ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. ФИЗИКА, ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ, 2023, том 509, с. 50–55

МЕХАНИКА

УДК 532.517.45

СИММЕТРИИ УРАВНЕНИЙ ЛАНГРЕНА–МОНИНА–НОВИКОВА ДЛЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ВЕРОЯТНОСТИ ПОЛЯ ВИХРЯ

© 2023 г. В. Н. Гребенёв[1,*], А. Н. Гришков[2,**], М. Оберлак[3,***]

Представлено академиком РАН М.П. Федоруком 04.05.2022 г.
Поступило 17.05.2022 г.
После доработки 17.05.2022 г.
Принято к публикации 10.08.2022 г.

А.М. Поляковым предложена программа расширить группу симметрий гидродинамических моделей до конформной инвариантности статистики в обратных каскадах, где конформная группа бесконечномерная. В настоящей работе представлена группа преобразований G уравнения для n-точечной функции плотности распределения вероятностей f_n (ФПРВ) из бесконечной цепочки уравнений Лангрена–Монина–Новикова (статистическая форма уравнений Эйлера) для поля вихря в двухмерном потоке. Основной результат: группа G конформно преобразует характеристики уравнения с нулевой завихренностью и инвариантно семейство f_n-уравнений для ФПРВ вдоль этих линий. Вдоль других характеристик уравнение не является инвариантным. Действие G сохраняет класс ФПРВ. Результаты применимы к исследованию инвариантности статистических характеристик в оптической турбулентности.

Ключевые слова: двумерная турбулентность, уравнения Лангрена–Монина–Новикова, конформная инвариантность, линии нулевой завихренности

DOI: 10.31857/S2686740023010054, **EDN:** OXVIJA

А.М. Поляков в работе [1] предложил программу для двумерной статистической теории турбулентности о расширении группы симметрий гидродинамических моделей до конформной инвариантности статистики в обратных каскадах. В этом случае конформная группа является бесконечномерной, что позволяет использовать возможности конформной теории поля [2]. Численные эксперименты, проведенные в работах [3, 4] (см. также обзор [5]), показали, что изолинии (линии нулевой завихренности, температуры) скалярных полей в двумерной турбулентности принадлежат классу SLE (Schramm–Löwner evolution) [5] конформно-инвариантных кривых. Такие кривые появляются как границы кластеров в двумерных критических явлениях, описываемых конформной теорией поля. Групповой анализ первого уравнения для 1-точечной функции плотности распределения вероятностей (ФПРВ) поля вихря из бесконечной цепочки Лангрена–Монина–Новикова (ЛМН) [6–8] для n-точечных ФПРВ выполнен в [9] в лагранжевой формулировке в отсутствие внешнего воздействия и нулевой вязкости. Найденная группа симметрии G конформно преобразует характеристики нулевой завихренности и f_1-уравнение для ФПРВ инвариантно вдоль нее. Уравнения вдоль других характеристик не являются инвариантными. Эти результаты распространены в [10] на класс гидродинамических моделей для скалярных полей. Доказано, что крупномасштабное трение сохраняет конформную группу преобразований, тогда как вязкость нарушает преобразования симметрии. С использованием группы G в работе [11] для 1-точечной статистики изолиний $\mathbf{x}(l)$ с нулевой завихренностью или температурой скалярного поля ϕ показана конформная инвариантность меры $f_1(\mathbf{x}(l), \phi)d\phi$ [5] или вероятности, что случайная кривая $\mathbf{x}(l)$ проходит через точку $\mathbf{x}$, где $\phi = 0$ для $l = l_1$. Внешнее воздействие в виде белого гауссова шума и крупномасштабного трения не разрушает группу симметрий. При этом преобразования G сохраняют класс ФПРВ.

Цель сообщения – распространить методологию, полученную в работах [9–11] для вычисле-

[1] *Федеральный исследовательский центр информационных и вычислительных технологий, Новосибирск, Россия*
[2] *Институт математики и статистики, Университет Сан-Паулу, Сан-Паулу, Бразилия*
[3] *Дармштадтский технический университет, Дармштадт, Германия*
**E-mail: vngrebenev@gmail.com*
***E-mail: grishkov@ime.usp.br*
****E-mail: oberlack@fdy.tu-darmstadt.de*

ния преобразований симметрии 1-точечной статистики, на конформную инвариантность n-точечной ($n > 1$) статистики изолиний $\mathbf{x}(l)$. Ключевым моментом является вывод конформного преобразования характеристик уравнения и инвариантность семейства f_n-уравнений для ФПРВ вдоль изолиний нулевой завихренности. Будет рассмотрено уравнение для n-точечной ФПРВ f_n ($n > 1$) из бесконечной цепочки ЛМН-уравнений для поля вихря в отсутствие внешнего воздействия и нулевой вязкости в лагранжевой постановке.

1. ДИНАМИЧЕСКАЯ СИСТЕМА, ОПРЕДЕЛЯЕМАЯ f_n-УРАВНЕНИЕМ

Используются следующие обозначение: $f_n(\mathbf{x}_{(1)}, \omega_{(1)},\ldots,\mathbf{x}_{(n)},\omega_{(n)},t)$, $n = 1,\ldots,$ где $\omega_{(i)}$, $i = 1,\ldots,n$, – значение компоненты завихренности $\Omega(\mathbf{x}_{(i)},t)(\equiv \Omega_{(i)})$ в точке $\mathbf{x}_{(i)}$ в момент времени t. Далее, верхний индекс будет обозначать компоненту вектора.

Уравнение для n-точечной ФПРВ f_n бесконечной цепочки ЛМН-уравнений в эйлеровой формулировке в отсутствие внешних сил и нулевой вязкости имеет вид [12]

$$\frac{\partial f_n}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial x_{(j)}}\int d\mathbf{x}_{(n+1)} d\omega_{(n+1)}\omega_{(n+1)}\alpha^1(\mathbf{r}_{(j,n+1)})f_{n+1} + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial y_{(j)}}\int d\mathbf{x}_{(n+1)} d\omega_{(n+1)}\omega_{(n+1)}\alpha^2(\mathbf{r}_{(j,n+1)})f_{n+1}\right) = 0, \tag{1}$$

где $n = 1,\ldots,$

$$\mathbf{r}_{(sd)} = \mathbf{x}_{(s)} - \mathbf{x}_{(d)}, \quad \alpha^1(\mathbf{r}_{(s,d)}) = -\frac{1}{2\pi}\frac{r^2_{(s,d)}}{|\mathbf{r}_{(s,d)}|^2},$$
$$\alpha^2(\mathbf{r}_{(s,d)}) = \frac{1}{2\pi}\frac{r^1_{(s,d)}}{|\mathbf{r}_{(s,d)}|^2}. \tag{2}$$

Далее, будем использовать обозначения

$$\alpha^1(\mathbf{r}_{(1,n+1)}) = \alpha^1_{(1,n+1)}, \quad \alpha^2(\mathbf{r}_{(1,n+1)}) = \alpha^2_{(1,n+1)}. \tag{3}$$

Класс ФПРВ определяется следующими условиями:

$$\int d\omega_{(1)}\ldots d\omega_{(n)} f_n = 1, \tag{4}$$

$$\int d\omega_{(n+1)} f_{n+1} = f_n; \tag{5}$$

$$\lim_{|\mathbf{x}_{(n)}-\mathbf{x}_{(n+1)}|\to\infty} f_{n+1}(\mathbf{x}_{(1)},\omega_{(1)},\ldots,\mathbf{x}_{(n+1)},\omega_{(n+1)},t) =$$
$$= f_1(\mathbf{x}_{(n+1)},\omega_{(n+1)},t)\cdot f_n(\mathbf{x}_{(1)},\omega_{(1)},\ldots,\mathbf{x}_{(n)},\omega_{(n)},t), \tag{6}$$

$$\lim_{|\mathbf{x}_{(n)}-\mathbf{x}_{(n+1)}|\to 0} f_{n+1} = \delta(\omega_{(n+1)} - \omega_{(n)})f_n. \tag{7}$$

Последнее соотношение понимается в смысле обобщенных функций и ведет к равенству вероятностных мер.

Применим метод характеристик для представления гиперболического уравнения (1) в виде динамической системы эволюции лагранжевых частиц, которые движутся согласно условно осредненному полю скорости:

$$\frac{d}{ds}t(s) = 1, \tag{8}$$

$$\frac{d}{ds}\mathbf{X}_{n(j)}(s) = \langle \mathbf{u}(\mathbf{x}_{(j)},t)\,|\,\omega_{(l)},\mathbf{x}_{(l)}\rangle\Big|_{\{\omega_{(l)},\mathbf{x}_{(l)}\}=\{\Omega_{(l)}(s),\mathbf{X}_{n(l)}(s)\}}, \tag{9}$$

$$\frac{d}{ds}\Omega_{n(j)}(s) = 0, \tag{10}$$

где $j = 1,\ldots,n$ и $l = 1,\ldots,n$. Нижний индекс в выражении $\{\omega_{(l)},\mathbf{x}_{(l)}\} = \{\Omega_{(l)}(s),\mathbf{X}_{n(l)}(s)\}$ означает, что статистика вычисляется в текущем положении частицы на характеристике. Решения системы ОДУ (8)–(10) – характеристики уравнения (1), которые зависят от начальных условий $\{\omega^0_{(l)},\mathbf{x}^0_{(l)}\}$ при $s = 0$:

$$\mathbf{X}_{n(j)}(0,\{\omega^0_{(l)},\mathbf{x}^0_{(l)}\}) = \mathbf{x}^0_{(l)}, \tag{11}$$

$$\Omega_{n(j)}(0,\{\omega^0_{(l)},\mathbf{x}^0_{(l)}\}) = \omega^0_{(l)}. \tag{12}$$

Вдоль характеристик уравнение (1) имеет вид

$$\frac{df_n(s)}{ds} = -f_n(s)\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\partial}{\partial x_{(j)}}\langle u(\mathbf{x}_{(j)},t)\,|\,\{\omega_l,\mathbf{x}_{(l)}\}\rangle + \right.$$
$$\left.\left. + \frac{\partial}{\partial y_{(j)}}\langle v(\mathbf{x}_{(j)},t)\,|\,\{\omega_{(l)},\mathbf{x}_{(l)}\}\rangle\right]\right|_{\{\omega_{(l)},\mathbf{x}_{(l)}\}=\{\Omega_{(l)}(s),X_{n(l)}(s)\}}. \tag{13}$$

Компоненты скорости определяются формулами

$$\langle u(\mathbf{x}_{(j)},t)\,|\,\{\omega_{(l)},\mathbf{x}_{(l)}\}\rangle =$$
$$= \int d\mathbf{x}_{(n+1)} d\omega_{(n+1)}\omega_{(n+1)}\alpha^1(\mathbf{x}_{(l)} - \mathbf{x}_{(n+1)})\times \tag{14}$$
$$\times\frac{f_{n+1}(\mathbf{x}_{(n+1)},\omega_{(n+1)},\{\mathbf{x}_{(l)},\omega_{(l)}\},t)}{f_n(\{\mathbf{x}_{(l)},\omega_{(l)}\},t)},$$

$$\langle v(\mathbf{x}_{(j)},t)\,|\,\{\omega_{(l)},\mathbf{x}_{(l)}\}\rangle =$$
$$= \int d\mathbf{x}_{(n+1)} d\omega_{(n+1)}\omega_{(n+1)}\alpha^2(\mathbf{x}_{(j)} - \mathbf{x}_{(n+1)})\times \tag{15}$$
$$\times\frac{f_{n+1}(\mathbf{x}_{(n+1)},\omega_{(n+1)},\{\mathbf{x}_{(l)},\omega_{(l)}\},t)}{f_n(\{\mathbf{x}_{(l)},\omega_{(l)}\},t)}.$$

Используя $\mathbf{x}_{(1)}, \mathbf{x}_{(2)}, \ldots \mathbf{x}_{(n)}$, введем комплексные переменные

$$
\begin{aligned}
z_{(1)} &= x^1_{(1)} + ix^2_{(1)},\\
z_{(2)} &= x^1_{(2)} + ix^2_{(2)},\\
&\ldots,\\
z_{(n)} &= x^1_{(n)} + ix^2_{(n)}.
\end{aligned} \tag{16}
$$

Обозначим $\rho_{(i)} = |z_{(i)}| = (z_{(i)}\bar{z}_{(i)})^{1/2}$ и $\varphi_{(i)} = \mathrm{Arg}(z_{(i)})$, $i = 1, \ldots n$, где $\bar{z}_{(i)}$ – сопряженная комплексная переменная. Уравнение (9) в комплексных переменных имеет вид

$$
\begin{aligned}
X^1_{n(j),s} + iX^2_{n(j),s} &= \frac{1}{2}\int(\bar{z}_{(n+1)}\mathrm{d}z_{(n+1)} + z_{(n+1)}\mathrm{d}\bar{z}_{(n+1)})\times\\
&\times \mathrm{d}\varphi_{(n+1)}\omega_{(n+1)}\mathrm{d}\omega_{(n+1)}\alpha^1_{(j,n+1)})f_{n+1}f_n^{-1} +\\
&+\frac{i}{2}\int(\bar{z}_{(n+1)}\mathrm{d}z_{(n+1)} + z_{(n+1)}\mathrm{d}\bar{z}_{(n+1)})\times\\
&\times \mathrm{d}\varphi_{(n+1)}\omega_{(n+1)}\mathrm{d}\omega_{(n+1)}\alpha^2_{(j,n+1)})f_{n+1}f_n^{-1}.
\end{aligned} \tag{17}
$$

Уравнение (17) описывает динамику j-й лагранжевой частицы на j-й компоненте n-мерного комплексного пространства $C^n = C_{(1)} \times \ldots \times C_{(n)}$, где $C_{(j)} \simeq C$, так что соответствующая ФПРВ определяется уравнением (13). Таким образом, $Z_{(n)j}(s) = X^1_{n(j),s} + iX^2_{n(j),s}$ – кривая на $C_{(j)}$, вдоль которой компонента $\omega^0_{(j)}$ вектора $(\omega^0_{(1)}, \ldots, \omega^0_{(n)})$ начальных значений завихренности сохраняется.

2. КОНФОРМНАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ ХАРАКТЕРИСТИК

Для характеристик $\mathbf{X}_{n(j)}(s)$, $j = 1, \ldots, n$, оператор инфинитиземальных преобразований $S_{(n)}$ группы симметрии имеет вид

$$
\begin{aligned}
S_{(j)} &= \xi^1\frac{\partial}{\partial x^1_{(1)}} + \xi^2\frac{\partial}{\partial x^2_{(1)}} + \xi^3\frac{\partial}{\partial\omega_{(1)}} + \ldots + \xi^{3n-2}\frac{\partial}{\partial x^1_{(n)}} +\\
&+\xi^{3n-1}\frac{\partial}{\partial x^2_{(n)}} + \xi^{3n}\frac{\partial}{\partial\omega_{(n)}} + \eta^1_{(n)}\frac{\partial}{\partial f_n} + \xi^{3n+1}\frac{\partial}{\partial x^1_{(n+1)}} +\\
&+\xi^{3n+2}\frac{\partial}{\partial x^2_{(n+1)}} + \xi^{3n+3}\frac{\partial}{\partial\omega_{(n+1)}} + \eta^2_{(n)}\frac{\partial}{\partial f_{n+1}}.
\end{aligned} \tag{18}
$$

Координаты инфинитиземального оператора определяются следующими формулами

$$\xi^1 = c^{11}(\mathbf{x}_{(1)})x^1_{(1)} + c^{12}(\mathbf{x}_{(1)})x^2_{(1)} + d^1(\mathbf{x}_{(1)}), \tag{19}$$

$$\xi^2 = c^{21}(\mathbf{x}_{(1)})x^1_{(1)} + c^{22}(\mathbf{x}_{(1)})x^2_{(1)} + d^2(\mathbf{x}_{(1)}), \tag{20}$$

$$\xi^3 = [6c^{11}(\mathbf{x}_{(j)})]\omega_{(1)}, \tag{21}$$

$$\ldots$$

$$\xi^{3k-2} = c^{11}(\mathbf{x}_{(k)})x^1_{(k)} + c^{12}(\mathbf{x}_{(k)})x^2_{(k)} + d^1(\mathbf{x}_{(k)}), \tag{22}$$

$$\xi^{3k-1} = c^{21}(\mathbf{x}_{(k)})x^1_{(k)} + c^{22}(\mathbf{x}_{(k)})x^2_{(k)} + d^2(\mathbf{x}_{(k)}), \tag{23}$$

$$\xi^{3k} = [6c^{11}(\mathbf{x}_{(k\neq j)})]\omega_{(k)}, \tag{24}$$

$$\ldots$$

$$\xi^{3n-2} = c^{11}(\mathbf{x}_{(n)})x^1_{(n)} + c^{12}(\mathbf{x}_{(n)})x^2_{(n)} + d^1(\mathbf{x}_{(n)}), \tag{25}$$

$$\xi^{3n-1} = c^{21}(\mathbf{x}_{(n)})x^1_{(n)} + c^{22}(\mathbf{x}_{(n)})x^2_{(n)} + d^2(\mathbf{x}_{(n)}), \tag{26}$$

$$\xi^{3n} = [6c^{11}(\mathbf{x}_{(n)})]\omega_{(n)}, \tag{27}$$

$$\xi^{3n+1} = c^{11}(\mathbf{x}_{(j)})x^1_{(n+1)} + c^{12}(\mathbf{x}_{(j)})x^2_{(n+1)} + d^1(\mathbf{x}_{(j)}), \tag{28}$$

$$\xi^{3n+2} = c^{21}(\mathbf{x}_{(j)})x^1_{(n+1)} + c^{22}(\mathbf{x}_{(j)})x^2_{(n+1)} + d^2(\mathbf{x}_{(j)}), \tag{29}$$

$$\xi^{3n+3} = [2c^{11}(\mathbf{x}_{(j)})]\omega_{(n+1)}, \tag{30}$$

где $k = 1, \ldots, n$, c^{ij} удовлетворяют соотношениям $c^{11} = c^{22}$, $c^{12} = -c^{21}$ и c^{11}, c^{12} – произвольные гармонические функции. Функции $d^1(\mathbf{y})$ и $d^2(\mathbf{y})$, где $\mathbf{y} = \mathbf{x}_{(k)}$ определяются формулами

$$d^1_1(\mathbf{y}) = 2c^{11}(\mathbf{y}) - c^{11}_1(\mathbf{y})y^1 - c^{12}_1(\mathbf{y})y^2, \tag{31}$$

$$d^1_2(\mathbf{y}) = -c^{11}_2(\mathbf{y})y^1 - c^{12}_2(\mathbf{y})y^2, \tag{32}$$

$$d^2_1(\mathbf{y}) = c^{12}_1(\mathbf{y})y^1 - c^{11}_1(\mathbf{y})y^2, \tag{33}$$

$$d^2_2(\mathbf{y}) = 2c^{11}(\mathbf{y}) + c^{12}_2(\mathbf{y})y^1 - c^{22}_2(\mathbf{y})y^2. \tag{34}$$

Координаты $\eta^1_{(n)}$ и $\eta^2_{(n)}$ имеют вид

$$
\begin{aligned}
\eta^1_{(n)} &= a^{00}_{(n)}(t, \mathbf{x}_{(1)}, \ldots, \mathbf{x}_{(n)})f_n,\\
a^{00}_{(n)} &= \frac{\partial\xi^0}{\partial t} - \left(\frac{\partial\xi^0}{\partial t} + \frac{\partial\xi^1}{\partial x^1_{(1)}} + \frac{\partial\xi^2}{\partial x^2_{(1)}} + \ldots +\right.\\
&\left.+\frac{\partial\xi^{3n-2}}{\partial x^1_{(n)}} + \frac{\partial\xi^{3n-1}}{\partial x^2_{(n)}}\right),
\end{aligned} \tag{35}
$$

$$\eta^2_{(n)} = a^{00}_{(n+1)}(t, \mathbf{x}_{(1)}, \ldots, \mathbf{x}_{(n+1)})f_{(n+1)}, \tag{36}$$

$$
\begin{aligned}
a^{00}_{(n+1)} &= \frac{\partial\xi^0}{\partial t} - \left(\frac{\partial\xi^0}{\partial t} + \frac{\partial\xi^1}{\partial x^1_{(1)}} + \frac{\partial\xi^2}{\partial x^2_{(1)}} + \frac{\partial\xi^4}{\partial x^1_{(2)}} +\right.\\
&\left.+\frac{\partial\xi^5}{\partial x^2_{(2)}} + \ldots + \frac{\partial\xi^{3n+1}}{\partial x^1_{(n+1)}} + \frac{\partial\xi^{3n+2}}{\partial x^2_{(n+1)}}\right).
\end{aligned} \tag{37}
$$

Используя $\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^{3n-2}, \xi^{3n-1}, \xi^{3n}$ и ξ^{3n+1}, получаем

$$\eta^1_{(n)} = -6\sum_{i=1}^{n}c^{11}(\mathbf{x}_{(i)}), \tag{38}$$

$$\eta^2_{(n)} = -2c^{11}(\mathbf{x}_{(j)}) - 6\sum_{i=1}^{n}c^{11}(\mathbf{x}_{(i)}). \tag{39}$$

Инфинитиземальный оператор $S_{(j)}$ порождает группу Ли G_j:

$$z^*_{(1)} = F_{(1)}(z_{(1)}), \tag{40}$$

$$\omega^*_{(1)} = |F_{(1)z_{(2)}}|^2\omega_{(1)}, \tag{41}$$

$$\ldots$$

$$z^*_{(k)} = F_{(1)}(z_{(k)}), \tag{42}$$

$$\omega^*_{(k)} = |F_{(1)z_{(k\neq j)}}|^2\omega_{(k)}, \tag{43}$$

$$\ldots$$

$$z^*_{(n+1)} = F'(z_{(j)}, z_{(n+1)}, a), \tag{44}$$

$$\omega^*_{(n+1)} = |F_{(1)z_{(j)}}|^{2/3}\omega_{(n+1)}, \tag{45}$$

$$f^*_n = \prod_{i=1}^{n}|F_{(1)z_{(i)}}|^{-2} f_n, \tag{46}$$

$$f^*_{n+1} = |F_{(1)z_{(j)}}|^{-2/3}\prod_{i=1}^{n}|F_{(1)z_{(i)}}|^{-2} f_{n+1}, \tag{47}$$

где $F_{(1)}$ – конформное отображение, $F_{(1)z_{(k)}}$ – производная по $z_{(k)}$. $F'(z_{(j)}, z_{(n+1)})$ определено на $C_{(j)} \times C_{(n+1)}$.

Компоненты скорости преобразуются инфинитезимально согласно формулам

$$\begin{aligned} \langle u(\mathbf{x},t) \mid \omega_{(j)}, \mathbf{x}_{(j)}\rangle^* &= \langle u(\mathbf{x}_{(j)},t)|\omega_{(j)}, \mathbf{x}_{(j)}\rangle + \\ &+ 3c^{11}(\mathbf{x}_{(j)})a\langle u(\mathbf{x}_{(j)}),t)|\omega_{(j)}),\mathbf{x}_{(j)})\rangle + \\ &+ c^{12}(\mathbf{x}_{(j)})a\langle v(\mathbf{x}_{(j)},t)|\omega_{(j)}, \mathbf{x}_{(j)}\rangle + \mathbb{O}(a^2), \end{aligned} \tag{48}$$

$$\begin{aligned} \langle v(\mathbf{x}_{(j)},t)|\omega_{(j)}, \mathbf{x}_{(j)}\rangle^* &= \langle v(\mathbf{x}_{(j)},t)|\omega_{(j)}, \mathbf{x}_{(j)}\rangle - \\ &- c^{12}(\mathbf{x}_{(j)},t)a\langle u(\mathbf{x}_{(j)},t)|\omega_{(j)}, \mathbf{x}_{(j)}\rangle + \\ &+ 3c^{11}(\mathbf{x}_{(j)},t)a\langle v(\mathbf{x}_{(j)},t)|\omega_{(j)}, \mathbf{x}_{(j)}\rangle + \mathbb{O}(a^2). \end{aligned} \tag{49}$$

Уравнения характеристик описывают осредненную динамику класса лагранжевых частиц в пространстве $\mathbf{D} = \mathbf{D}_{(1)} \times \ldots \times \mathbf{D}_{(n)}$:

$$\begin{gathered} \mathbf{D}_{(j)} = \{C_{(j)}, C_{(n+1)}, X_{(j)s}, \omega_{(j+1)}, \mathrm{d}z_{(n+1)}, \\ \mathrm{d}\overline{z}_{(n+1)}, \mathrm{d}\omega_{(n+1)}, f_n, f_{n+1}\}, \\ j = 1,\ldots,n. \end{gathered} \tag{50}$$

Группа преобразований G, действующая в $\mathbf{D}$, – прямое произведение групп Ли $G_{(j)}$ т.е. $G = G_{(1)} \times \ldots \times G_{(n)}$ и G есть снова группа Ли. Подставляя преобразованные группой Ли G величины в уравнения (8)–(10) и используя (48), (49) и методологию вычислений работы [9], получаем инвариантность характеристик (8)–(10).

3. КОНФОРМНАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ f_n-УРАВНЕНИЯ

Чтобы понять, как группа G преобразует f_n-уравнение из бесконечной ЛМН-цепочки, рассматривается эквивалентная форма уравнений (13), записанная вдоль характеристик (8)–(10). ФПРВ f_n и f_{nt} преобразовываются под действием группы G как

$$\begin{aligned} f^*_n &= f_n + \eta^1_{(n)} + \mathbb{O}(a^2) \equiv \\ &\equiv f_n - 6a\sum_{j=1}^{n} c^{11}(\mathbf{x}_{(j)})f_{(n)} + \mathbb{O}(a^2), \end{aligned} \tag{51}$$

$$\begin{aligned} f^*_{nt} &= f_{nt} + aD_t(\eta^1_{(n)}) + \mathbb{O}a^2) = f_{nt} - \\ &- \sum_{j=1}^{n} 6c^{11}(\mathbf{x}_{(j)})f_{nt}a - 6\sum_{j=1}^{n}\Big(f_n c^{11}_{X^1_{n(j)}}(\mathbf{x}_{(j)})X^1_{n(j)t} - \\ &- f_n c^{11}_{X^2_{n(j)}}(\mathbf{x}_{(j)})X^2_{n(j)t}\Big) + \mathbb{O}(a^2). \end{aligned} \tag{52}$$

Далее следуем алгоритму, представленному в работе [9]. Производные компонент скорости преобразуются инфинитиземально согласно формулам

$$\begin{aligned} &\Big[\langle u(\mathbf{x}_{(j)},t)|\{\omega_{(j)}, \mathbf{x}_{(j)}\}\rangle_{x^1_{(j)}}\Big]^* = \\ &= \langle u(\mathbf{x}_{(j)},t)|\{\omega_{(j)}, \mathbf{x}_{(j)}\}\rangle_{x^1_{(j)}} + \zeta^u_{x^1_{(j)}}a + \mathbb{O}(a^2), \end{aligned} \tag{53}$$

$$\begin{aligned} &\Big[\langle v(\mathbf{x}_{(j)},t)|\{\omega_{(j)}, \mathbf{x}_{(j)}\}\rangle_{x^2_{(j)}}\Big]^* = \\ &= \langle v(\mathbf{x}_{(j)},t)|\{\omega_{(j)}, \mathbf{x}_{(j)}\}\rangle_{x^2_{(j)}} + \zeta^v_{x^2_{(j)}}a + \mathbb{O}(a^2), \end{aligned} \tag{54}$$

используя стандартные преобразования групп Ли, получаем

$$\begin{aligned} \zeta^u_{x^1_{(j)}} + \zeta^v_{x^2_{(j)}} &= 6c^{11}_{x^1_{(j)}}(\mathbf{x}_{(j)})\langle u(\mathbf{x}_{(j)},t)|\{\omega_{(j)}, \mathbf{x}_{(j)}\}\rangle + \\ &+ 6c^{11}_{x^2_{(j)}}(\mathbf{x}_{(j)})\langle v(\mathbf{x}_{(j)},t)|\{\omega_{(j)}, \mathbf{x}_{(j)}\}\rangle - \\ &- 6c^{11}_{x^1_{(j)}}(\mathbf{x}_{(j)})\omega_{(j)}\langle u(\mathbf{x}_{(j)},t)|\{\omega_{(j)}, \mathbf{x}_{(j)}\}\rangle_{\omega_{(j)}} - \\ &- 6c^{11}_{x^2_{(j)}}(\mathbf{x}_{(j)},t)\omega_{(j)}\langle v(\mathbf{x}_{(j)},t)|\{\omega_{(j)}, \mathbf{x}_{(j)}\}\rangle_{\omega_{(j)}}. \end{aligned} \tag{55}$$

Далее уравнение (13) записывается в преобразованных переменных, используя (51)–(54) и (55). Члены порядка a имеют вид (промежуточные вычисления опущены):

$$\begin{aligned} &-\sum_{j=1}^{n} 6c^{11}(\mathbf{x}_{(j)})f_{nt} - 6\sum_{j=1}^{n}\Big(f_n c^{11}_{X^1_{n(j)}}(\mathbf{x}_{(j)})X^1_{n(j)t} - \\ &- f_n c^{11}_{X^2_{n(j)}}(\mathbf{x}_{(j)})X^2_{n(j)t}\Big) = \sum_{j=1}^{n}\Bigg[\sum_{k=1}^{n}\Big(-f_n 6c^{11}(\mathbf{x}_{(k)})\times \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\times[\langle u(\mathbf{x}_{(j)},t)|\{\omega_{(j)},\mathbf{x}_{(j)}\}\rangle_{x^1_{(j)}}+\langle u(\mathbf{x}_{(j)},t)|\{\omega_{(j)},\mathbf{x}_{(j)}\}\rangle_{x^2_{(j)}}]\Big)+\\
&+f_n 6c^{11}_{x^1_{(j)}}(\mathbf{x}_{(j)})\langle u(\mathbf{x}_{(j)},t)|\{\omega_{(j)},\mathbf{x}_{(j)}\}\rangle+6f_n c^{11}_{x^2_{(j)}}(\mathbf{x}_{(j)})\times\\
&\times\langle v(\mathbf{x}_{(j)},t)|\{\omega_{(j)},\mathbf{x}_{(j)}\}\rangle-f_n 6c^{11}_{x^1_{(j)}}(\mathbf{x}_{(j)})\omega_{(j)}\times\\
&\times\langle u(\mathbf{x}_{(j)},t)|\{\omega_{(j)},\mathbf{x}_{(j)}\}\rangle_{\omega_{(j)}}-6f_n c^{11}_{x^2_{(j)}}(\mathbf{x}_{(j)},t)\omega_{(j)}\times\\
&\times\langle v(\mathbf{x}_{(j)},t)|\{\omega_{(j)},\mathbf{x}_{(j)}\}\rangle_{\omega_{(j)}}\Big]_{\{\omega_{(l)},\mathbf{x}_{(l)}\}=\{\Omega_{(l)}(s),\mathbf{X}_{n(l)}(s)\}}.
\end{aligned}
\tag{56}
$$

Подставляя уравнения (8)–(10) и (13) в (56), получаем, что остаются только два последних слагаемых в (56). Эти слагаемые обращаются в ноль на изолиниях $\Omega_{(l)}(s)=0$, $l=1,\ldots,n$. Условие инвариантности (13), т.е. равенство нулю (56), ведет к тому, что только уравнение (13) вдоль характеристик с нулевой завихренностью преобразуется инвариантно под действием группы Ли G. При этом изолинии $\Omega_{(l)}(s)=0$ преобразуются конформно. Полученный результат находится в согласии с результатами численных экспериментов [3] и при $l=1$ с вычислениями [9]. Инвариантность класса ФПРВ, т.е. соотношений (4)–(7), под действием группы G проверяется непосредственной проверкой, как в [9].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Преобразования G будут использованы для исследования свойств инвариантности f_n-уравнения при внешнем воздействии в виде белого гауссова шума и крупномасштабного трения для пассивного скалярного поля.

Полученные результаты применимы к исследованию инвариантности статистических характеристик оптической турбулентности, описываемой двумерным нелинейным уравнением Шрёдингера (НУШ). В НУШ проявляется множество структур, включающих и оптическую турбулентность. Применение преобразования Маделунга [13] позволяет преобразовать дефокусирующее НУШ, как это сделано в [14], в уравнения Эйлера идеальной несжимаемой жидкости и перейти к статистическому описанию оптических вихрей.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Конфликт интересов отсутствует.

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы благодарят профессора M. Wacławczyk за полезное обсуждение работы.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследования выполнены при финансовой поддержке Российского научного фонда, проект 22-11-00287. А.Н. Гришков поддержан FAPESP (Brazil), проект 2021/09845-0.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Polyakov A.M.* The theory of turbulence in two dimensions // Nuclear Phys. B. 1993. V. 396. N. 23. P. 367–385.
2. *Belavin A.A.,Polyakov A.M., Zamolodchikov A. A.* Conformal field theory // Nuclear Phys. B. 1984. V. 241. P. 333–380.
3. *Bernard D., Boffetta G., Celani A., Falkovich G.* Conformal invariance in two-dimensional turbulence // Nature Physics. 2006. V. 2. P. 124–128.
4. *Bernard D., Boffetta G., Celani A., Falkovich G.* Inverse Turbulent Cascades and Conformally Invariant Curves // Phys. Rev. Lett. 2007. V. 98. P. 024501–504.
5. *Falkovich G.* Conformal invariance in hydrodynamic turbulence // Russian Math. Surveys. 2007. V. 63. P. 497–510.
6. *Lundgren T.S.* Distribution functions in the statistical theory of turbulence // Phys. Fluids. 1967. V. 10. P. 969–975.
7. *Monin A.S.* Equations of turbulent motion // Prikl. Mat. Mekh. 1967. V. 31. P. 1057–1068.
8. *Novikov E.A.* Kinetic equations for a vortex field // Sov. Phys. Dokl. V. 12. P. 1006-8.
9. *Grebenev V.N., Wacławczyk M., Oberlack M.* Conformal invariance of the zero-vorticity Lagrangian path in 2D turbulence // J. Phys. A: Math. Theor. 2019. V. 50. P. 335501.
10. *Wacławczyk M., Grebenev V.N., Oberlack M.* Conformal invariance of characteristic lines in a class of hydrodynamic models // Symmetry. 2020. V. 12. P. 1482.
11. *Wacławczyk M., Grebenev V.N., Oberlack M.* Conformal invariance of the 1-point statistics of the zero-isolines of 2*d* scalar fields in inverse turbulent cascades // Physical Review Fluids. 2021. V. 6. P. 084610.
12. *Friedrich R., Daitche A., Kamps O., Lülff J., Michel Voßkuhle M., Wilczek M.* The Lundgren-Monin-Novikov hierarchy: Kinetic equations for turbulence // C.R. Physique. 2012. V. 13. P. 929–953.
13. *Madelung E.* Quantentheorie in hydrodynamischer form // Zeitschrift für Physik. 1927. V. 40. P. 322–326.
14. *Bustamante M.D., Nazarenko S.V.* Derivation of the Biot–Savart equation from the nonlinear Schrödinger equation // Phys. Rev. E. 2015. V. 92. P. 053019.

SYMMETRIES OF THE LUNDGREN–MONIN–NOVIKOV EQUATION FOR PROBABILITY OF THE VORTICITY FIELD DISTRIBUTION

V. N. Grebenev[a], A. N. Grishkov[b], and M. Oberlack[c]

[a] *Federal Research Center for Information and Computational Technologies, Novosibirsk, Russia*

[b] *Institute of Mathematics and Statistics, The University of Sao Paulo, Sao Paulo, Brazil*

[c] *Technical University of Darmstadt, Darmstadt, Germany*

Presented by Academician of the RAS M.P. Fedoruk

A.M. Polyakov suggested the programme to expand the symmetries admitted by hydrodynamic models to the conformal invariance of statistics in the inverse cascade where the conformal group is infinite-dimensional. In the present work, the group of transformations G of the n-point probability density function f_n (PDF) is presented for the infinite chain of Lundgren–Monin–Novikov equations (the statistical form of the Euler equations) for vorticity fields of the two-dimensional inviscid flow. The problem is written in the Lagrangian setting. The main result is that the group G transforms conformally the zero-vorticity characteristics and invariantly a family of the f_n-equations for PDF along these lines. The equations are not invariant along other characteristics. Moreover, the action of G conserves the class of PDF. The results obtained can be used for studying the invariance of statistical properties of the optical turbulence.

Keywords: Two-dimensional turbulence, Lundgren–Monin–Novikov equations, conformal invariance, zero-vorticity isoline