

УДК 531.2

О ФОРМАХ РАВНОВЕСИЯ НАЧАЛЬНО-ИЗОГНУТОЙ БАЛКИ БЕРНУЛЛИ–ЭЙЛЕРА ПРИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ И ТЕПЛОВЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

© 2023 г. Академик РАН Н. Ф. Морозов^{1,2,*}, член-корреспондент РАН Д. А. Индейцев^{2,3},
Н. В. Можгова³, А. В. Лукин^{3,**}, И. А. Попов³

Поступило 24.08.2022 г.

После доработки 24.08.2022 г.

Принято к публикации 11.10.2022 г.

На основе геометрически нелинейной модели балки Бернулли–Эйлера исследовано влияние амплитуды и формы начальной погиби на характер и устойчивость положений статического равновесия системы в условиях электростатических и тепловых воздействий. С помощью численных методов теории бифуркаций выполнен полный параметрический анализ диаграмм эволюции положений равновесия для балок с начальной погибью по симметричной и несимметричной нижним формам свободных колебаний. Определены области в пространстве параметров величин осевой силы механической или температурной природы и напряженности электростатического поля, в которых упругая система обладает свойством бистабильности. Отмечена перспектива использования рассмотренного класса конструкций с проектируемыми возмущениями геометрии в качестве чувствительных элементов высокоточных микроэлектромеханических сенсоров различных физических величин.

Ключевые слова: МЭМС, балка с начальной погибью, бистабильность, бифуркации положений равновесия

DOI: 10.31857/S268674002301008X, **EDN:** UNMSTC

ВВЕДЕНИЕ

Все большее распространение в современной индустрии наномикроэлектромеханических систем (Н/МЭМС) находит использование существенно нелинейных характеристик проектируемых механических архитектур и принципов генерации колебаний, что позволяет на порядки повысить точность и стабильность измерений для широкого класса датчиков физических величин [1]. Значительный научный и практический интерес представляет изучение статического поведения чувствительных элементов МЭМС с проектируемыми возмущениями геометрии (начальной погибью) при действии полей различной природы. На настоящий момент в большинстве созданных устройств в качестве чувствительного

элемента применяется микробалка с симметричной формой начальной погиби, обладающая свойством бистабильности (существования двух устойчивых положений равновесия при одном значении амплитуды воздействия) при действии постоянного электрического поля в межэлектродном зазоре.

Содержательный обзор ключевых явлений потери упругой устойчивости при появлении несмежных форм равновесия (систем с перескоками) и вопросов применения к этим задачам методов теории бифуркаций приведен в классической монографии Я.Г. Пановко, И.И. Губановой [2]. Математическое моделирование и проектирование механических конструкций рассматриваемого класса требуют использования весьма сложных геометрически и физически нелинейных моделей упругого деформирования континуальных систем. Этой группе вопросов посвящена обширная литература (см., к примеру, [3–11]). Отдельное интенсивно развивающееся направление исследований составляют задачи нелинейной статики и динамики микромеханических конструкций с проектируемыми возмущениями геометрии, действующих в электрических полях различных конфигураций. Значительное число работ посвяще-

¹ Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия

² Институт проблем машиноведения Российской академии наук, Санкт-Петербург, Россия

³ Санкт-Петербургский политехнический университет, Санкт-Петербург, Россия

*E-mail: n.morozov@spbu.ru

**E-mail: lukin_av@spbstu.ru

но изучению вопросов ветвления, бифуркаций, нарушения симметрии положений равновесия и режимов переключения между ними для микробалок с начальной погибью [12–16]. Особенности спектральных и нелинейных динамических характеристик таких конструкций также являются предметом обширной группы исследований [17–21]. Известны работы, посвященные вопросам синтеза алгоритмов управления колебаниями подобных систем и обработки выходных сигналов [22]. Активно развивается направление проектирования микромеханических датчиков с проектируемыми возмущениями геометрии более сложной формы: мембран и пластинок [23–25].

В настоящей работе выполняется параметрический анализ влияния формы (симметричной/несимметричной) начальной погиби балки на ее статическое поведение при электрических и тепловых воздействиях. Обсуждается перспектива использования конструкций с проектируемыми возмущениями геометрии в качестве чувствительных элементов высокоточных микроэлектромеханических сенсоров (в частности, резонансных акселерометров).

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Рассматривается изначально изогнутая микробалка (рис. 1) длины L , заделанная с двух сторон и имеющая прямоугольное поперечное сечение толщиной d и шириной b . Балка изготовлена из однородного изотропного упругого материала с модулем Юнга E . Начальная форма балки описывается функцией $\hat{z}_0(\hat{x}) = \hat{h} \cdot w_0(\hat{x})$, где $\hat{h}$ – начальное отклонение верхней точки балки от средней линии в неискривленном положении и $w_0(\hat{x})$ – безразмерная функция, для которой выполняется условие

$$\max_{\hat{x} \in [0, L]} |w_0(\hat{x})| = 1.$$

Уравнение равновесия системы имеет вид

$$EI(\hat{z}'''' - \hat{z}_0''') = -\frac{1}{2} \frac{\varepsilon b V_{DC}^2}{(g_0 + \hat{z})^2} + \left(N + \frac{EA}{2L} \int_0^L (\hat{z}'^2 - \hat{z}_0'^2) d\hat{x} \right) \hat{z}'', \quad (1)$$

где $\hat{z}(\hat{x})$ – функция прогиба, $I = \frac{bd^3}{12}$ – момент инерции сечения балки, N – распорное усилие, $A = bd$ – площадь поперечного сечения балки, $()'$ – производная по координате $\frac{d}{d\hat{x}}$, ε – относительная диэлектрическая проницаемость среды в зазоре, b – ширина балки, V_{DC} – амплитуда постоянной компоненты напряжения, g_0 – межэлектродный зазор.

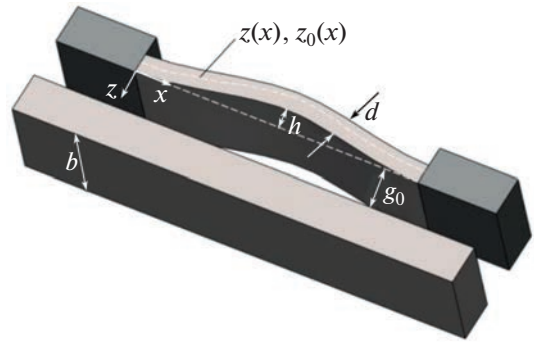


Рис. 1. Начально изогнутая микробалка в поле одного электрода.

Распорное усилие N вызвано тремя факторами:

1) (N_{th}) тепловое воздействие (например, эффект Джоуля–Ленца, возникающий из-за протекающего тока вдоль балки,

$$N_{th} = -\frac{EA}{L} \int_0^L \alpha (T(x) - T_0) dx,$$

где T – распределение температуры в балке, T_0 – начальная температура балки, α – коэффициент температурного расширения),

2) (N_m) инерционная сила (в случае работы микробалки как чувствительного элемента акселерометра при наличии переносных сил инерции),

3) (N_0) механическое усилие, вызванное преднапряженным состоянием балки (может быть как растягивающим, так и сжимающим).

После введения безразмерных параметров

$$z = \frac{\hat{z}}{g_0}, \quad x = \frac{\hat{x}}{L},$$

$$\alpha_1 = 6 \left(\frac{g_0}{d} \right)^2, \quad \alpha_2 = \frac{6\varepsilon L^4}{E g_0^3 d^3},$$

$$N_{non} = \frac{12L^2}{Ebd^3} N, \quad \lambda = \alpha_2 V_{DC}^2,$$

может быть получено уравнение в безразмерном виде:

$$\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} - \frac{\partial^4 z_0}{\partial x^4} = \alpha_1 \int_0^1 (z'^2 - z_0'^2) dx \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + N_{non} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\alpha_2 V_{DC}^2}{(1+z)^2}. \quad (2)$$

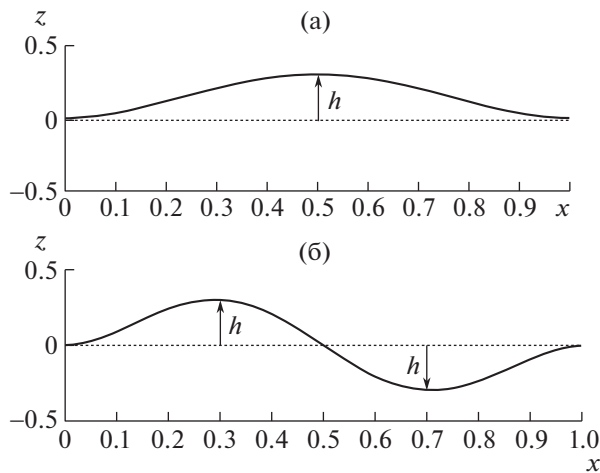


Рис. 2. Форма начальной погиби соответствует первой (а) и второй (б) собственной форме изгибных колебаний балки.

2. ПАРАМЕТРЫ РАССМАТРИВАЕМЫХ МОДЕЛЕЙ

В работе рассмотрены два вида функции начальной погиби — по первой и второй собственным формам (рис. 2).

3. ДИАГРАММЫ СТАТИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ

Для получения модели пониженного порядка применяется метод Бубнова–Галеркина с разложением по собственным формам защемленной с двух концов прямой балки. Уравнения статического равновесия приобретают вид

$$\int_0^1 \phi_j \left(1 - \sum_{l=1}^n C_l \phi_l \right)^2 \left(\sum_{i=1}^n C_i \omega_{non,i}^2 \phi_i \right) dx + \lambda \int_0^1 \phi_j dx - \alpha_1 \int_0^1 \phi_j \left(1 - \sum_{l=1}^n C_l \phi_l \right)^2 \times \times \left[\sum_{i=1}^n C_i \phi_i'' \int_0^1 \left(\sum_{k=1}^n C_k \phi_k \right)^2 dx \right] = 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad (3)$$

где ϕ_i и C_i — собственные формы и модальные коэффициенты, соответственно, $\omega_{non,i}$ — безразмерные собственные частоты. Полученная система алгебраических уравнений относительно коэффициентов C_i решается с помощью методов теории бифуркаций [26]. Подробное описание применяемой методики и численных методов, а также вопросы сходимости разложений приведены, например, в [27, 28].

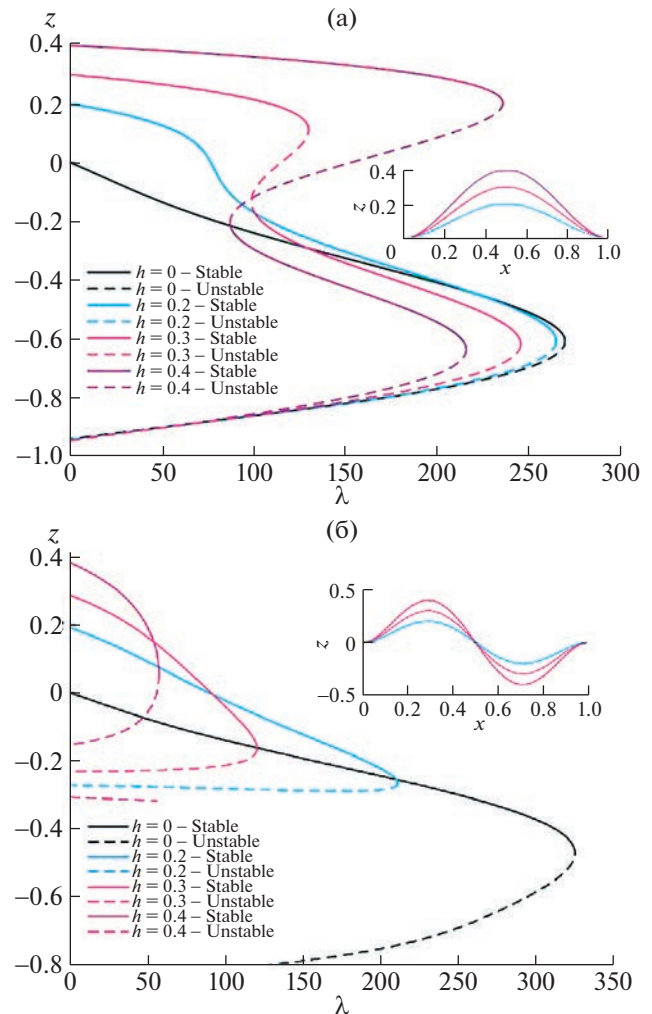


Рис. 3. Диаграмма равновесия для различных значений амплитуды начальной погиби ($\alpha_1 = 96, N_{non} = 0$): а — по первой собственной форме, прогиб в центре балки; б — по второй собственной форме, прогиб в 1/4 длины балки.

Далее представлены результаты исследования влияния амплитуды и формы начальной погиби на вид диаграммы равновесия (рис. 3).

График на рис. 3а наглядно демонстрирует, что не при всех значениях амплитуды начальной погиби по первой собственной форме микробалки в системе будет наблюдаться эффект бистабильности, т.е. наличия двух устойчивых положений равновесия при одном значения параметра λ . При функции начальной погиби, соответствующей второй собственной форме микробалки (рис. 3б), при данных значениях параметров эффекта бистабильности не наблюдается. При этом видна сильная зависимость критического напряжения от величины амплитуды начальной погиби.

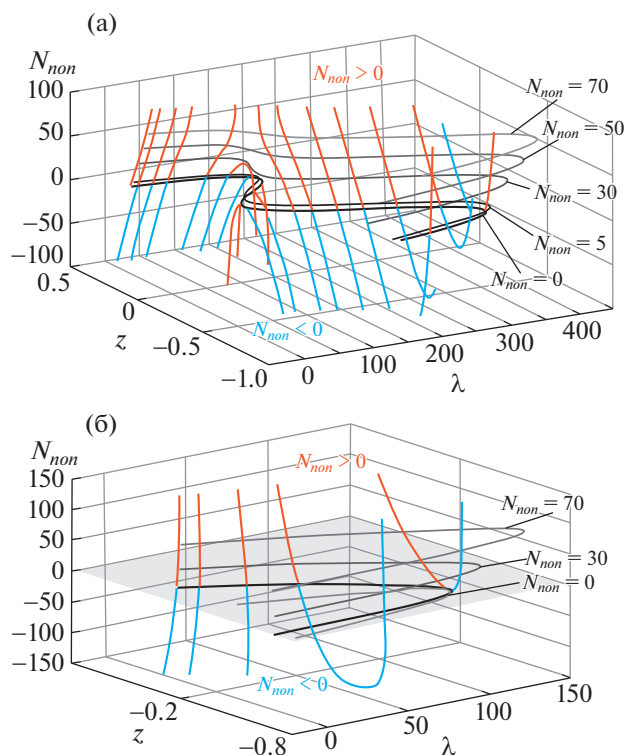


Рис. 4. Диаграмма равновесия в трехмерном пространстве параметров z, N_{non}, λ : а – по первой собственной форме, прогиб в центре балки; б – по второй собственной форме, прогиб в 1/4 длины балки.

Проведено исследование статического поведения системы в зависимости от величины распорного усилия N . График на рис. 4 представляет собой трехмерную диаграмму статического равновесия в пространстве параметров z, N_{non}, λ .

Можно отметить, что влияние осевой силы на поведение системы является значительным. С увеличением значения параметра осевой силы увеличивается и критическое значение параметра электростатической силы, при котором теряется устойчивость системы. В состояниях, близких к неустойчивой ветви, поведение систем с увеличением осевой силы отличается от других устойчивых состояний – они переходят в неустойчивые состояния равновесия. При уменьшении осевой силы поведение системы аналогично.

Представляет интерес график зависимости точек бифуркации типа складка в пространстве параметров осевая сила N – статическое напряжение λ для микробалки, начально изогнутой по первой собственной форме, который изображен на рис. 5.

Линия синего цвета отражает зависимость первой точки бифуркации, при которой микробалка проявляет свойство бистабильности и про-

щелкивается в сторону к электроду в иное устойчивое положение равновесия. Линия черного цвета отражает зависимость второй точки бифуркации, которая является началом второй устойчивой ветви на статической диаграмме прогиб – напряжение. Линия красного цвета отражает зависимость третьей точки бифуркации на статической диаграмме, после которой происходит полная потеря устойчивости и микробалка “прилипает” к неподвижному электроду (“pull-in”). Также на рис. 5 вложенные графики иллюстрируют вид статической диаграммы равновесия при определенном значении параметра осевой силы N . При значениях безразмерной силы $N > 30$ (график синего цвета) на статической диаграмме равновесия будет наблюдаться одна точка бифуркации – система не будет обладать свойством бистабильности, так как положительное значение параметра N соответствует растягивающему усилию, которое приводит к уменьшению амплитуды погиби до нулевого значения. Значение безразмерной силы $N = 30$ (график бордового цвета) соответствует границе, после которой система проявляет свойство бистабильности и имеет три точки бифуркации на статической диаграмме равновесия. Значение безразмерной силы $N \approx -30$ (график фиолетового цвета) соответствует случаю, когда два критических электростатических напряжения (напряжение прощелкивания и напряжение полной потери устойчивости – прилипания) имеют одно и то же числовое значение. В диапазоне значений $N = [-70, -30]$ (график серого цвета) критическое значение напряжения при полной потере устойчивости меньше, чем критическое значение напряжения при прощелкивании. При значениях безразмерной силы $N < -70$ (график зеленого цвета) система формально имеет две точки бифуркации, однако значение напряжения первой точки мало и в действительности система будет терять устойчивость при достижении большего значения напряжения из двух, которое определяется кривой черного цвета на рис. 5. Также стоит отметить, что этому диапазону соответствует большая сжимающая осевая сила, которая увеличивает амплитуду погиби, что приводит к весьма сложному характеру статического поведения такой системы. График, соответствующий статической диаграмме при $N = -200$, демонстрирует наличие статических положений равновесия вблизи нуля, т.е. около прямого положения микробалки, однако эти положения равновесия граничат с зонами неустойчивости.

Микробалка с формой начальной погиби по второй собственной форме не обладает свойством бистабильности, и график зависимости точки бифуркации будет делить плоскость на две

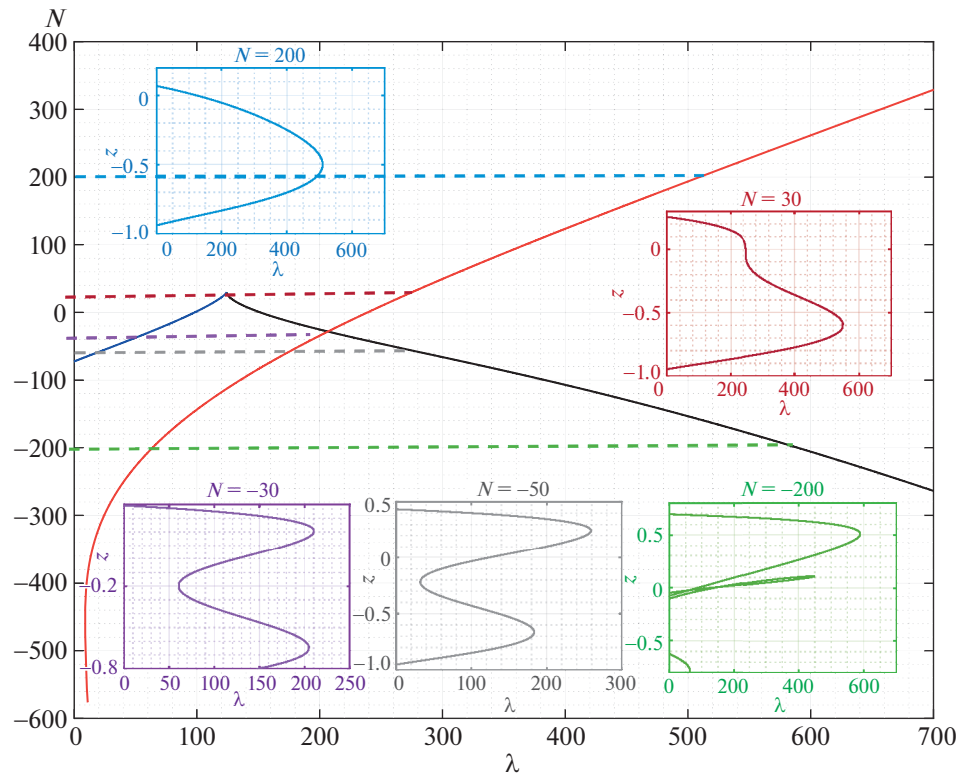


Рис. 5. Зависимость точек бифуркации типа складка в пространстве параметров $N - \lambda$ ($\alpha_1 = 96$), начальная погибь по первой собственной форме.

части — области устойчивых и неустойчивых положений равновесия.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе выполнено параметрическое исследование нелинейной задачи статики для изначально искривленной микробалки при электрических и тепловых воздействиях. Изучен фактор формы начальной погиби микробалки. Показано, что при несимметричной форме начальной погиби микробалка не обладает свойством бистабильности. При симметричной форме начальной погиби получена зависимость точек бифуркации типа складка в пространстве параметров электростатическое напряжение — распорное усилие. В результате анализа данной зависимости сделан вывод о том, что микробалка с симметричной начальной погибью обладает свойством бистабильности в относительно небольшом интервале значений распорного усилия вблизи нуля — $[-50, 30]$ безразмерных единиц. Положительное осевое усилие большей амплитуды приводит к уменьшению амплитуды погиби балки до нуля и, как следствие, вырождению бифуркационной диаграммы в традиционную диаграмму ветвления для прямой микробалки с одним критическим значением напряжения. В об-

ласти больших сжимающих осевых усилий статическое поведение такой системы имеет сложный характер. Результаты исследования показывают помимо начальной устойчивой конфигурации наличие статических положений равновесия вблизи нуля, т.е. около прямого положения микробалки, однако эти положения равновесия граничат с зонами неустойчивости. Выполненный параметрический анализ диаграмм эволюции форм равновесия микробалок с начальной погибью открывает путь к разработке микромасштабных сенсоров предельных значений различных физических величин, основанных на принципе детектирования критических состояний упругой системы, связанных с переходом в несмежные положения равновесия.

Стоит отметить, что на основе полученных результатов решения задачи статики может быть исследована задача о малых колебаниях около найденных положений равновесия. Изучение уникальных спектральных (модальных и резонансных) свойств микромеханических систем с проектируемыми возмущениями геометрии (в первую очередь микробалок) представляет значительный научный и практический интерес с точки зрения использования этих свойств для высокоточных измерений. Механические системы с начальной погибью могут быть использованы, в частности, в

качестве чувствительных элементов модально-локализованных акселерометров, принципом действия которых является влияние измеряемой компоненты ускорения на вид собственной формы колебаний системы [29, 30]. В литературе известны результаты исследования эффекта модальной локализации колебаний между симметричной и несимметричной формами колебаний балки с начальной погибью при возбуждении колебаний несимметричным электростатическим полем. Предмет дальнейших работ составляет исследование влияния формы начальной погиби микробалки на ее спектральные характеристики.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 20-01-00537.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Amal Hajjaj et al.* Linear and nonlinear dynamics of micro and nano-resonators: Review of recent advances // Intern. J. of Non-Linear Mechanics. 2019. Oct. 119.
2. *Пановко Я.Г., Губанова И.И.* Устойчивость и колебания упругих систем. URSS, 2006.
3. *Giuseppe Rega, Walter Lacarbonara, Ali Nayfeh.* Reduction Methods for Nonlinear Vibrations of Spatially Continuous Systems with Initial Curvature. Jan. 2000. P. 235–246.
4. *Cao D.Q., Liu Dongsheng, Wang Charles.* Nonlinear dynamic modelling for MEMS components via the Cosserat rod element approach // J. of Micromechanics and Microengineering. 2005. June. 15. P. 1334.
5. *Walter Lacarbonara, Hiroshi Yabuno.* Refined models of elastic beams undergoing large in-plane motions: Theory and experiment // Intern. J. of Solids and Structures. 2005. Oct. 43.
6. *Narakorn Srinil, Giuseppe Rega, Somchai Chucheepsakul.* Two-to-one resonant multi-modal dynamics of horizontal / inclined cables. Pt I. Theoretical formulation and model validation // Nonlinear Dynamics. 2007. May. 48. P. 231–252.
7. *Cao D.Q., Tucker Robin.* Nonlinear dynamics of elastic rods using the Cosserat theory: Modelling and simulation // International Journal of Solids and Structures. 2008. Jan. 45. P. 460–477.
8. *Luo A.C.J.* On a nonlinear theory of thin rods // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2010. Feb. 15.
9. *Nicholas Vljajic et al.* Geometrically exact planar beams with initial pre-stress and large curvature: Static configurations, natural frequencies, and mode shapes // Intern. J. of Solids and Structures. 2014. Oct. 51. P. 3361–3371.
10. *Yang Zhou, Zhuangpeng Yi, Ilinca Stanciulescu.* Nonlinear Buckling and Postbuckling of Shallow Arches With Vertical Elastic Supports // J. of Applied Mechanics. 2019. Feb. 86. P. 1.
11. *Samir Emam, Walter Lacarbonara.* Buckling and post-buckling of extensible, shear-deformable beams: Some exact solutions and new insights // Intern. J. of Non-Linear Mechanics. 2021. Jan. 129. P. 103667.
12. *Medina Lior, Gilat Rivka, Krylov Slava.* Symmetry breaking in an initially curved micro beam loaded by a distributed electrostatic force // Intern. J. of Solids and Structures. 2012. June. 49. P. 1864–1876.
13. *Medina Lior, Gilat Rivka, Krylov Slava.* Symmetry breaking in an initially curved pre-stressed micro beam loaded by a distributed electrostatic force // Intern. J. of Solids and Structures. 2014. Feb. 51. P. 2047.
14. *Milad Shojaeian, Yaghoub Tadi Beni, Hossein Ataei.* Size-dependent snap-through and pull-in instabilities of initially curved pre-stressed electrostatic nano-bridges // J. of Physics D: Applied Physics. 2016. June. 49.
15. *Medina Lior, Seshia Ashwin.* Bistability and simultaneous mode actuation in electrostatically actuated initially curved coupled micro beams // Intern. J. of Non-Linear Mechanics. 2020. July. 126. P. 103549.
16. *Medina Lior et al.* Single Electrode Bidirectional Switching of Latchable Prestressed Bistable Micromechanical Beams // IEEE Sensors Journal. 2021. Aug. PP. P. 1–1.
17. *Walter Lacarbonara, Haider Arafat, Ali Nayfeh.* Non-linear interactions in imperfect beams at veering // Intern. J. of Non-Linear Mechanics. 2005. Sept. 40. P. 987–1003.
18. *Amal Hajjaj, Nouha Alcheikh, Mohammad Younis.* The static and dynamic behavior of MEMS arch resonators near veering and the impact of initial shapes // Intern. J. of Non-Linear Mechanics. 2017. July. 95.
19. *Mergen Ghayesh, Hamed Farokhi.* Bistable nonlinear response of MEMS resonators // Nonlinear Dynamics. 2017. Nov. 90.
20. *Amal Hajjaj et al.* Theoretical and experimental investigations of the crossover phenomenon in micromachined arch resonator. Pt I. Linear problem // Nonlinear Dynamics/ 2020. Jan.
21. *Amal Hajjaj et al.* Theoretical and experimental investigations of the crossover phenomenon in micromachined arch resonator. Pt II. Simultaneous 1:1 and 2:1 internal resonances // Nonlinear Dynamics. 2020. Jan. 99.
22. *Medina Lior et al.* Open Loop, Self-Excitation in a Bistable Micromechanical Beam Actuated By a DC Electrostatic Load. 2017. Jan.
23. *Medina Lior, Gilat Rivka, Krylov Slava.* Bistable behavior of electrostatically actuated initially curved micro plate // Sensors and Actuators A: Physical. 2016. July. 248.
24. *Shahid Saghir, Mohammad Younis.* An investigation of the mechanical behavior of initially curved microplates under electrostatic actuation // Acta Mechanica. 2018. July. 229.
25. *Mergen Ghayesh, Hamed Farokhi.* Nonlinear behaviour of electrically actuated microplate-based MEMS resonators // Mechanical Systems and Signal Processing. 2018. Sept. 109. P. 220–234.
26. *Dhooge Annick, Govaerts Willy, Kuznetsov Yu.A.* MATCONT: a MATLAB package for numerical bifurcation analysis of ODEs // ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS). 2003. 29.2. P. 141–164.

27. Лукин А.В., Попов И.А., Скубов Д.Ю. Нелинейная динамика и устойчивость элементов микросистемной техники // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2017. № 17 (6). С. 1107–1115.
28. Лукин А.В., Морозов Н.Ф., Индейцев Д.А., Попов И.А., Привалова О.В., Штукин Л.В. Устойчивость балки Бернулли–Эйлера в связанных электрических и тепловых полях // ДАН. 2018. Т. 481. № 6. С. 619–624.
29. Морозов Н.Ф., Индейцев Д.А., Игумнова В.С., Лукин А.В., Попов И.А., Штукин Л.В. Нелинейная динамика МЭМС-акселерометра с балочными чувствительными элементами, основанного на явлении модальной локализации // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2021. № 8.2. С. 233–246.
30. Морозов Н.Ф., Индейцев Д.А., Игумнова В.С., Беляев Я.В., Лукин А.В., Попов И.А., Штукин Л.В. Модель микромеханического акселерометра, основанного на явлении модальной локализации // Доклады РАН. Физика, технические науки. 2020. Т. 494. № 1. С. 51–56.

EQUILIBRIUM FORMS OF AN INITIALLY CURVED BERNOULLI–EULER BEAM IN ELECTRIC AND THERMAL FIELDS

Academician of the RAS N. F. Morozov^{a,b}, Corresponding Member of the RAS D. A. Indeitsev^{b,c},
N. V. Mozhgova^c, A. V. Lukin^c, and I. A. Popov^c

^a Saint-Petersburg State University, Saint Petersburg, Russia

^b Institute for Problems in Mechanical Engineering of Russian Academy of Sciences, Saint Petersburg, Russia

^c Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, Saint Petersburg, Russia

On the basis of a geometrically nonlinear model of a Bernoulli-Euler beam, the influence of the amplitude and shape of the initial curvature on the nature and stability of the static equilibrium positions of the system under conditions of electrostatic and thermal effects has been studied. With the help of numerical methods of the theory of bifurcations, a complete parametric analysis of the diagrams of evolution of equilibrium positions for beams with initial curvature in terms of symmetric and asymmetric lower modes of free vibrations is performed. The regions in the parameter space of the values of the axial force of a mechanical or temperature nature and the strength of the electrostatic field, in which the elastic system has the property of bistability, are determined. The prospect of using the considered class of structures with projected geometry perturbations as sensitive elements of high-precision microelectromechanical sensors of various physical quantities is noted.

Keywords: MEMS, initially curved beams, bistability, bifurcations of the equilibrium positions