / r_1) h_1^c / 2) \varphi_1 + \\ &+ (-\alpha_{21} s_1 + \alpha_{22} c_1 + (\alpha_{23} s_1 - \alpha_{24} c_1) x c + \\ &+ \alpha_{26} (r_3 + x s) + \alpha_{30} \beta + \alpha_{31} x \beta + \\ &+ (\alpha_{23} s s_1 (x s + r_3) / r_3 - \alpha_{24} s c_1 (x s + r_3) / r_3 - \\ &- \alpha_{26} c (x s + r_3) / r_3 - \alpha_{30} \beta c / r_3 - \\ &- \alpha_{31} x \beta c / r_3 + \alpha_{32} x / r_3 + 2 \alpha_{34} \beta / r_3 + \\ &+ \alpha_{35} x^2 / r_3 + 2 \alpha_{36} x \beta / r_3 + 3 \alpha_{38} \beta^2 / r_3 + \\ &+ \alpha_{39} x^3 / r_3 + 3 \alpha_{40} x \beta^2 / r_3) h_3^c / 2) \varphi_2, \\ w_j &= ((\alpha_1 c_1 + \alpha_2 s_1) c - (\alpha_3 c_1 + \alpha_4 s_1) (x + r_1) s - \\ &- \alpha_5 s + \alpha_{12} x \beta + \alpha_{13} x^2 + \\ &+ \alpha_{14} \beta^2 + \alpha_{15} x^2 \beta + \alpha_{16} x \beta^2 + \alpha_{17} x^3 + \\ &+ \alpha_{18} \beta^3 + \alpha_{19} x^3 \beta + \alpha_{20} x \beta^3) \varphi_1 + \\ &+ ((\alpha_{21} c_1 + \alpha_{22} s_1) c - (\alpha_{23} c_1 + \alpha_{24} s_1) (x + r_3) s - \\ &- \alpha_{25} s + \alpha_{32} x \beta + \alpha_{33} x^2 + \\ &+ \alpha_{34} \beta^2 + \alpha_{35} x^2 \beta + \alpha_{36} x \beta^2 + \alpha_{37} x^3 + \\ &+ \alpha_{38} \beta^3 + \alpha_{39} x^3 \beta + \alpha_{40} x \beta^3) \varphi_2. \end{aligned} \quad (5)$$

При этом приняты следующие обозначения:  $\varphi_1 = \varphi_j^1$ ,  $\varphi_2 = \varphi_j^2$ ;  $r_1, r_3$  – радиусы окружностей в плоскостях, перпендикулярных оси вращения

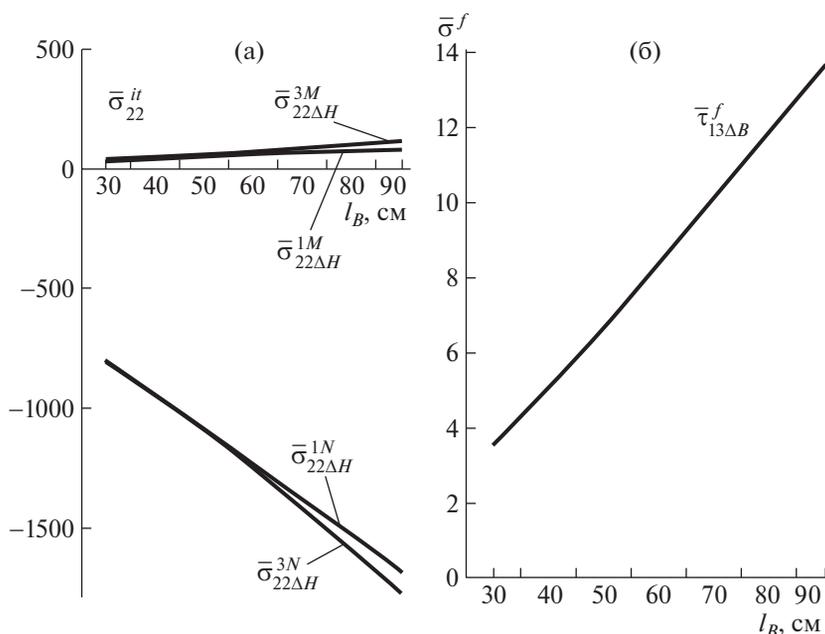


Рис. 2. Влияние длины прямоугольного выреза на наибольшие напряжения в несущих слоях и заполнителе трехслойной конической оболочки.

оболочки, и относящиеся к срединным поверхностям внутреннего и внешнего несущих слоев.

Подставляя полученные аппроксимирующие функции перемещений трехмерных КЭ-слоя заполнителя трехслойных нерегулярных конических оболочек в геометрические соотношения для трехмерного тела, связывающие деформации с перемещениями [1], и проведя дифференцирование и необходимые математические операции, получим выражения для вектора обобщенных деформаций КЭ-слоя заполнителя, записанные с помощью вектора неопределенных коэффициентов.

Используя для КЭ-слоя заполнителя физические соотношения (закон Гука), с учетом полученных выражений для вектора обобщенных деформаций КЭ-слоя заполнителя получим зависимости для вектора напряжений в КЭ-слоя заполнителя, записанные с помощью вектора неопределенных коэффициентов, а затем с помощью вектора узловых перемещений.

Получив выражения для вектора напряжений и вектора обобщенных деформаций для трехмерных конечных элементов слоя заполнителя, из условия минимума полной потенциальной энергии (вариационный принцип Лагранжа) [13] находятся выражения для записи матрицы жесткости КЭ-слоя заполнителя трехслойной конической незамкнутой оболочки вращения.

Определив выражения для матриц жесткости КЭ несущих слоев и слоя заполнителя, дальней-

шее решение задачи проводится с помощью алгоритмов метода перемещений МКЭ.

## ЧИСЛЕННЫЙ ПРИМЕР

Рассмотренные модели применены для исследования напряженно-деформированного состояния трехслойных конических оболочек с прямоугольными в плане вырезами.

Решена задача о влиянии размеров вырезов, равноудаленных от шарнирно опертых краев (на верхнем крае малого основания возможно перемещение по оси  $x$ ), на напряженно-деформированное состояние трехслойного конического отсека с несущими слоями из углепластика при нагружении равномерно распределенным внешним давлением  $p$ .

Характеристики трехслойного отсека. Для несущих слоев:  $E_1 = 7 \times 10^5$  кг/см<sup>2</sup>,  $E_2 = 6.3 \times 10^5$  кг/см<sup>2</sup>;  $G_{12} = 0.5 \times 10^5$  кг/см<sup>2</sup>;  $\mu_2 = 0.25$ ;  $R_1 = 139.2$  см,  $R_2 = 217.2$  см;  $h_1 = h_3 = 0.3$  см;  $L = 214.4$  см. Для слоя заполнителя:  $E_3 = 1500$  кг/см<sup>2</sup>;  $G_{13} = 2000$  кг/см<sup>2</sup>;  $G_{23} = 3000$  кг/см<sup>2</sup>. Здесь  $R_1$ ,  $R_2$  – внутренние радиусы малого и большого оснований трехслойного конического отсека;  $L$  – длина отсека;  $h_1$ ,  $h_3$  – толщина внутреннего и внешнего несущих слоев трехслойного отсека. Угол раствора выреза равен  $10^\circ$ , длина выреза  $l_B$  по оси  $x$  изменялась в диапазоне 30–90 см.

Некоторые результаты расчетов приведены на рис. 2. Влияние размеров прямоугольного в плане выреза на напряжения в несущих слоях трехслойного конического отсека показано на рис. 2а, на наибольшие напряжения в наполнителе (напряжения поперечного сдвига  $\tau_{13}$ ) на рис. 2б.

При этом  $\bar{\sigma}_{11}^i = \sigma_{11}^i / \sigma_{22}^{1N}$ ,  $\bar{\sigma}^f = \tau_{13}^f / p$ , где  $\sigma_{22}^{1N}$  – напряжения во внутреннем несущем слое в оболочке без выреза,  $i = 1, 3$  – внутренний и внешний несущие слои трехслойного отсека;  $t = N$ ,  $t = M$  – соответственно мембранные и моментные напряжения в несущих слоях;  $\Delta$  и тире – место в районе угла и середины прямолинейного края выреза. Индексы  $H$ ,  $B$  у напряжений соответствуют нижней и верхней угловым точкам отверстия, т.е. угловые точки с индексом  $B$  находятся на верхнем краю с меньшим радиусом, а угловые точки с индексом  $H$  – на нижнем краю с большим радиусом.

Таким образом, получены результаты исследования напряженно-деформированного состояния слоев трехслойной конической оболочки с прямоугольными в плане вырезами.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрена методология построения трехмерных оболочечных моделей для послойного исследования напряженно-деформированного состояния трехслойных нерегулярных конических оболочек, находящихся все более широкое применение в современной технике. Приведен подход получения аппроксимирующих функций перемещений в конечных элементах слоя наполнителя, позволяющий избежать разрыва обобщенных перемещений на поверхностях стыковки с моментными несущими слоями трехслойных нерегулярных конических оболочек. Рассмотренные модели расширяют класс решаемых задач по расчету напряженно-деформированного состояния в общем случае нерегулярных трехслойных конических оболочек. Проведены исследования напряженно-деформированного состояния в слоях трехслойной конической оболочки с прямоугольными в плане вырезами.

## ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена в рамках государственного задания Института прикладной механики РАН (номер государственной регистрации 121112200126-5).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Васильев В.В.* Механика конструкций из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1988. 272 с.
2. *Бакулин В.Н.* Трехслойные оболочки – эффективные элементы конструкций современных летательных аппаратов. Модели прочностного анализа // Материалы XIX Международной конференции по Прикладной математике и механике в аэрокосмической отрасли (АММАГ'2022). 5–12 сентября 2022 г. М.: Изд-во МАИ, 2022. С. 270–272.
3. *Bakulin V.N., Nedbay A.Ya.* The Dynamic Stability of Three-Layered Cylindrical Shell, Reinforced Ring Ribs and Hollow Cylinder Under External Pressure Pulsing // Doklady Physics. 2021. V. 66. № 6. P. 175–181.
4. *Бакулин В.Н., Недбай А.Я.* Параметрический резонанс трехслойной цилиндрической композитной оболочки, подкрепленной продольными ребрами и цилиндром, при действии изменяющейся во времени осевой силы // Доклады РАН. Физика, технические науки. 2022. Т. 505. С. 59–65.
5. Генеральный конструктор Юрий Семенович Соломонов. Портрет на фоне эпохи. Изд-во РМП, 2015.
6. *Авдеев В.С.* Центральный научно-исследовательский институт специального машиностроения. Путь длиной в полвека. Хотьково, 2015. 300 с.
7. *Бакулин В.Н.* Эффективная модель послойного анализа трехслойных нерегулярных оболочек вращения цилиндрической формы // ДАН. 2018. Т. 478. № 2. С. 145–150.
8. *Образцов И.Ф., Бакулин В.Н.* Уточненные модели для исследования напряженно-деформационного состояния трехслойных цилиндрических оболочек // ДАН. 2006. Т. 407. № 1. С. 36–39.
9. *Ванин Г.А., Савиченко А.А.* Исследование взаимодействия двух отверстий на напряженное состояние в трехслойной сферической оболочке // Прикл. Механика. 1975. Т. 11. № 12. С. 15–21.
10. *Revenko V.P., Bakulin V.N.* Method of Finite Bodies for Mathematical Modeling of the Stress-strain State of Cylindrical Orthotropic Shell with the Reinforced Rectangular Hole // J. Physics: Conference Series. Proc. IV International conference “Supercomputer Technologies of Mathematical Modeling (SCTeMM'19)”. 2019. V. 1392. 012021.
11. *Пелех Б.Л., Сяский А.А.* Распределение напряжений возле отверстий в податливых на сдвиг анизотропных оболочках. К.: Наук. думка, 1975. 198 с.
12. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М.* Блочные элементы и аналитические решения граничных задач для систем дифференциальных уравнений // ДАН. 2014. Т. 454. № 2. С. 163–167.
13. *Балабух Л.И., Колесников К.С., Зарубин В.С. и др.* Основы строительной механики ракет. М.: Высш. шк., 1969. 494 с.
14. *Бакулин В.Н., Репинский В.В.* Построение эффективной конечно-элементной модели моментной оболочки вращения нулевой гауссовой кривизны / Материалы VIII Международной конференции по неравновесным процессам в соплах и струях (NPNJ 2010). 25–31 мая 2010 г. Алушта. М.: Изд-во МАИ-ПРИНТ, 2010. С. 436–438.
15. *Кривцов В.С., Рассоха А.А.* Алгоритм получения матрицы жесткости конечного элемента анизотропной оболочки // Изв. вузов. Авиац. техника. 1983. № 4. С. 14–18.

# THREE-DIMENSIONAL SHELL MODEL FOR LAYER-BY-LAYER STUDY OF THE STRESS AND STRAIN STATE OF IRREGULAR CONICAL SANDWICH SHELLS

V. N. Bakulin<sup>a</sup>

<sup>a</sup>*Institute of Applied Mechanics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

Presented by Academician of the RAS A.M. Lipanov

A methodology for constructing three-dimensional shell models for the layer-by-layer study of the stress and strain state of irregular sandwich shells, which are increasingly used in practice, is proposed. An original approach is considered for obtaining approximating displacement functions in the finite elements of the core layer, which does not lead to a discontinuity in the generalized displacements on the interfaces with moment skin layers. The development of such models makes it possible to significantly expand the class of problems to be solved and, with the necessary accuracy and degree of detail, for the first time to study the stress and strain state in the general case of irregular sandwich shells in a wide range of variation in the geometric and physical and mechanical characteristics of the layers. The possibilities of the proposed methodology are illustrated by the example of the study of the stress and strain state of conical sandwich shells with rectangular cutouts.

*Keywords:* three-dimensional shell models, layer-by-layer analysis, stress and strain state, irregular sandwich shells, rectangular cutouts