

УДК 535.36

## ВЕРОЯТНОСТНАЯ МОДЕЛЬ РАССЕЯНИЯ УЛЬТРАКОРОТКИХ ИМПУЛЬСОВ НА СВОБОДНОМ ЭЛЕКТРОНЕ

© 2023 г. Академик РАН А. С. Бугаёв<sup>1</sup>, Е. С. Храмов<sup>1,\*</sup>, В. А. Астапенко<sup>1</sup>

Поступило 30.10.2022 г.

После доработки 30.10.2022 г.

Принято к публикации 09.12.2022 г.

Обобщено традиционное описание рассеяния фотонов на свободных электронах на основе формулы Клейна–Нишины, чтобы расширить его на случай ультракоротких импульсов. В рамках второго приближения квантово-механической теории возмущений получена формула вероятности рассеяния за все время действия импульса, границы применимости которой включают в себя релятивистский случай. Исследован эффект красного смещения спектра рассеянного излучения с увеличением угла рассеяния в релятивистском случае. Изучены тренды зависимости вероятности рассеяния от длительности ультракоротких импульсов.

**Ключевые слова:** ультракороткие импульсы, формула Клейна–Нишины, рассеяние на свободном электроне, вероятность рассеяния за все время действия электромагнитного импульса

**DOI:** 10.31857/S2686740023030045, **EDN:** OYIPRJ

В последние десятилетия наблюдается существенный прогресс в развитии техники генерации ультракоротких лазерных импульсов. Все большее распространение получают лазеры, генерирующие субфемтосекундные ( $\sim 100$  ас) импульсы в диапазоне экстремального ультрафиолета (XUV-лазеры [1]) на основании метода генерации высших гармоник. В то же время построены установки лазера на свободных электронах, излучающие в рентгеновском диапазоне (XFEL-лазеры) [2] с характерными длительностями порядка 100 ас – 10 фс [3]. Кроме этого, существуют теоретические работы, описывающие методы генерации XFEL импульсов длительностью порядка 10 ас [4].

Помимо длительности есть еще одна отличительная особенность ультракоротких импульсов (УКИ) – высокая мощность. Даже если суммарная энергия импульса не высока, за счет сильной компрессии во временной области его пиковая мощность колоссальна ( $\sim 10$  ГВт [5]). Данное обстоятельство интересно с точки зрения исследования процессов, величина сечения которых мала, но вероятность пропорциональна интенсивности потока лазерного излучения.

Описанные успехи в поле экспериментальной лазерной физики требуют тщательной проработки теоретической составляющей. В частности, существует проблема: физические модели, в рамках которых лазерные импульсы можно считать квазимонохроматическими, теряют свою применимость, поскольку спектральная ширина УКИ соизмерима со спектральной шириной сечений процессов, а их длительность слишком мала, чтобы полагать поток излучения стационарным. Таким образом, требуется адаптация существующих подходов, сформулированных в терминах вероятности в единицу времени, на случай УКИ, а также изучение качественных особенностей процессов, обусловленных экстремальными длительностями импульсов.

Как с теоретической, так и с практической точки зрения большой интерес представляет механизм рассеяния УКИ на свободных электронах. Теория данного процесса была разработана еще на заре квантовой электродинамики. В работе [6] получено сечение рассеяния на свободных электронах, а его зависимость от параметров задачи исследована во многих теоретических и экспериментальных работах. Например, в работе [7] описаны зависимости дифференциального и интегрального сечения рассеяния на свободном электроне от энергии рассеянного фотона и направления рассеяния. В экспериментальной работе [8] исследовалось рассеяние  $\gamma$ -излучения и было показано, что результаты измерений отвечают формуле Клейна–Нишины. В статье [9] описываются измере-

<sup>1</sup> Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Долгопрудный, Московская обл., Россия

\*E-mail: Egor.Khramov@phystech.edu

ния коэффициента поглощения волн длины порядка 1 пм на углеродных и алюминиевых мишенях. Результаты показывают отклонение от формулы Клейна–Нишины на величину не более 1% для данного диапазона длин волн.

Под УКИ далее мы будем понимать импульсы, спектральная ширина которых соизмерима или больше характерной спектральной ширины сечения рассматриваемого процесса. Для подобных полей упомянутая выше теория требует расширения, что и является задачей настоящего сообщения.

В нашей работе мы предлагаем описание рассеяния УКИ на свободных электронах в терминах вероятности за все время действия импульса, выражение для которой было получено в рамках 2-порядка квантово-механической теории возмущений [10, 11]:

$$\frac{d^2 W}{d\omega' d\Omega'} = \frac{c}{4\pi^2} \int_0^\infty \frac{d^2 \sigma}{d\omega d\Omega'} \frac{|E(\omega_i)|^2}{\hbar \omega_i} d\omega_i, \quad (1)$$

здесь  $W$  – вероятность процесса за время действия УКИ,  $\omega = \omega_i - \omega'$  – разность между частотами падающего и рассеянного излучения,  $\theta$  и  $\Omega'$  – угол рассеяния, а также соответствующий ему телесный угол.  $E(\omega_i)$  – фурье-образ напряженности электрического поля в импульсе,  $\sigma$  – сечение рассеяния,  $c$  – скорость света в вакууме,  $\hbar$  – постоянная Планка. Пределы применимости предлагаемого подхода включают в себя релятивистский случай.

Сечение рассеяния неполяризованного фотона на свободном электроне, дифференциальное по частоте  $\omega$  и телесному углу  $\Omega'$ , описывается формулой Клейна–Нишины [6]. Чтобы учесть закон сохранения энергии–импульса в ходе рассеяния, формулу спектрально-углового сечения следует дополнить дельта-функцией Дирака:

$$\frac{d^2 \sigma}{d\omega' d\Omega'} = \frac{r_e^2}{2} \left( \frac{\omega'}{\omega_i} \right)^2 \left( \frac{\omega_i}{\omega'} + \frac{\omega'}{\omega_i} - \sin^2 \theta \right) \times \delta \left( \frac{\omega_i}{1 + \frac{\hbar \omega_i (1 - \cos \theta)}{m_e c^2}} - \omega' \right). \quad (2)$$

Так как ширина сечения рассматриваемого процесса равна нулю, формально импульсы любой длительности удовлетворяют данному выше определению УКИ и разрабатываемая модель будет применима для них.

Вычисляя интеграл (1) с учетом (2), находим

$$\frac{d^2 W^{(fe)}}{d\omega' d\Omega'} = \frac{c r_e^2}{8\pi^2} \left( \frac{\omega'}{\omega_0} \right)^2 \left( \frac{\omega_0}{\omega'} + \frac{\omega'}{\omega_0} - \sin^2 \theta \right) \frac{|E(\omega_0)|^2}{\hbar \omega_0}, \quad (3)$$

здесь  $\omega_0$  описывается формулой

$$\omega_0 = \frac{\omega'}{1 - \left( \frac{\hbar \omega'}{m_e c^2} \right) (1 - \cos \theta)}. \quad (4)$$

Таким образом, мы получили аналитическое выражение для вероятности рассеяния УКИ на свободном электроне за все время действия импульса, обобщающее фундаментальную формулу Клейна–Нишины.

Далее для иллюстрации зависимости вероятности рассеяния от параметров задачи в качестве простой аналитической аппроксимации поля УКИ мы будем использовать гауссов профиль импульса [12]:

$$E(\omega, \omega_c, \tau) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} E_0 \tau \exp \left( -\frac{(\omega - \omega_c)^2 \tau^2}{2} \right), \quad (5)$$

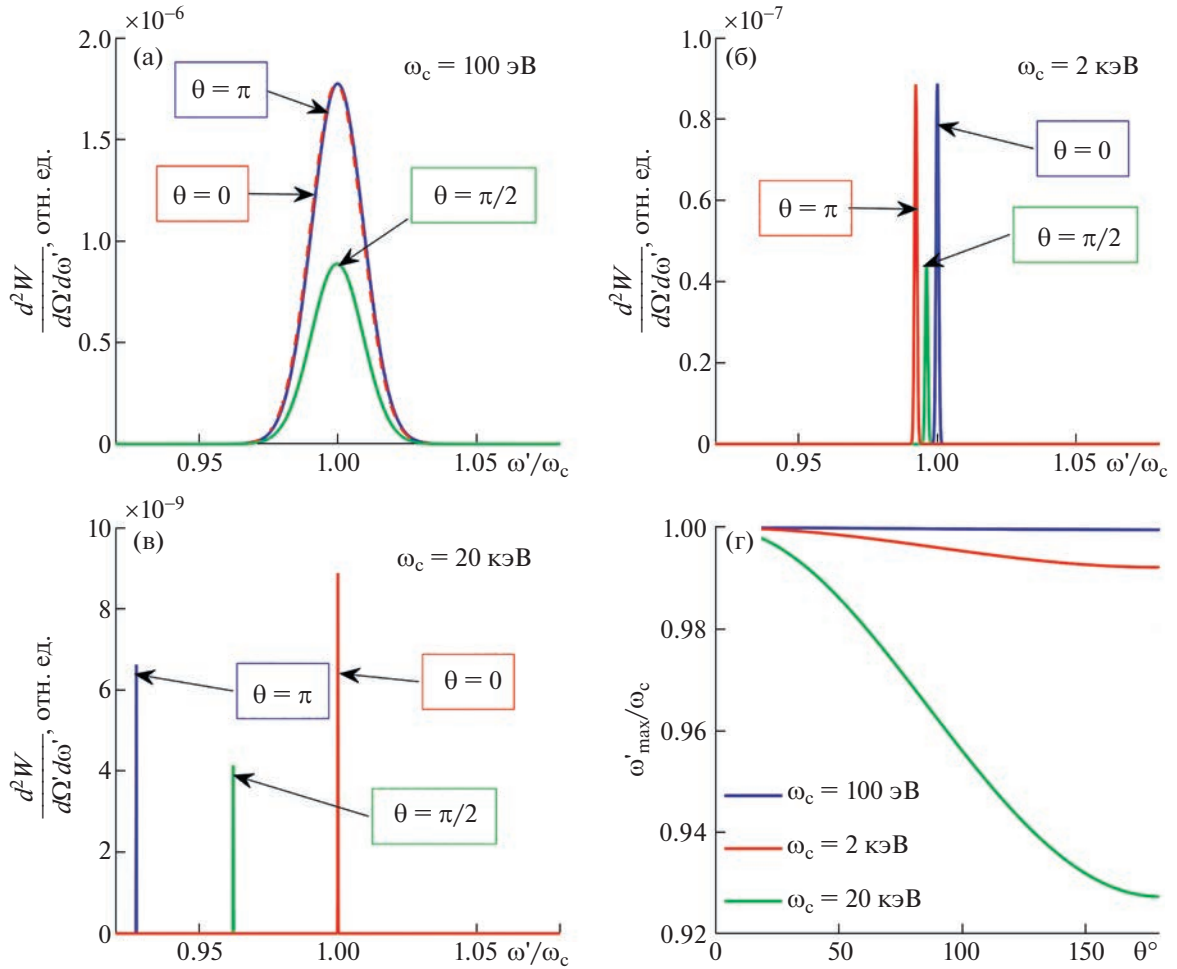
здесь  $\omega_c$  – несущая частота,  $\tau$  – длительность УКИ. Все результаты расчетов представлены для амплитуды поля  $E_0 = 1$  ат.ед.

Пиковое значение вероятности достигается при стремлении угла рассеяния к 0 и  $\pi$ . Минимум приходится на угол  $\pi/2$ . Для несущей частоты порядка 100 эВ спектральные максимумы вероятности не зависят от угла (рис. 1а). Когда значение несущей частоты превышает 1 кэВ, спектральные пики смещаются в красную область (рис. 1б, в). Данное смещение обусловлено увеличением влияния релятивистского члена  $\left( \frac{\hbar \omega'}{m_e c^2} \right) (1 - \cos \theta)$  в

знаменателе аргумента дельта-функции в формуле (2) при увеличении несущей частоты (рис. 1г). То есть спектральная зависимость вероятности от частоты рассеяния по динамике схожа с аналогичной зависимостью для сечения. Однако, помимо частоты спектрального максимума, формула (3) содержит информацию обо всех спектральных компонентах рассеянного излучения. Для падающего импульса, спектральный максимум которого приходится на частоту  $\omega_c$ , спектральный максимум рассеянного излучения в соответствии с (3) и (4) равен

$$\omega'_{\max} = \frac{\omega_c}{1 + \frac{\hbar \omega_c (1 - \cos \theta)}{m_e c^2}}. \quad (6)$$

Ультракороткие импульсы не являются монохроматическими и их спектральная ширина больше, чем у сечения рассеяния на свободном электроне, которое представлено дельта-функцией, а значит, зависимость вероятности рассеяния от длительности импульса (далее  $\tau$ -зависимость) может иметь различные тренды в зависимости от рассматриваемой спектральной компоненты рассеянного импульса. Рассмотрим этот вопрос детальнее на примере гауссова УКИ. Установить и



**Рис. 1.** Зависимость дифференциальной вероятности рассеяния на свободном электроне от частоты рассеянного излучения для разных углов рассеяния при различных несущих частотах (а)–(в),  $\tau = 0.5$  фс. Зависимость частоты максимума рассеянного излучения от угла рассеяния при различных несущих частотах (г).

детально исследовать тренды  $\tau$ -зависимости позволяет аналитическое выражение (3) вместе с (4) и (5):

$$\frac{d^2W(\tau)}{d\omega'\Omega'} \sim \tau^2 \exp\left(-(\omega_0 - \omega_c)^2 \tau^2\right). \quad (6)$$

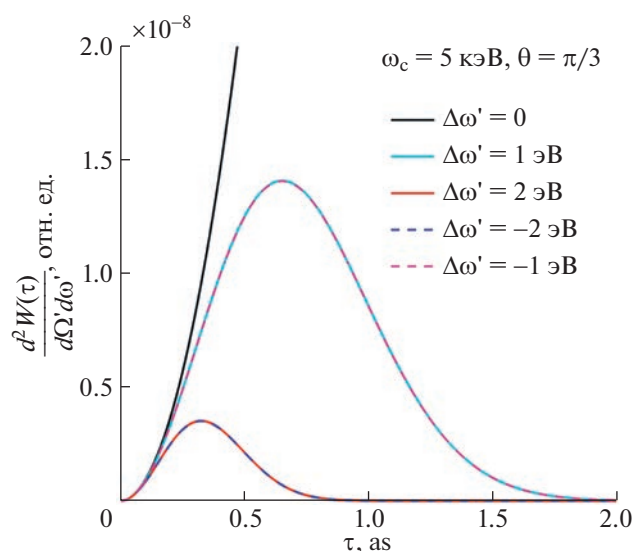
Согласно приведенной формуле возможны два тренда  $\tau$ -зависимости (рис. 2). Квадратично возрастающий при  $\omega' = \omega'_{\max}$  и немонотонный тренд при остальных частотах рассеяния, состоящий из участка возрастания при увеличении длительности УКИ от нуля до некоторого значения  $\tau^{\max}$  и участка асимптотического стремления к нулю при дальнейшем увеличении  $\tau$ . Последний тренд проиллюстрирован на рис. 2 для различных отстроек  $\Delta\omega' = (\omega' - \omega'_{\max})$ . С увеличением данной отстройки уменьшаются величина вероятности и характерные значения длительности  $\tau^{\max}$ .

Как следует из (6), длительность УКИ  $\tau^{\max}$ , соответствующая максимуму  $\tau$ -зависимости, равна

$$\tau^{\max} = \left| \frac{\omega_c}{1 + \frac{\hbar\omega_c(1 - \cos\theta)}{m_e c^2}} - \omega' \right|^{-1}. \quad (7)$$

При  $\Delta\omega' \rightarrow 0$ ,  $\tau^{\max} \rightarrow \infty$ , что соответствует квадратичному тренду.

В данной работе получена аналитическая формула интегральной за все время действия импульса спектрально-угловой вероятности рассеяния УКИ на свободном электроне, расширяющая описание, основанное на формуле Клейна–Нишины для монохроматического излучения, на случай ультракоротких импульсов. Разработанный подход применим для релятивистского случая. Показано, что при несущих частотах более 1 кэВ положение спектрального максимума рассе-



**Рис. 2.** Зависимость полной вероятности рассеяния на свободном электроном от характерной длительности импульса при различных отстройках частоты рассеянного излучения от частоты  $\omega'_{\max}$  на величины порядка 1 эВ.

янного излучения смещается в область меньших частот относительно несущей частоты с увеличением угла рассеяния из-за влияния релятивистской поправки. Получено выражение частоты спектрального максимума рассеянного импульса. В рамках настоящей работы также были изучены тренды зависимости вероятности рассеяния на свободных электронах от длительности падающего импульса. Показано, что при частоте рассея-

ния, приходящейся на спектральный максимум, вероятность квадратично возрастает. При остальных частотах рассеяния зависимость вероятности от длительности возрастает до точки максимума, после чего асимптотически стремится к нулю.

#### ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (соглашение № 22-22-00537).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Lawrence J.R., Waugh D. Laser Surface Engineering: Processes and Applications. Elsevier, 2014.
2. Varro S. Free Electron Lasers. Intech, Rijeka, 2012.
3. Kang H.S., Ko I.S. // Nat. Photonics. 2020. V. 14. P. 7–8.
4. Kida Y., Kinjo R., Tanaka T. // Appl. Phys. Lett. 2016. V. 109. 151107.
5. McNeil B.W.J., Thompson N.R. // Nat. Photonics. 2010. V. 4. P. 814–821.
6. Klein O., Nishina T. // Z. Phys. 1929. V. 52. P. 11–12.
7. Nelms A.T. Graphs of the Compton energy-angle relationship and the Klein–Nishina formula from 10 keV to 500 MeV // US Government Printing Office, Washington, 1953. V. 542.
8. Chao C.Y. // Phys. Rev. 1930. V. 36. 10.
9. Read J., Lauritsen C.C. // Phys. Rev. 1934. V. 45. P. 7.
10. Astapenko V.A. // Phys. Lett. A. 2010. V. 374. P. 1585–1590.
11. Астапенко В.А. // ЖЭТФ. 2011. Т. 139. С. 228.
12. Astapenko V.A., Rosmej F.B., Lisitsa V.S., Khramov E.S. // Phys. Plasmas. 2020. V. 27. 083301.

## THE PROBABILISTIC MODEL OF ULTRASHORT PULSES SCATTERING ON A FREE ELECTRON

Academician of the RAS A. S. Bugaev<sup>a</sup>, E. S. Khramov<sup>a</sup>, and V. A. Astapenko<sup>a</sup>

<sup>a</sup> Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University), Moscow, Russia

We devoted our study to the generalization of the traditional approach for the description of photon scattering on free electrons in the case of ultrashort laser pulses (USLP). In the framework of the second order of quantum mechanical perturbation theory with the use of the Klein–Nishina formula, we derived the expression for the total scattering probability during the whole time of the pulse action that is applicable in the relativistic limit. The redshift of scattered pulse spectra at the scattering angle increase in the relativistic case was studied. The trends of the total scattering probability on the USLP duration were categorized.

**Keywords:** ultrashort pulses, Klein–Nishina formula, scattering on the free electron, scattering probability during the whole time of pulse action