ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. ФИЗИКА, ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ, 2023, том 510, с. 3–5

ФИЗИКА

УДК 534.222

ДЕЙСТВИЕ ФРОНТА ТЕЧЕНИЯ НА НЕЛИНЕЙНУЮ ВОЛНУ В ДИССИПАТИВНОЙ СРЕДЕ

© 2023 г. **В. А. Базыленко[1,*], академик РАН О. В. Руденко[1,2,3,**]**

Поступило 29.12.2022 г.
После доработки 29.12.2022 г.
Принято к публикации 11.01.2023 г.

Указан способ генерации решений уравнения Бюргерса, описывающих взаимодействия волн в нелинейной диссипативной среде и линейно нарастающего фронта течения. Использованы точные решения, описывающие эти взаимодействия, а также свойства симметрии уравнения. Показано, что нарастающий фронт способен конкурировать с диссипацией и сжать сигнал во времени. Напротив, фронт с уменьшающейся крутизной "растягивает" сигнал.

Ключевые слова: течение, профиль волны, импульсный сигнал, стационарная волна, взаимодействие

DOI: 10.31857/S2686740023030033, **EDN:** OYEIKL

Исходим из уравнения Бюргерса, записанного в простейшей форме:

$$u_x = uu_t + u_{tt}. \tag{1}$$

Как известно, инфинитезимальные симметрии [1, 2] уравнения (1) образуют 5-мерную алгебру Ли, "натянутую" на линейно независимые операторы [3]:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_3 = x\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial u},$$
$$X_4 = 2x\frac{\partial}{\partial x} + t\frac{\partial}{\partial t} - u\frac{\partial}{\partial u}, \tag{2}$$
$$X_5 = x^2\frac{\partial}{\partial x} + tx\frac{\partial}{\partial t} - (t + xu)\frac{\partial}{\partial u}.$$

Нас будет интересовать проективная группа, генерируемая оператором X_5. Для нее получается уравнение

$$X_5(J) = x^2\frac{\partial J}{\partial x} + tx\frac{\partial J}{\partial t} - (t + xu)\frac{\partial J}{\partial u} = 0. \tag{3}$$

Характеристическая система и два инварианта имеют вид

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{dt}{tx} = -\frac{du}{t + xu}; \quad \lambda = \frac{t}{x}, \quad \mu = t + xu. \tag{4}$$

Следовательно, форма инвариантного решения такова:

$$u = -\frac{t}{x} + \frac{1}{x}\Phi(\lambda), \quad \lambda = \frac{t}{x}. \tag{5}$$

Используя проективное преобразование, из любого известного решения $u = u_1(t, x)$ уравнения Бюргерса можно получить однопараметрическое семейство новых решений

$$u_2(t, x) = \frac{ax}{1 - at} + \frac{1}{1 - at}u_1\left(\frac{t}{1 - at}, \frac{x}{1 - at}\right). \tag{6}$$

В дальнейшем нам понадобится обсудить физический смысл решений. Поэтому будем использовать другие обозначения с привязкой к конкретным объектам — нелинейным акустическим волнам.

Уравнение (1) запишем в следующем виде:

$$\frac{\partial V}{\partial z} - V\frac{\partial V}{\partial \theta} = \Gamma\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}. \tag{7}$$

Если иметь в виду распространение в среде акустических волн давления p конечной амплитуды p_0, физический смысл нормированных переменных и констант в уравнении (7) будет следующим:

$$V = \frac{p}{p_0}, \quad \theta = \omega\tau, \quad z = \frac{x}{l_{SH}},$$
$$l_{SH} = \frac{c^3\rho}{\varepsilon\omega p_0}, \quad l_{DIS} = \frac{2c^3\rho}{b\omega^2}, \quad \Gamma = \frac{l_{SH}}{l_{DIS}}. \tag{8}$$

[1]*Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия*
[2]*Институт общей физики им. А.М. Прохорова Российской академии наук, Москва, Россия*
[3]*Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта Российской академии наук, Москва, Россия*
**E-mail: 4mgu@mail.ru*
***E-mail: rudenko@acs366.phys.msu.ru*

Здесь ω — характерная частота волны или обратная длительность импульсного сигнала, $\tau = t - x/c$ — время в системе координат, движущейся вместе с волной в направлении оси x со скоростью звука c. Параметры среды: плотность ρ, коэффициенты нелинейности и диссипации — ε и b. Посредством l_{SH}, l_{DIS} обозначены характерные длины нелинейности (образования разрыва в исходном гладком профиле волны) и диссипации (линейного поглощения волны средой). Отношение Γ этих длин известно как обратное акустическое число Рейнольдса—Гольдберга [4].

Стационарное решение уравнения (7) для волны, бегущей со скоростью звука и не изменяющей своей формы при распространении, имеет вид

$$V = A\,\mathrm{th}\left(\frac{A\theta}{2\Gamma}\right). \tag{9}$$

Проективное преобразование (6) в обозначениях (8) имеет вид

$$V_2 = \frac{\theta}{z_0 - z} + \frac{1}{1 - z/z_0} V_1\left(\frac{z}{1 - z/z_0}, \frac{\theta}{1 - z/z_0}\right). \tag{10}$$

Применим преобразование (10) к стационарному решению V_1 (9). Полагая при этом $z_0 = -1$, $A = \pi$, получим так называемое “решение Хохлова” [4]:

$$V_2 = \frac{1}{1+z}\left[-\theta + \pi\,\mathrm{th}\frac{\pi\theta}{2\Gamma(1+z)}\right]. \tag{11}$$

Оно было фактически “угадано” Р.В. Хохловым в 1961 г., а затем найдено методом перевала из общего решения уравнения Бюргерса [5, 6]. Решение (11) описывает один период $-\pi < \theta < \pi$ пилообразной волны в области существования развитых ударных фронтов ($z > \pi$), а также последующий этап диссипативного вырождения нелинейности. Формула (11) получается также методом сращиваемых асимптотических разложений; при этом уже первое приближение дает точное решение. Однако использование преобразования (10) и стационарного решения (9) позволяет получить решение (11) тривиальным способом.

Столь же просто преобразование (10) генерирует и другие интересные решения. В качестве V_1 можно взять, например, решение линейной задачи теплопроводности, соответствующее исходному (при $z = 0$) импульсному сигналу в виде дельта-функции:

$$V_1 = \frac{1}{\sqrt{4\pi\Gamma z}}\exp\left(-\frac{\theta^2}{4\Gamma z}\right). \tag{12}$$

Применяя (10) к решению (12), найдем

$$V_2 = \frac{\theta}{z_0 - z} + \frac{1}{\sqrt{4\pi\Gamma f(z)}}\exp\left(-\frac{\theta^2}{4\Gamma f(z)}\right),\qquad f(z) = z\left(1 - \frac{z}{z_0}\right). \tag{13}$$

Первое слагаемое в (13) можно интерпретировать как фронт течения с линейно нарастающей скоростью (или акустическим давлением). Второе слагаемое — это импульсный сигнал, помещенный на этот фронт. Видно, что течение действует как на амплитуду сигнала, так и на его длительность. Оба процесса описываются функцией $f(z)$ (13).

Длительность дельта-функции при $z = 0$ равнялась нулю (пиковое значение было бесконечным). При распространении импульс вначале уширяется, а пиковое значение уменьшается из-за диссипации. На расстоянии $z = \frac{z_0}{2}$ импульс достигает максимальной длительности $\theta_* = \sqrt{\Gamma z_0}$ и минимальной амплитуды. В области $\frac{z_0}{2} < z < z_0$ идет обратный процесс. Формирующийся фронт сжимает импульс и при $z \to z_0$ он вновь превращается в дельта-функцию. Описанная тенденция отмечалась в работах [7—9]. Очевидно, что на сглаживающемся фронте $V(z,\theta) = -\frac{\theta}{z}$, крутизна которого уменьшается, будет происходить монотонный процесс увеличения длительности импульса и уменьшения его амплитуды, поскольку взаимодействие с фронтом и диссипация в этом случае действуют в одном направлении.

Возьмем теперь в качестве V_1 решение линейной задачи о распространении гармонического сигнала:

$$V_1 = \exp\left(-\Gamma\Omega^2 z\right)\sin(\Omega\theta). \tag{14}$$

Применяя к (13) преобразование (10), найдем

$$V_2 = \frac{\theta}{z_0 - z} + \frac{\exp\left(-\Gamma\Omega^2\dfrac{z}{1 - z/z_0}\right)}{1 - z/z_0}\sin\left(\frac{\Omega\theta}{1 - z/z_0}\right). \tag{15}$$

Видно, что по мере приближения фронта к “вертикальному” положению (т.е. при $z \to z_0$) частота периодического сигнала неограниченно увеличивается.

Используя преобразование (10) применительно к точным решениям уравнения Бюргерса, можно получить другие точные решения. Например, преобразуя в соответствии с (10) автомодельное решение [10], найдем

$$V_2 = \frac{\theta}{z_0 - z} + 4\Gamma\,\mathrm{th}\left(\frac{1}{4\Gamma}\right)\frac{\exp\left(-\frac{\theta^2}{4\Gamma f(z)}\right)}{\sqrt{4\pi\Gamma f(z)}}\times$$
$$\times\left[1+\mathrm{th}\left(\frac{1}{4\Gamma}\right)\cdot\mathrm{erf}\left(\frac{\theta}{\sqrt{4\Gamma f(z)}}\right)\right]^{-1}. \quad (16)$$

Второе слагаемое в (16) представляет собой автомодельное решение, которое отыскивалось в виде

$$V = \frac{1}{\sqrt{z+z_0}}\Phi\left(\frac{\theta}{\sqrt{z+z_0}}\right). \quad (17)$$

При этом до преобразования (10) координатная функция имела более простой вид $f(z) = z + z_0$.

Таким образом, использование преобразований, основанных на свойствах симметрии уравнения (2), позволяет не только упростить нахождение известных решений, но и сгенерировать новые решения посредством последовательного применения одного и того же или нескольких различных преобразований. Сочетание с численными методами позволит избежать сложных расчетов и громоздких формул, получаемых в результате аналитических вычислений.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа поддержана грантом РФФИ 19-29-06048.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ибрагимов Н.Х.* Азбука группового анализа // Новое в жизни, Науке, Технике. Сер. Математика, Кибернетика. М.: Знание, 1989. № 8. С. 1–47.
2. *Ибрагимов Н.Х.* Опыт группового анализа обыкновенных дифференциальных уравнений // Новое в жизни, Науке, Технике. Сер. Математика, Кибернетика. М.: Знание, 1991. № 7. С. 1–47.
3. *Ибрагимов Н.Х., Руденко О.В.* Принцип априорного использования симметрий в теории нелинейных волн // Акуст. журн. 2004. Т. 50. № 4. С. 406–419.
4. *Гурбатов С.Н., Руденко О.В., Саичев А.И.* Волны и структуры в нелинейных средах без дисперсии. М.: Физматлит, 2008. 496 с. ISBN 978-5-9221-1042-6.
5. *Солуян С.И., Хохлов Р.В.* Распространение акустических волн конечной амплитуды в диссипативной среде // Вест. Моск. ун-та. 1961. Т. 41. С. 534–543.
6. *Руденко О.В., Солуян С.И.* Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975.
7. *Маков Ю.Н., Руденко О.В.* Возмущения формирующегося ударного фронта пилообразных волн в диссипативных средах // Акуст. журн. 1997. Т. 43. № 2. С. 257–260.
8. *Руденко О.В.* Нелинейные пилообразные волны // Успехи физ. наук. 1995. Т. 165. № 9. С. 1011–1036.
9. *Гурбатов С.Н., Руденко О.В., Тюрина А.В.* Трансформация высокочастотного шума в поле ударной волны // Акуст. журн. 2018. Т. 64. № 4. С. 554–561.
10. *Руденко О.В., Солуян С.И.* Некоторые нестационарные задачи теории волн конечной амплитуды в диссипативных средах // ДАН. 1970. Т. 190. № 4. С. 815–818.

THE IMPACT OF THE WAVEFRONT ON A NONLINEAR WAVE IN A DISSIPATIVE MEDIUM

V. A. Bazylenko[a] **and** Academician of the RAS **O. V. Rudenko**[a,b,c]

[a] *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*
[b] *Prokhorov General Physics Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*
[c] *Institute of the Earth Physics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

Presented a method for generating solutions of the Burgers equation, which describe the interaction of waves in a nonlinear dissipative medium and a linearly growing wavefront. Exact solutions are used that describe these interactions, as well as the symmetry properties of the equation. It is shown that the rising wavefront is able to compete with dissipation and compress the signal in time. On the contrary, the wavefront with decreasing steepness “stretches” the signal.

Keywords: flow, wavefront, wave profile, impulse signal, stationary wave, interaction