

ISSN 2686-7400

Том 515

Март–Апрель 2024



ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. ФИЗИКА, ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ



НАУКА

— 1727 —

СОДЕРЖАНИЕ

Том 515, 2024

ФИЗИКА

- Анализ процессов, сопровождающих цилиндрическую кумуляцию
С. Н. Буравова, А. Ф. Беликова, Н. И. Мухина, В. О. Копытский, Е. В. Петров, М. И. Алымов 5
- Уравнения состояния реголита и хондрита при высоких давлениях
И. В. Ломоносов 9
- Универсальность спектра многотерминального джозефсоновского контакта
А. Ф. Посадский, А. Г. Семенов, П. И. Арсеев 13
- Лазерно-индуцированная абляция и десорбция вольфрамовых пленок, насыщенных дейтерием
Е. В. Смирнова, О. С. Медведев, А. Г. Раздобарин, Д. И. Елец, Л. А. Снигирев, Я. Р. Шубин 19
- Акустически индуцированная прозрачность для гамма-фотонов и некоторые ее применения
И. Р. Хайрулин, Е. В. Радионычев 27
-

МЕХАНИКА

- Точные решения и границы изменения коэффициентов теплопроводности в дисперсных средах
Б. В. Бошнятов 35
- Обобщенный принцип Бренье и проблема замыкания иерархии Ландгрена–Монина–Новикова для поля вихря
В. Н. Гребенёв, А. Н. Гришков 43
- О модальной локализации параметрических колебаний в системе слабосвязанных микробалочных резонаторов при электротепловом возбуждении
Н. В. Пискун, А. В. Лукин, И. А. Попов, Л. В. Штукин 51
- Математический критерий образования криопэггов в процессе промерзания пород, насыщенных раствором соли
М. М. Рамазанов, Н. С. Булгакова, Л. И. Лобковский 59
-

ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ

- Исследование скорости деградации волоконного световода в медном покрытии
М. И. Булатов, Н. С. Григорьев, А. В. Фофанов, А. Ф. Косолапов, С. Л. Семенов 67

Фазовые превращения при отпуске низколегированной стали с 1.6%Si	
<i>В. А. Дудко, Д. Ю. Юзбекова, М. Н. Ерохин, С. М. Гайдар, Р. О. Кайбышев</i>	74
Голографический метод локализации шумового подводного источника в мелководной акватории	
<i>В. М. Кузькин, Ю. В. Матвиенко, С. А. Пересёлков, Ю. А. Хворостов</i>	80
Оценка протяженности областей водоподобного дна на акустических трассах в мелком море	
<i>Д. Д. Сидоров, С. Д. Боджона, В. Г. Петников, А. А. Луньков</i>	85

CONTENTS

Volume 515, 2024

PHYSICS

- Analysis of Processes Accompanying Cylindrical Cumulation
S. N. Buravova, A. F. Belikova, N. I. Mukhina, V. O. Kopytskiy, E. V. Petrov, M. I. Alymov 5
- Equations of State for Regolith and Chondrite at High Pressure
I. V. Lomonosov 9
- Universality of the Spectra of Multiterminal Josephson Junction
A. F. Posadskii, A. G. Semenov, P. I. Arseev 13
- Laser-Induced Ablation and Desorption of Deuterium-Containing Tungsten Films
E. V. Smirnova, O. S. Medvedev, A. G. Razdobarin, D. I. Elets, L. A. Snigirev, I. R. Shubin 19
- Acoustically Induced Transparency for Gamma-Ray Photons and Some of Its Applications
I. R. Khairulin, Y. V. Radeonychev 27
-

MECHANICS

- Exact Solutions and Bounds for the Thermal Conductivity Coefficient of a Dispersed Medium
B. V. Boshenyatov 35
- Generalized Brenier Principle and the Closure Problem
of Landgren–Monin–Novikov Hierarchy for Vorticity Field
V. N. Grebenev, A. N. Grishkov 43
- Symmetry Breaking and Modal Localization in a System of Parametrically
Excited Microbeam Resonators
N. V. Piskun, A. V. Lukin, I. A. Popov, L. V. Shtukin 51
- Mathematical Criterion for the Formation of Cryopags during the Freezing of Rocks Saturated
with Salt Solution
M. M. Ramazanov, N. S. Bulgakova, L. I. Lobkovsky 59
-

TECHNICAL SCIENCES

- Study of Degradation of Optical Fiber in Copper Coating
M. I. Bulatov, N. S. Grigoryev, A. V. Fofanov, A. F. Kosolapov, S. L. Semjonov 67

Effect of Tempering on Phase Transformations in Low-Alloy Steel with 1.6%Si	
<i>V. A. Dudko, D. Y. Yuzbekova, M. N. Erokhin, S. M. Gaidar, R. O. Kaibyshev</i>	74
Holographic Method of Localization of Underwater Noise Source in Shallow Water	
<i>V. M. Kuz'kin, Yu. V. Matvienko, S. A. Pereselkov, Yu. A. Khvorostov</i>	80
Estimation of Water-Like Bottom Length along an Acoustic Track in Shallow Water	
<i>D. D. Sidorov, S. D. Bodjona, V. G. Petnikov, A. A. Lunkov</i>	85

УДК 623.4.082.6

АНАЛИЗ ПРОЦЕССОВ, СОПРОВОЖДАЮЩИХ ЦИЛИНДРИЧЕСКУЮ КУМУЛЯЦИЮ

© 2024 г. С. Н. Буравова^{1,*}, А. Ф. Беликова¹, Н. И. Мухина¹, В. О. Копытский¹,
Е. В. Петров¹, член-корреспондент РАН М. И. Алымов¹

Поступило 24.10.2023 г.

После доработки 24.10.2023 г.

Принято к публикации 12.02.2024 г.

Сужение потока в цилиндрических образцах является причиной неустойчивости движения, проявляющегося в образовании окружного напряжения сжатия, в результате которого на фронте ударной волны возникают возмущения в виде маховских трехударных конфигураций (выступов). Площадь фронта возмущенной ударной волны растет за счет выступов, которые усиливаются в результате поглощения более мелких возмущений, постоянно генерируемых на фронте ударной волны. Резкий рост площади фронта на завершающей стадии сопровождается образованием нескольких крупных выступов, которые делят фронт ударной волны на отдельные сектора, где совершают колебательные движения. При столкновении встречных конфигураций возникающая зона высокого давления “выносит” часть сжатого материала из-под фронта вперед. Процесс кумуляции завершается, когда высота выступов становится равной расстоянию фронта до оси. Околоосевое пространство занимает выступами фронта, а возникшая при этом отраженная ударная волна тормозит набегающий поток.

Ключевые слова: цилиндрическая кумуляция, неустойчивость, маховская ударная конфигурация, ударная волна, полосы локализованного сдвига, волна разгрузки

DOI: 10.31857/S2686740024020017, **EDN:** KIDOPS

Решение автомодельной задачи о схождении сферических и цилиндрических ударных волн в работах [1, 2] показывает неограниченный рост скорости и давления при фокусировке ударных волн. Учет сжимаемости материала [3] результата не изменил. Анализ теоретических работ [4] показал, что диссипация энергии (вязкость, теплопроводность) не приводит к ограничению кумуляции. Однако экспериментальное изучение кумулятивных процессов показало, что достичь бесконечно больших величин энергии не удастся. Как отмечает автор работы [4], в процессе кумуляции возникают физические процессы, которые ограничивают рост давления, и неясно, как протекает

дальнейший процесс кумуляции в режиме неустойчивости. В работе [5] приведен обзор экспериментальных исследований и показано, что реакция материала на действия импульсной нагрузки при потере устойчивости движения проявляется в образовании на поверхностях цилиндрических образцов волнистого рельефа с наличием выступов и впадин. Установлено также, что упругопластическая модель поведения материала, не учитывающая вязкость, не может отразить все особенности реакции материала. Невыполнение закона подобия для инерционного движения оболочек обнаружено в работе [6]. Потеря устойчивости конической облицовки в процессе формирования кумулятивной струи приводит к появлению сложной внутренней структуры как струи, так и песта, что делает необходимым уточнение картины течения металла в рамках модели идеальной несжимаемой жидкости [7].

¹Институт структурной макрокинетики и проблем материаловедения им. А.Г. Мерджанова
Российской академии наук,
Черноголовка, Московская обл., Россия
*E-mail: svburavova@yandex.ru

Анализ литературных данных свидетельствует, что, несмотря на высокий уровень экспериментальных исследований, процессы, происходящие в непосредственной близости от оси симметрии цилиндрического образца, в литературе не освещены и остаются неясными, область около центра образца из рассмотрения исключается. В данной работе предпринята попытка оценить давление на оси симметрии и показать физические процессы, которые ограничивают рост давления.

ЦИЛИНДРИЧЕСКАЯ КУМУЛЯЦИЯ

В работе рассматривается одномерное осесимметричное движение, массовая скорость которого подчиняется закону

$$u = u_0 \sqrt{\frac{R_0}{R}},$$

где R_0 – начальный радиус цилиндрического образца, R – положение фронта ударной волны. Факт потери устойчивости движения принято определять по образованию складок на поверхности твердого тела. Цилиндрический образец имеет одну поверхность, но на ней размещается слой взрывчатого вещества (аммонит 6ЖВ, гексоген насыпной плотности), скользящая детонация которого создает ударную волну в образце. На рис. 1 представлен шлиф толстостенного стального цилиндра (диаметр 20 мм) с внутренней полостью (диаметр 6 мм), поверхность которой может отслеживать форму ударной волны после ее выхода на поверхность. Наличие складок и впадин свидетельствует, что ударная волна при сходимости к оси потеряла устойчивость – на ее фронте появились возмущения в виде выступов.

Как следует из рис. 1, выход возмущенной ударной волны на свободную поверхность сопровождается повреждаемостью поверхностного слоя. При формировании складок рельефа они являются источниками волн разгрузки. Интерференция волн разгрузки с двух ближайших складок рельефа приводит к образованию откольных трещин, которые перерастают в полосы локализованной деформации, когда растягивающие напряжения становятся меньше откольной прочности. Рисунок является доказательством откольной природы образования

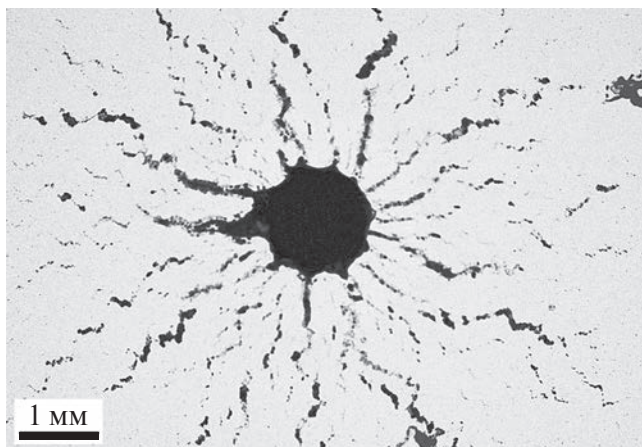


Рис. 1. Макроструктура поперечного сечения поллого цилиндра после обжатия детонационной волной.

полос локализованной деформации [8, 9]. Заметим, что макроструктура на рис. 1 не зависит от материала образца и характерна для всех его видов. Медь и фторопласт образуют схожую систему трещин вблизи центральной части образца [10].

В литературе нет общепризнанного названия «выпучивания» на поверхности твердого тела как признака потери устойчивости движения – это морщины, волны в окружном направлении, складки, изгибные формы деформации, характерные структурные элементы деформации, волны и просто выступы. В данном сообщении возмущение поверхности образца будем называть «складками». Что представляют собой возмущения на фронте ударной волны, которые формируют складки при выходе волны на свободную поверхность? В этом помогут разобраться возмущения на ударном фронте детонационной волны с неоднородной структурой.

Первое взрывчатое вещество с такой структурой детонационного фронта – это смеси нитрометана с ацетоном [11]. Эксперименты по созданию искусственного возмущения на ударном фронте показали, что возмущение представляет собой маховскую (тройную ударную) конфигурацию: косая ударная волна – она же маховская волна; продольная ударной волны – продолжение косой волны в сжатом веществе и сам фронт ударной волны, по которому распространяется возмущение. Следует обратить внимание на неразрывную взаимосвязь возмущения с ударно сжатым веществом: продольная ударная волна является «корнем» маховской конфигурации.

Именно продольная волна переводит плоское движение потока в радиальное движение.

$$\frac{r_i}{R_0} = \left(\frac{u_0}{U_i} \right)^2$$

Сложность описания кумуляции состоит в определении параметров возмущенной ударной волны. Считаем, что на каждом небольшом интервале радиуса возмущенная волна движется с постоянным давлением p_i (как за плоским фронтом). Однако за фронтом осесимметричной ударной волны законы сохранения требуют рост давления P_i . Разность давлений $\Delta P_i = P_i - p_i$ на i -м интервале характеризует возмущение ударной волны из-за принудительного сужения потока, которое является причиной потери устойчивости. Возникновение окружного напряжения сжатия при сужении потока приводит к образованию маховских ударных конфигураций. Эта разность давлений состоит из двух составляющих – давления, которое характеризует маховскую ударную волну, и увеличения давления возмущенной ударной волны за счет сужения потока. Обнаруженная устойчивость движения оболочек больших размеров в начальный момент [6] означает, что существует окружное напряжение сжатия, которое справляется с сужением потока, поджимает ударно-сжатый материал, сохраняя фронт ударной волны гладким. Поскольку величина порогового окружного напряжения неизвестна и учесть его не представляется возможным, предполагаем, что половина разности DP идет на увеличение давления за фронтом возмущенной ударной волны, а другая половина – на создание маховских конфигураций.

Тогда $p_i = \frac{P_i + P_{i-1}}{2}$ – давление возмущенной ударной волны, $\sigma_i = \frac{\Delta_i}{2} = \frac{P_i - P_{i-1}}{2}$ – окружное напряжение сжатия.

Наличие выступов на фронте ударной волны увеличивает его площадь. Чтобы найти истинную площадь фронта возмущенной ударной волны, следует его “расправить”, для этого необходимо определить массовую скорость гладкой ударной волны U_i , давление которой равно давлению возмущенной p_i :

$$U_i^2 + \frac{c_0}{b} U_i - \frac{p_i}{\rho_0 b} = 0,$$

где ρ_0 – плотность, c_0 и b – параметры адиабаты металла. Подстановка U_i в уравнение

определяет положение гладкой ударной волны r_i с давлением p_i . Разность $2\pi(r_i - R_i)$ характеризует увеличение площади поверхности фронта на i -м интервале, а общая площадь всех выступов на фронте ударной волны равна

$$S_i = 2\pi \sum_1^i (r_i - R_i).$$

Высота тройных ударных конфигураций зависит от числа сформовавшихся крупных выступов. На приведенном рис. 1 количество выступов составляет $N = 9$. Предполагая, что форма гофрированного возмущения – полуцилиндр с площадью поверхности $s_i = \pi h_i$, средняя высота выступов на фронте h_i определяется выражением:

$$h_i = 2 \sum_1^i \frac{(r_i - R_i)}{N}.$$

Начальная стадия кумулятивного процесса характеризуется множеством выступов на фронте ударной волны, их рост идет за счет поглощения более мелких маховских конфигураций, постоянно возникающих за счет сужения потока.

При приближении фронта ударной волны к оси происходит резкий рост его площади и высоты выступов, происходит смена механизма взаимодействия возмущений с фронтом ударной волны. На завершающейся стадии кумуляции формируются несколько крупных выступов, которые делят фронт ударной волны на отдельные сектора, где они совершают колебательные движения. При столкновении тройных ударных конфигураций ее продольные волны дополнительно поджимают под фронтом ударно сжатый материал, а высокое давление в зоне столкновения “забрасывает” часть ударно сжатого материала вперед, перед фронтом ударной волны. Однако ударная волна не может дойти до оси симметрии. Как только высота ее выступов становится равной оставшемуся расстоянию до оси, околоосевое пространство занимает ее собственными выступами. Отраженная волна, возникшая от соударения выступов, останавливает набегающий поток. На этом процесс кумуляции завершается.

В заключение следует отметить, что в рамках предложенной модели цилиндрической кумуляции не удается теоретически определить число маховских конфигураций на конечном этапе. Кумулятивные процессы относятся к задачам параметрического резонанса и требуют нового подхода.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Guderley G.V.* Starke kugelige und zylindrische Verdichtungsstöße in der Nähe des Kugelmitelpunktes bzw. der Zylinderachse // *Luftfahrt-forschung*. 1942. V. 19. Iss. 9. P. 302–312.
2. *Станюкович К.П.* Неустановившиеся движения сплошной среды. М.: Госиздат технико-теоретической литературы, 1955. 804 с.
3. *Брушлинский К.В., Каждан Я.М.* Об автомодельных решениях некоторых задач газовой динамики // *УМН*. 1963. Т. 18. № 2. С. 3–22.
4. *Забабахин Е.И.* Явления неограниченной кумуляции // *Сб. Механика в СССР за 50 лет. Т. 2. Механика жидкости и газа*. М.: Наука, 1970. 880 с.
5. *Огородников В.А.* Вязкость и ее роль в динамических процессах. Монография. Саров: ФГУП “РФЯЦ – ВНИИЭФ”, 2012. 239 с.
6. *Зельдович В.И., Фролова Н.Ю., Хейфец А.Э., Хомская И.В., Дегтярев А.А., Шорохов У.В., Смирнов У.Б., Долгих С.М., Коваль А.В.* Деформационные явления при схождении металлических цилиндрических оболочек. Потеря устойчивости // *ФГВ*. 2019. Т. 55. № 4. С. 92102. <https://doi.org/10.15372/FGV20190412>
7. *Пай В.В., Титов В.М., Лукьянов Я.Л., Пластинин А.В.* Исследование неустойчивости конической облицовки в процессе формирования кумулятивной струи // *ФГВ*. 2019. Т. 55. № 4. С. 69–73. <https://doi.org/10.15372/FGV20190409>
8. *Беликова А.Ф., Буравова С.Н., Гордополов Ю.А.* Локализация деформации и связь ее с деформированным состоянием материала // *ЖТФ*. 2013. Т. 83. № 2. С. 153–155.
9. *Буравова С.Н.* Этюды на тему локализации динамической деформации. Saarbrücken: Palmarium Academic Publishing, 2014. 140 с.
10. *Нестеренко В.Ф., Бондарь М.П.* Локализация деформации при схлопывании толстостенного цилиндра // *ФГВ*. 1994. Т. 36. № 4. С. 99–111.
11. *Буравова С.Н.* Исследование структуры фронта детонационной волны в смеси нитрометана с ацетоном // *ПМТФ*. 2012. Т. 53. № 5. С. 312.

ANALYSIS OF PROCESSES ACCOMPANYING CYLINDRICAL CUMULATION

S. N. Buravova^a, A. F. Belikova^a, N. I. Mukhina^a, V. O. Kopytskiy^a, E. V. Petrov^a,
Corresponding Member of the RAS M. I. Alymov^a

^a*Merzhanov Institute of Structural Macrokinetics and Materials Science of the Russian Academy of Sciences, Chernogolovka, Moscow Region, Russia*

Flow contraction within cylindrical samples causes instability in motion, leading to the formation of circumferential compression stress. This then results in perturbations in the form of Mach three-shock configurations (protrusions) at the shock front. The area at the front of the perturbed shock wave increases due to these protrusions. Furthermore, the protrusions are amplified as a consequence of the absorption of smaller perturbations, which are continuously generated at the shock front. The shock front undergoes sharp growth at the final stage, giving rise to several large protrusions that divide it into separate sectors. These sectors undergo oscillatory movements. As the counter configurations collide, a high-pressure zone is generated, which propels some of the compressed material forward. The protrusions reach their maximum height when they become equal to the distance of the front to the axis. The near-axis region is taken up by the frontal protrusions, and the consequent rarefaction shock wave decelerates the incoming flow.

Keywords: cylindrical cumulation, instability, Mach shock configuration, shock wave, localized shear bands, unloading wave

УДК 536.71

УРАВНЕНИЯ СОСТОЯНИЯ РЕГОЛИТА И ХОНДРИТА
ПРИ ВЫСОКИХ ДАВЛЕНИЯХ© 2024 г. Член-корреспондент РАН И. В. Ломоносов^{1,*}

Поступило 14.12.2023 г.

После доработки 14.12.2023 г.

Принято к публикации 25.12.2023 г.

С использованием принципа аддитивности при ударном сжатии построены широкодиапазонные уравнения состояния реголита и обыкновенного хондрита для области высоких давлений.

Ключевые слова: уравнение состояния, высокие давления, реголит, хондрит

DOI: 10.31857/S2686740024020023, EDN: KIBPDE

Фундаментальные вопросы образования, структуры, динамики и эволюции объектов Солнечной системы [1, 2] требуют знания уравнения состояния (УРС) вещества при высоких давлениях [3]. УРС также необходимо для проведения численного моделирования различных высокоэнергетических процессов в космосе. К их числу следует отнести процессы ударного воздействия различного масштаба, как, например, прохождения космического аппарата через кометное облако в проекте “Венера–Галлей” [4], столкновения металлического ударника с ядром кометы Tempel 1 [5], эксперимент LCROSS по поиску водяного льда на южном полюсе Луны [6], проблемы столкновения кометы Шумейкера–Леви с Юпитером [7, 8], а также задачи астероидной опасности и защиты от космического мусора. Данные обстоятельства мотивируют разработку УРС таких веществ, как реголит, составляющий материал поверхности Луны [9, 10], и обыкновенный хондрит, основной материал метеоритов [11].

Современное состояние проблемы УРС вещества, методы экспериментальных исследований и теоретические подходы изложены в монографиях [3, 12] и публикациях [13].

В практике построения УРС вещества для широкой области фазовой диаграммы максимально используются результаты теоретических расчетов и имеющийся массив разнородных экспериментальных данных [3, 13].

Согласно данным исследований, поверхность Луны представляет собой структуру сложного физико-химического состава [9, 10]. Доставленные лунными экспедициями образцы реголита имеют среднюю плотность 1.2 г/см³, пористость до 50% и состоят из частиц спекшейся и разрушенной породы. Отдельные фрагменты грунта, камни имеют плотность от 1.3 до 1.8 г/см³ и близкий химический состав, который в среднем можно оценить как SiO₂ – 40–45%, FeO – 20%, Al₂O₃ – 12%, CaO – 10% (массовые проценты). Свойства реального лунного грунта исследованы методом ударного сжатия в работе [14], где получены аппроксимационные соотношения $D = a + bU$ (D – скорость фронта ударной волны, U – массовая скорость вещества за фронтом) для ударных адиабат фаз низкого и высокого давлений, соответственно: $\rho_{00} = 1.8$ г/см³, $a = 0.1$ км/с, $b = 1.3$ при $0.68 < U < 1.02$ км/с и $a = -1.01$ км/с, $b = 2.39$ при $0.99 < U < 1.83$ км/с. Рисунок 1 иллюстрирует ударные адиабаты фаз низкого и высокого давления реголита [14] в кинематических переменных волновая – массовая скорость ударной волны. Рассмотрение зависимостей [14] давления от плотности показывает аномальность сжатия – при увеличении давления плотность уменьшается. Данная

¹Федеральный исследовательский центр проблем химической физики и медицинской химии Российской академии наук, Черноголовка, Московская обл., Россия
*E-mail: ivl143@fcr.ac.ru

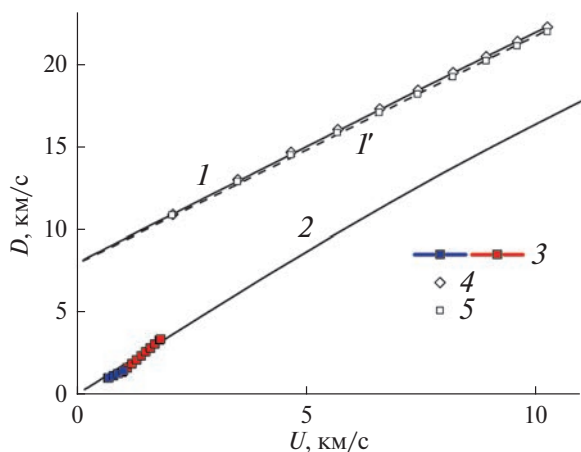


Рис. 1. Ударные адиабаты реголита и хондрита. Обозначения: линии 1 и 1' – расчет по УРС фаз высокого давления реголита и хондрита, 2 – реголит начальной плотности $\rho_{00} = 1.8 \text{ г/см}^3$; точки 3 – данные измерений [14], 4 и 5 – расчет смесевых ударных адиабат реголита и хондрита соответственно по правилу аддитивности.

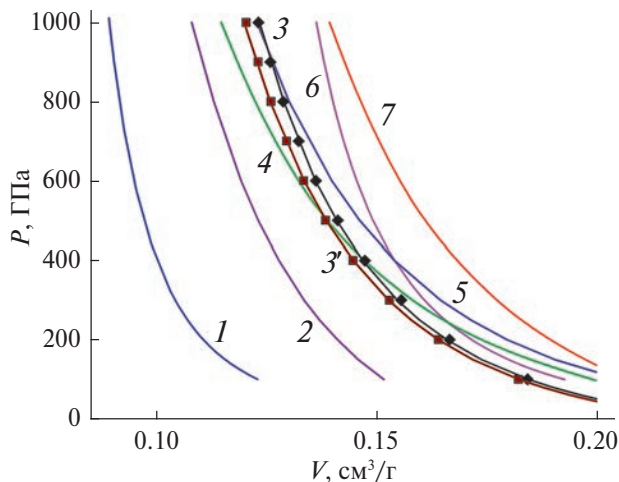


Рис. 2. Ударные адиабаты реголита, хондрита и порообразующих оксидов. Обозначения: сплошные линии – расчет по УРС [17, 18], 1 – вюстит FeO, 2 – рутил TiO₂, 3 и 3' – реголит и хондрит (точки – смесевая ударная адиабата), 4 – корунд Al₂O₃, 5 – периклаз MgO, 6 – известь CaO, 7 – стишовит SiO₂.

особенность типична для случая ударного сжатия пористого вещества [2]. Использование аппроксимаций [14] в УРС лунного грунта допустимо при проведении численного моделирования высокоскоростного удара по реголиту указанной начальной плотности при давлениях до 10 ГПа.

В более общем случае необходимо использовать реалистичное УРС. Сложность задачи заключается в отсутствии экспериментальных данных о свойствах реголита при высоких давлениях более 100 ГПа и практической невозможности описания материала столь сложных структуры и состава с применением современных первопринципных методов. В подобной ситуации целесообразно основываться на имеющейся при высоких давлениях информации о свойствах основных оксидов, образующих реголит.

Знание ударных адиабат компонент реголита позволяет рассчитать его смесевую ударную адиабату. Согласно принципу аддитивности, в случае ударного сжатия для давления P_H на ударной адиабате удельный объем вещества, состоящего из N компонент, представляется выражением:

$$V = \sum_{i=1}^N x_i V_i,$$

где x_i и V_i – массовая доля и удельный объем каждой компоненты [15, 16]. Применимость принципа аддитивности показана для смесей парафин-мрамор [15], парафин-вольфрам [16] и, впоследствии, сплавов и композитных материалов. В области высоких давлений для TiO₂, Al₂O₃, MgO и SiO₂ разработаны широкодиапазонные калорические УРС [17], в случае FeO – многофазное УРС [18] и аналогичное для CaO. Расчет смесевой ударной адиабаты реголита состава TiO₂ (10%), Al₂O₃ (11%), FeO (17%), MgO (9%), CaO (11%) и SiO₂ (42%) (взяты массовые проценты компонентов, их состав соответствует морскому реголиту [9]), показан на рис. 2 при давлениях от 100 до 1000 ГПа.

Процедура определения параметров фазы высокого давления вещества приведена в работе [19], и, следуя данной методике, определена начальная плотность фазы высокого давления реголита $\rho_0 = 4.13 \text{ г/см}^3$, модуль изоэнтропического сжатия и его производная по давлению, используемые далее при построении УРС по модели [17]. Рассчитанные по УРС ударные адиабаты реголита показаны на рис. 1, 2 в сопоставлении с соответствующими смесевыми ударными адиабатами. Из анализа рисунков следует высокая точность описания смесевой ударной адиабаты при высоких давлениях и непротиворечивое описание результатов измерений ударной сжимаемости пористого материала

реголита с начальной плотностью $\rho_{00} = 1.8 \text{ г/см}^3$ [14] при давлениях до 10 ГПа.

Хондриты – метеориты, содержащие хондры, сферические или эллиптические образования. В классификации метеоритов хондриты составляют наиболее распространенную подгруппу. Хондриты показывают более 92% от количества падений на Землю каменных метеоритов и более 85% от общего количества метеоритов. Обыкновенные хондриты встречаются наиболее часто. Согласно [11], группы H, L и LL близко связаны и образуют клан обычных хондритов. Результаты исследований собранных образцов Челябинского метеорита показали [20], что по содержанию главных элементов в темной и светлой фракциях он относится к LL-типу обыкновенных хондритов. Типичный состав LL-типа хондритов (массовые %): SiO_2 (40.6), TiO_2 (0.13), Al_2O_3 (2.36), Cr_2O_3 (0.54), FeO (26.62), MnO (0.35), MgO (25.22), CaO (1.92), Na_2O (0.95), K_2O (0.1), P_2O_5 (0.22) (сумма 98.89%) также приведен в работе [20].

Вклад в ударную сжимаемость смеси компонент при массовом содержании вещества менее 1% пренебрежимо мал, поэтому для расчета примем указанный состав LL-хондрита с учетом данного фактора и правильной нормировки: SiO_2 (42%), Al_2O_3 (3%), FeO (28%), MgO (25%), CaO (2%) (сумма 100%). Результаты для фазы высокого давления хондрита, хотя более корректно полагать, что это фаза высокого давления вещества метеорита, соответствующего по составу LL-хондриту, также показаны на рис. 2. Обращает внимание близость положения в p - V -плоскости смесевых ударных адиабат обоих материалов, реголита и хондрита, несмотря на различия в их составе. Причина, по-видимому, в том, что основной вклад в ударную сжимаемость вносит плотная модификация кварца, стишовит, чья массовая доля наибольшая, а вклад вюстита и периклаза, хотя и отличается по массовой доле почти в 2 раза для реголита и хондрита, не является столь определяющим. Построенное УРС хондрита с высокой точностью описывает смесевую ударную адиабату. Сопоставление также приведено на рис. 1 и в кинематических переменных отличие УРС реголита и хондрита выражено еще слабее, чем на рис. 2.

Таким образом, в данной работе предложен и реализован метод построения УРС реголита и хондрита с использованием расчетных смесевых ударных адиабат для области высоких давлений, полученных на основе принципа аддитивности и знания ударных адиабат основных образующих оксидов. Разработанные широкодиапазонные УРС реголита и хондрита могут эффективно применяться при проведении численного моделирования высокоэнергетических процессов.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект 21-72-20023).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Воронаев С.А., Кривенко А.П. Оценка температурных напряжений в литосфере ранней Луны // Доклады РАН. Физика, технические науки. 2023. Т. 508. № 1. С. 53–58. <https://doi.org/10.31857/S2686740022060153>
2. Воронаев С.А., Душенко Н.В., Федулов В.С., Сенин В.Г. Особенности дегазации хондрита ДНАЖАЛА (НЗ.8) // Доклады РАН. Физика, технические науки. 2023. Т. 509. № 1. С. 76–80. <https://doi.org/10.31857/S2686740023020104>
3. Фортвов В.Е. Уравнения состояния вещества: от идеального газа до кварк-глюонной плазмы. М.: Физматлит, 2012. 492 с.
4. Анисимов С.И., Бушман А.В., Канель Г.И. и др. Физика разрушения при высокоскоростном ударе // Письма в журнал экспериментальной и теоретической физики. 1984. Т. 39. № 1. С. 9–12.
5. Клумов Б.А., Ким В.В., Ломоносов И.В. и др. Возможные наблюдательные эффекты в эксперименте Deep Impact // Успехи физ. наук. 2005. Т. 175. № 7. С. 767–777. <https://doi.org/10.3367/UFN.0175.200507f.0767>
6. Schultz P.H., Hermelyn B., Colaprete A. et al. The LCROSS cratering experiment // Science. 2010. V. 330. N 6003. P. 468–472. <https://doi.org/10.1126/science.1187454>
7. Клумов Б.А., Кондауров В.И., Конюхов А.В., Медведев Ю.Д., Соколовский А.Г., Утюжников С.В., Фортвов В.Е. Столкновение кометы Шумейкер–Леви 9 с Юпитером: что мы увидим? // Успехи физ. наук. 1994. Т. 164. № 6. С. 617–629. <https://doi.org/10.3367/UFN.0164.199406c.0617>
8. Фортвов В.Е., Гнедин Ю.Н., Иванов М.Ф., Ивлев А.В., Клумов Б.А. Столкновение кометы Шумейкер–Леви 9 с Юпитером: что мы увидели // Успехи физических наук. 1996. Т. 166. № 4. С. 391–422.

- <https://doi.org/10.3367/UFNr.0166.199604c.0391>
9. Physics and astronomy of the Moon. Ed. Z. Kopal. N.Y.: Acad. Press, 1971. 328 p.
 10. Лунный грунт из Моря Изобилия. Под ред. А.П. Виноградова. М.: Наука, 1974. 624 с.
 11. *Wasson J.T., Kallemeyn G.W.* Compositions of chondrites // *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences.* 1988. V. 325. N. 1587. P. 535–544. <https://doi.org/10.1098/rsta.1988.0066>
 12. *Фортв В.Е.* Мощные ударные волны на Земле и в космосе. М.: Физматлит, 2018. 416 с.
 13. *Ломоносов И.В., Фортва С.В.* Широкодиапазонные полуэмпирические уравнения состояния вещества для численного моделирования высокоэнергетических процессов // *Теплофизика высоких температур.* 2017. Т. 55. № 4. С. 596–626. <https://doi.org/10.1134/S0018151X17040113>
 14. *Ahrens T.J., Cole M.* Shock compression and adiabatic release of lunar fines from Apollo 17. In: *Proc. 5th Lunar Science Conf., Suppl. 5. Geochim. Et Cosmochim. Acta.* 1974. V. 3. P. 2333.
 15. *Дремин А.Н., Карпунин И.А.* Метод определения ударных адиабат дисперсных веществ // *ПМТФ.* 1960. № 3. С. 184–188.
 16. *Алексеев Ю.Ф., Альтшулер Л.В., Крупникова В.П.* Ударное сжатие двухкомпонентных парафиновольфрамовых смесей // *ПМТФ.* 1971. № 4. С. 152–155.
 17. Ломоносов И.В. Уравнения состояния сапфира, кремнезема, периклаза и рутила // *ТВТ.* 2023. Т. 61. № 3. С. 473–476. <https://doi.org/10.31857/S004036442303016X>
 18. *Николаев Д.Н., Ломоносов И.В.* Уравнение состояния оксида железа при давлении ≤ 1 ТПа // *ТВТ.* 2023. Т. 61. № 2. С. 318–320. <https://doi.org/10.31857/S004036442302014X>
 19. *McQueen R.G., Marsh S.P., Fritz J.N.* Hugoniot equation of state of twelve rocks // *J. Geophysical Research.* 1967. V. 72. N. 20. P. 4999–5036. <https://doi.org/10.1029/JZ072i020p04999>
 20. *Галимов Э.М., Колотов В.П., Назаров М.А. и др.* Результаты вещественного анализа метеорита Челябинск // *Геохимия.* 2013. № 7. С. 580–580. <https://doi.org/10.7868/S0016752513070108>

EQUATIONS OF STATE FOR REGOLITH AND CHONDRITE AT HIGH PRESSURE

Corresponding Member of the RAS I. V. Lomonosov^a

^a*Federal Research Center of Problems of Chemical Physics and Medicinal Chemistry,
Russian Academy of Sciences, Chernogolovka, Moscow Region, Russia*

Using the principle of additivity under shock compression, wide-range equations of state of regolith and ordinary chondrite for the high-pressure region are constructed.

Keywords: equation of state, high pressure, regolith, chondrite

УДК 538.945

УНИВЕРСАЛЬНОСТЬ СПЕКТРА МНОГОТЕРМИНАЛЬНОГО ДЖОЗЕФСОНОВСКОГО КОНТАКТА

© 2024 г. А. Ф. Посадский^{1,2,*}, А. Г. Семенов^{1,3,**},
член-корреспондент РАН П. И. Арсеев^{1,***}

Поступило 06.12.2023 г.

После доработки 06.12.2023 г.

Принято к публикации 14.12.2023 г.

В многотерминальных структурах на основе нормальных металлов и сверхпроводников присутствуют андреевские связанные состояния. Их спектр определяется параметрами системы, в частности фазами рассеяния и коэффициентами прохождения в узлах. В сообщении найдены условия, при которых андреевские связанные состояния обладают универсальностью: они не меняются при любом изменении фаз, набираемых квазичастицами при отражении от примеси. Как следствие, спектр полностью определяется транспортными характеристиками системы. Результат получен для структуры в виде M -конечной звезды из нормального металла, каждый из лучей (терминалов) N_k которой приведен в контакт со своим сверхпроводником S_k , $1 \leq k \leq M$. Вместе они образуют т.н. многотерминальный джозефсоновский контакт. В центре его находится немагнитная примесь, описываемая некоторой матрицей рассеяния.

Ключевые слова: сверхпроводимость, многотерминальные структуры, джозефсоновские контакты, андреевские связанные состояния

DOI: 10.31857/S2686740024020034, EDN: KHVNWC

ВВЕДЕНИЕ

В 1962 г. Б. Джозефсоном [1] был предсказан эффект бездиссипативного протекания тока через слабую связь между двумя сверхпроводниками в отсутствие напряжения. Это явление и до настоящего момента является основой для множества теоретических и экспериментальных исследований. В последнее время большой интерес вызывают джозефсоновские контакты с большим числом ($M > 2$) терминалов. Такие системы потенциально могут найти применение в качестве компонентов различных приборов.

Например, термоциркуляторов [2], датчиков магнитного поля [3]. Они не менее интересны и с чисто теоретической точки зрения. В таких структурах реализуются связанные состояния, благодаря явлению андреевского отражения [4]: электрон летит из металла и отражается от сверхпроводника в виде дырки и наоборот. Их уровни энергий зависят от разностей фаз сверхпроводников. Между такими фазовыми спектрами в M -терминальных джозефсоновских контактах и обычными спектрами в $(M - 1)$ -мерных твердых телах была найдена аналогия, послужившая толчком для множества новых исследований [5, 6, 7]. Сверхпроводящие разности фаз на переходе играют роль квазиимпульсов, периодичность энергий уровней по модулю 2π имитирует зону Бриллюэна.

В центре контакта всегда находится рассеиватель, который описывается некоторой S -матрицей. Квадрат модуля ее элемента

$$T_{i,j} = |s_{i,j}|^2$$

¹Физический институт им. П.Н. Лебедева
Российской академии наук, Москва, Россия

²Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет),
Долгопрудный, Московская обл., Россия

³Сколковский институт науки и технологий,
Москва, Россия

*E-mail: posadskij.af@phystech.edu

**E-mail: semenov@lpi.ru

***E-mail: ars@lpi.ru

дает вероятность соответствующей частице перейти из i -го терминала в j -й, а $\alpha_{i,j} = \arg s_{i,j}$ есть приобретаемая в этом процессе фаза. Поскольку матрица рассеяния отвечает за туннелирование между терминалами, уровни энергий андреевских состояний также зависят и от нее.

В данной работе рассматриваются некоторые особенности этой связи. А именно нас интересует вопрос, при каких условиях можно полностью восстановить спектр андреевских состояний, зная лишь транспортные характеристики системы? Транспортными характеристиками мы называем величины $T_{i,j}$. Поскольку они входят линейно в формулу Ландауэра [8] при малых напряжениях и пропорциональны кондуктансу перехода в одноканальном случае, то их можно измерить на эксперименте. Ток через терминал i тогда представляется в виде [8]

$$I_i = \sum_{j=1}^M G_{i,j} V_{i,j}, \quad (1)$$

где $V_{i,j}$ – напряжение между терминалами i и j , $G_0 = \frac{e^2}{\pi\hbar}$ – квант проводимости.

Простым примером системы, в которой выполняется выше указанное свойство, является короткий SNS-контакт (superconductor – normal metal – superconductor). Известно, что выражение для энергий андреевских состояний такой структуры в некоторых приближениях имеет вид [9]

$$E = \pm\Delta_0 \sqrt{1 - T_{1,2} \sin^2 \frac{\phi_{1,2}}{2}}, \quad (2)$$

где Δ_0 – энергия щели сверхпроводников, $\phi_{1,2} = \phi_1 - \phi_2$ – разность фаз сверхпроводников. Видно, что выражение (2) содержит в себе только вероятность туннелирования $T_{1,2}$, но не фазы элементов S -матрицы.

Можно пойти дальше и рассмотреть короткий трехтерминальный контакт. В случае симметрии к обращению времени матрица рассеяния электронов $\hat{s}_e(E)$ будет симметричной матрицей 3×3 :

$$\hat{s}_e(E) = \begin{pmatrix} s_{1,1} & s_{1,2} & s_{1,3} \\ s_{1,2} & s_{2,2} & s_{2,3} \\ s_{1,3} & s_{2,3} & s_{3,3} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Рассеяние дырок описывается матрицей $\hat{s}_h(E) = \hat{s}_e(-E)$. Кроме того, потребуем, чтобы она не зависела от энергии на масштабе $|E| < \Delta_0$. Тогда, если написать уравнение на спектр и решить его, оно даст простое решение $E = \pm\Delta_0$ и нетривиальное [10, 11]:

$$E = \pm\Delta_0 \sqrt{1 - T_{1,2} \sin^2 \frac{\phi_{1,2}}{2} - T_{2,3} \sin^2 \frac{\phi_{2,3}}{2} - T_{3,1} \sin^2 \frac{\phi_{3,1}}{2}}, \quad (4)$$

где $\phi_{i,j} = \phi_i - \phi_j$. Снова оказалось, что выражение для энергии уровня зависит только от коэффициентов прохождения и не содержит фазы матрицы рассеяния, которые нельзя определить из транспортных измерений. Заметим, что в чисто нормальных структурах такого эффекта не наблюдается. Если рассмотреть потенциальный ящик с несколькими терминалами, то в спектр связанных состояний явно будут входить фазы рассеяния.

В работе для общности выводов рассматривается джозефсоновский контакт с произвольным числом коротких терминалов M . При определенных условиях спектр такой структуры можно восстановить, зная только транспортные характеристики. При этом зависимость от прочих параметров матрицы рассеяния пропадает. Условия, наложенные на S -матрицу, играют в этом определяющую роль. Если хоть одно из них не выполнено, сокращения оставшихся свободных параметров не происходит.

1. ОПИСАНИЕ СТРУКТУРЫ

Опишем подробно изучаемую структуру и приближения, в которых будем работать. Пусть M сверхпроводников S_1, \dots, S_M соединены каждый со своим нормальным металлом N_1, \dots, N_M . В свою очередь все нормальные области (т.н. терминалы) соединяются в одной точке. В ней расположена примесь, рассеяние частиц на которой описывается некоторой матрицей рассеяния. Такая система называется многотерминальным джозефсоновским контактом (рис. 1).

Будем считать, что по мере приближения к границам с нормальными областями сверхпроводящие выводы сужаются. В результате задача становится одномерной. Каждый нормальный металл имеет лишь один проводящий канал. Зависимость параметра порядка системы от координат ступенчатая [12]:

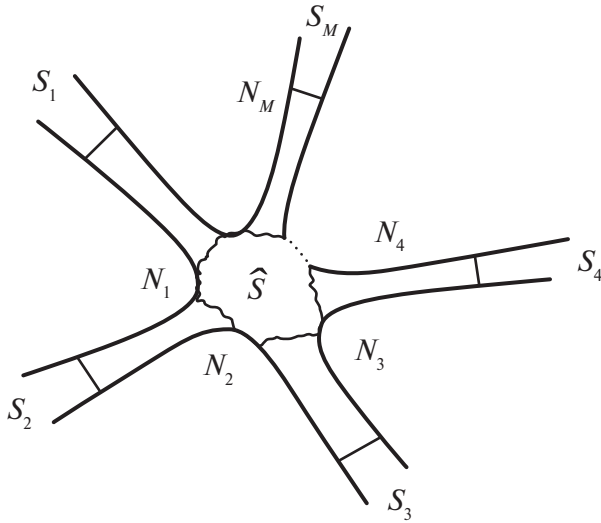


Рис. 1. Схематическое изображение M -терминального джозефсоновского контакта.

$$\Delta(\mathbf{r}) = \begin{cases} \Delta_0 e^{i\phi_k}, & \mathbf{r} \in S_k, \\ 0, & \mathbf{r} \in N_k, \end{cases} \quad 1 \leq k \leq M. \quad (5)$$

В приближении среднего поля [13] возбуждения, которыми описываются процессы в нормальной части системы, можно условно разделить на электроноподобные и дырочноподобные. Для таких квазичастиц хорошо известно явление андреевского отражения [4]. Если электроноподобное возбуждение с энергией $E < \Delta_0$ в нормальном металле сталкивается с NS -границей, то в пределе $\Delta_0 \ll \mu$, где μ — химический потенциал, оно с вероятностью близкой к единице отражается в виде дырки. Аналогичный процесс происходит и с дыркой.

Итого в структуре присутствуют процессы двух типов. Во-первых, нормальное рассеяние электронов в центральной части описывается некоторой матрицей $\hat{s}_e(E)$. Рассеяние дырок описывается тогда матрицей, удовлетворяющей условию¹ $\hat{s}_h(E) = \hat{s}_e(-E)$. Во-вторых, андреевское отражение. Оно происходит во всех терминалах на границах между нормальным металлом и сверхпроводником. Поскольку мы считаем NS -границы чистыми, обычное рассеяние на них подавлено в сравнении с андреевским. Благодаря этим двум процессам в рассматриваемой структуре возникают связанные

¹ Данная связь следует из электрон-дырочной симметрии уравнений Боголюбова–де Жена [7].

состояния таких частиц в подщелевой области энергий.

2. УНИВЕРСАЛЬНОСТЬ СПЕКТРА АНДРЕЕВСКИХ СОСТОЯНИЙ

Из условия существования нетривиального решения уравнений Боголюбова–де Жена [13] в подщелевой области энергий получаем уравнение на спектр, известное как формула Бее-наккера [14]:

$$\det \left(1 - \gamma^2 e^{-i\hat{\phi}} \hat{s}_e(E) e^{i\hat{\phi}} \hat{s}_e^*(-E) \right) = 0, \quad (6)$$

где $\gamma = e^{-i \cos^{-1} \left(\frac{E}{\Delta_0} \right)}$, $\hat{\phi} = \text{diag} \{ \phi_1, \dots, \phi_M \}$ — фазы сверхпроводников.

Выясним, при каких условиях уравнение (6) будет зависеть лишь от коэффициентов прохождения. Для этого потребуем, чтобы матрица рассеяния удовлетворяла двум свойствам:

независимость от энергии при $|E| < \Delta_0$

$$\hat{s}_e(E) = \hat{s}_e, \quad (7)$$

симметрия к обращению времени (отсутствие магнитного поля)

$$\hat{s}_e = \hat{s}_e^T. \quad (8)$$

Заметим теперь, что из-за унитарности S -матрицы не все вероятности туннелирования и фазы являются независимыми. Поэтому, прежде чем продвинуться дальше, необходимо определиться с параметризацией.

Произвольная унитарная симметричная матрица $M \times M$ определяется

$$2M^2 - M^2 - \frac{M^2 - M}{2} = \frac{M(M+1)}{2}$$

независимыми параметрами. Выберем в качестве таковых модули недиагональных элементов матрицы $\sqrt{T_{i,j}}$ и фазы диагональных элементов $\alpha_{i,j}$. Нетрудно проверить, что их

в сумме ровно $\frac{M(M+1)}{2}$. Теперь мы готовы сформулировать доказываемое утверждение: в выбранной параметризации спектр андреевских состояний полностью определяется только вероятностями туннелирования $T_{i,j}$ и не зависит от оставшихся параметров, диагональных фаз $\alpha_{i,i}$.

Чтобы показать это, представим \hat{s}_e с учетом ее симметричности в виде произведения трех матриц:

$$\hat{s}_e = e^{i\frac{\hat{\alpha}}{2}} \hat{s}_0 e^{i\frac{\hat{\alpha}}{2}}, \quad (9)$$

где

$$\hat{\alpha} = \text{diag}\{\alpha_{1,1}, \dots, \alpha_{M,M}\},$$

$$\arg(\hat{s}_0)_{i,j} = \frac{1}{2}(2\alpha_{i,j} - \alpha_{i,i} - \alpha_{j,j}).$$

Видно, что в центре находится симметричная унитарная матрица \hat{s}_0 с действительными числами на диагонали. Такая матрица определяется $\frac{M(M-1)}{2}$ числом параметров. Выберем в качестве таковых модули недиагональных элементов $\sqrt{T_{i,j}}$. Тогда остальные величины $R_{i,i}$ и $\arg(\hat{s}_0)_{i,j}$ можно выразить через них из условий унитарности. Следовательно, матрица \hat{s}_0 полностью определяется параметрами $T_{i,j}$. Если подставить разложение (9) в формулу Беенаккера (6), то можно показать, что диагональные фазы $\alpha_{i,i}$ сокращаются:

$$\det\left(1 - \gamma^2 e^{-i\hat{\phi}} \hat{s}_0 e^{i\hat{\phi}} \hat{s}_0^*\right) = 0. \quad (10)$$

Таким образом, в спектр андреевских состояний не входят неизмеряемые набег фаз отражения. Поэтому, чтобы полностью определить уровни энергии, достаточно знать лишь транспортные характеристики системы.

3. КВАЗИКЛАССИЧЕСКИЕ ТРАЕКТОРИИ

Сокращение фаз в спектре можно продемонстрировать более наглядным способом. Для этого представим нормальную часть рассматриваемой структуры в виде ориентированного графа (рис. 2),

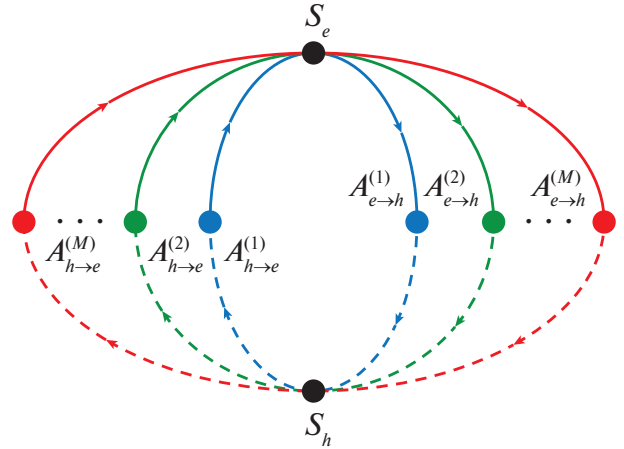


Рис. 2. Граф многотерминального джозефсоновского контакта. Вершины S_e, S_h соответствуют нормальному рассеиванию электронов и дырок, вершины $A_{\alpha\rightarrow\beta}^{(i)}$ – андреевскому рассеиванию частицы α в частицу β . По сплошным ребрам перемешаются электроны, по штрихованным – дырки.

по которому могут путешествовать возбуждения. Вершина $S_{e/h}$ соответствует нормальному рассеянию электрона/дырки на центральной примеси. Каждому терминалу отвечают 4 ребра графа: для двух типов частиц и двух направлений движения. Вершина $A_{\alpha\rightarrow\beta}^{(i)}$ соответствует андреевскому отражению частицы α в частицу β в терминале i .

Рассмотрим квазиклассическую траекторию частицы на графе. Для простоты пусть в начале пути она будет электроном. Траектория определяется последовательностью терминалов, которые посещает квазичастица. При таком процессе меняются ее модуль и фаза. Нас интересует только вторая величина. Покажем, что на траекториях, определяющих связанные состояния, набег диагональных фаз сокращается.

Как следует из (9), фаза, приобретаемая электроном при рассеянии из терминала i_1 в терминал i_2 , может быть представлена в виде

$$\frac{\alpha_{i_1,i_1}}{2} + \frac{\alpha_{i_2,i_2}}{2} + \arg(\hat{s}_0)_{i_1,i_2}, \quad (11)$$

где величина $\arg(\hat{s}_0)_{i_1,i_2}$ зависит только от коэффициентов прохождения. Вообще говоря, также на пути частицы присутствует набег фаз за счет отражения от NS -границ, однако на доказательстве это не сказывается. Из связи $s_h = s_e^*$ аналогичное выражение можно записать для дырки. Ее набег фаз будет тогда отличаться от (11) лишь знаком.

Рассмотрим теперь произвольную квазиклассическую траекторию возбуждения в системе. Пусть на своем пути частица проходит последовательность терминалов $i_1 \rightarrow i_2 \rightarrow \dots \rightarrow i_k$. После суммирования вкладов каждого перехода получаем, что набранная при этом фаза равна

$$\frac{\alpha_{i_1, i_1}}{2} + (-1)^k \frac{\alpha_{i_k, i_k}}{2} + \Phi, \quad (12)$$

где Φ не зависит от величин $\alpha_{i, i}$.

Спектр рассматриваемой структуры определяется из правила квантования типа Бора–Зоммерфельда, поэтому вклад в него дают только замкнутые траектории на графе [15]. На таких путях полный набег фаз, как видно из (12), не зависит от фаз отражения. Хотя на произвольных траекториях он, конечно, может быть ненулевой.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В разделе 2 было показано, что спектр многотерминального джозефсоновского контакта полностью определяются транспортными характеристиками структуры, если матрица рассеяния удовлетворяет определенным условиям. Это также легко видеть и в квазиклассическом формализме (раздел 3). Фазы, набираемые на замкнутых траекториях в системе, не зависят от величин $\alpha_{i, i}$.

Требования (7), (8) являются определяющими. Невыполнение любого из них влечет за собой нарушение тонкого сокращения фаз отражения. Симметрию к обращению времени можно легко нарушить, введя магнитное поле в систему. Условие энергонезависимости в области $|E| < \Delta_0$ тоже не всегда может быть выполнено.

Если же матрица удовлетворяет этим требованиям, то такой джозефсоновский контакт демонстрирует нам некоторую универсальность. С физической точки зрения это означает, что спектры таких систем будут полностью идентичны, если одинаковы их транспортные характеристики. Например, на месте центрального рассеивателя может быть любая другая сколь угодно сложная нормальная структура. Однако если величины $T_{i, j}$ для новой системы остаются такими же, то спектр не поменяется. Матрица рассеяния же будет давать некоторое

эффективное описание центральной части контакта без подробностей о ее внутренней структуре.

Заметим, что процедура восстановления спектра по коэффициентам прохождения в общем случае является трудной задачей. Чтобы ее выполнить, вероятно, необходимо выразить все недиагональные фазы $\alpha_{i, j}$ матрицы рассеяния через величины $T_{i, j}$, используя условия унитарности. Однако система уравнений получается сложной, и неочевидно, существует ли у нее решение.

Интересно, что ровно такая же проблема возникает в задачах физики элементарных частиц, поскольку в этой области часто приходится иметь дело лишь с вероятностями рассеяния. В работе [16] исследовалась задача восстановления унитарной матрицы по значениям модулей ее элементов. Было показано, что в симметричном случае задача имеет несколько решений, однако эти решения отличаются только выбором знаков при матричных элементах.

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы выражают благодарность Р.А. Ниязову за помощь в поиске информации о параметризации матриц и А.С. Мельникову за ценные советы и обсуждение данной задачи.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант 23-22-00289).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Josephson B.D.* Possible new effects in superconductive tunnelling // *Phys. Lett.* 1962.
2. *Hwang S.-Y., Giazotto F., Sothmann B.* Phase-Coherent Heat Circulator Based on Multiterminal Josephson Junctions // *Physical Review Applied.* 2018. V. 10. P. 044062.
3. *Amin M.H.S., Omelyanchouk A.N., and Zagoskin A.M.* Mesoscopic multiterminal Josephson structures. I. Effects of nonlocal weak coupling // *Low Temperature Physics.* 2001. V. 27. P. 616.
4. *Andreev A.F.* The thermal conductivity of the intermediate state in superconductors // *Sov. Phys. JETP.* 1964. P. 1228–1234.
5. *Heck B. van, Mi S., and Akhmerov A.R.* Single fermion manipulation via superconducting phase multiterminal

- Josephson junctions // *Phys. Rev. B*. 2014. V. 90. P. 155450.
6. *Riwar R.-P., Houzet M., Meyer J.S., Nazarov Y.V.* Multiterminal Josephson junctions as topological materials // *Nature Communications*. 2016. V. 7. P. 11167.
 7. *Xie Hong-Yi, Vavilov M.G., and Levchenko A.* Weyl nodes in Andreev spectra of multiterminal Josephson junctions: Chern numbers, conductances, and supercurrents // *Phys. Rev. B*. 2018. V. 97. P. 035443.
 8. *Morfonios C.V., Schmelcher P.* Control of Magnetotransport in Quantum Billiards: Theory, Computation and Applications. *Lecture Notes in Physics*. V. 927. Springer International Publishing Switzerland 2017.
 9. *Bagwell Ph.F.* Suppression of the Josephson current through a narrow, mesoscopic, semiconductor channel by a single impurity // *Phys. Rev. B*. 1992. V. 46.
 10. *Xie Hong-Yi, Vavilov M.G., and Levchenko A.* Topological Andreev bands in three-terminal Josephson junctions // *Phys. Rev. B*. 2017. V. 96. P. 161406(R).
 11. *Savinov D.A.* Scattering-matrix approach to the theory of Josephson transport in mesoscopic multiterminal nodes // *Physica C Superconductivity*. 2015. V. 509. P. 22–28.
 12. *Beenakker C.W.J., and Houten H. van.* The Superconducting Quantum Point Contact // *Nanostructures and Mesoscopic Systems*. 1992. P. 481–497.
 13. *Gennes P.G. de* *Superconductivity of Metals and Alloys*. N.Y., W.A. Benjamin, 1966.
 14. *Beenakker C.W.J.* Universal Limit of Critical-Current Fluctuations in Mesoscopic Josephson Junctions // *Phys. Rev. Lett.* 1991. V. 67. P. 3836.
 15. *Gnutzmann S. and Smilansky U.* Quantum Graphs: Applications to Quantum Chaos and Universal Spectral Statistics // *Advances in Physics*. 2006. V. 55. P. 527–625.
 16. *Auberson G., Martin A. and Mennessier G.* On the Reconstruction of a Unitary Matrix from Its Moduli // *Commun. Math. Phys.* 1991. V. 140. P. 523–542.

UNIVERSALITY OF THE SPECTRA OF MULTITERMINAL JOSEPHSON JUNCTION

A. F. Posadskii^{a,b}, A. G. Semenov^{a,c}, Corresponding Member of the RAS P. I. Arseev^a

^a*P.N. Lebedev Physical Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

^b*Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University), Dolgoprudny, Moscow Region, Russia*

^c*Skolkovo Institute of Science and Technology, Moscow, Russia*

Andreev bound states are formed in multiterminal structures based on normal metals and superconductors. Their spectrum is determined by the system parameters, in particular the scattering phases and transmission coefficients at the nodes. The article found conditions under which Andreev bound states are universal: they don't change with any change in the reflection phases. As a consequence, the spectrum is completely determined by the transport characteristics of the system. The result was obtained for a structure in the form of a normal metal M -finite star, each of the rays (terminals) N_k of which is in contact with its superconductor S_k , $1 \leq k \leq M$. Together they form a multiterminal Josephson junction. At the center of the structure there is a non-magnetic impurity with its some scattering matrix.

Keywords: superconductivity, multiterminal structures, Josephson junctions, Andreev bound states

УДК 533.9.082.5

ЛАЗЕРНО-ИНДУЦИРОВАННАЯ АБЛЯЦИЯ И ДЕСОРБЦИЯ ВОЛЬФРАМОВЫХ ПЛЕНОК, НАСЫЩЕННЫХ ДЕЙТЕРИЕМ

© 2024 г. Е. В. Смирнова^{1,3,*}, О. С. Медведев^{1,2}, А. Г. Раздобарин^{1,3}, Д. И. Елец^{1,2,3},
Л. А. Снигирев^{1,3}, Я. Р. Шубин^{1,3}

Представлено академиком РАН Н.Н. Розановым 14.12.2023 г.

Поступило 14.12.2023 г.

После доработки 14.12.2023 г.

Принято к публикации 07.02.2024 г.

Сравниваются методы лазерно-индуцированной десорбции (ЛИД) и абляции (ЛИА) для оценки возможности абсолютного количественного анализа содержания изотопов водорода в материалах первой стенки термоядерных реакторов. Пленки вольфрама, насыщенные дейтерием, толщиной 300–400 нм на кремниевой подложке использовались как модельные образцы. Для реализации ЛИД образцы облучались лазерными импульсами с длительностью 200 мкс и плотностью энергии 50–150 Дж/см², для ЛИА – 12 нс и 5–15 Дж/см². Регистрация остаточных газов проводилась методом квадрупольной масс-спектрометрии. В режиме ЛИД проведено компьютерное моделирование нагрева лазерным импульсом. Результаты моделирования и эксперимента показали, что нагрева при плотности энергии 100–150 Дж/см² достаточно для дегазации пленок вольфрама исследуемой толщины. Сравнение количества десорбированного дейтерия в режиме ЛИД (150 Дж/см²) и ЛИА (15 Дж/см²) показывает, что оно идентичное в пределах погрешности измерения и равно $4.15 \pm 0.15 \cdot 10^{14}$ см⁻².

Ключевые слова: лазерно-индуцированная абляция, лазерно-индуцированная десорбция, моделирование, первая стенка, токамак, диагностика накопления трития

DOI: 10.31857/S2686740024020043, EDN: KHRXIS

В устройстве термоядерных установок типа токамак, таких как ITER, важная роль отводится контролю накопления термоядерного топлива в компонентах первой стенки и пересадениях, образующихся при длительных импульсах плазменного разряда [1]. Взаимодействие плазмы с внутренней облицовкой вакуумной камеры и накопление в ней термоядерного топлива являются одними из ключевых факторов, определяющих выбор обращенных к плазме материалов для термоядерных устройств нового поколения [2]. На данный

момент в качестве материала дивертора и первой стенки ITER предполагается использовать вольфрам благодаря уникальным характеристикам, таким как высокая температура плавления, хорошая теплопроводность, высокая устойчивость к термическим нагрузкам. Кроме того, у вольфрама низкий уровень накопления радиоактивного трития, что также является преимуществом для его использования как конструкционного материала [3]. Однако контроль накопления термоядерного топлива в пересадениях вольфрама является важным вопросом как с точки зрения управления плазмой, так и безопасности, так как содержание изотопов водорода в пересаденных слоях может в 10–15 раз превышать концентрацию в объемном материале [4].

Среди механизмов накопления изотопов водорода в первой стенке термоядерных реакторов

¹Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе, Санкт-Петербург, Россия

²Национальный исследовательский ядерный университет “МИФИ”, Москва, Россия

³Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия

*E-mail: evsmirnova@mail.ioffe.ru

выделяют кратковременную адсорбцию с последующим газовыделением, глубокую имплантацию (захват изотопов водорода на радиационных дефектах, в примесях, дислокациях и междоузлиях кристаллической решетки) и совместное осаждение с материалами, распыленными при контакте плазмы с поверхностью облицовки [5]. Причем переосаждение приводит к непрерывному накоплению изотопов водорода без точки насыщения, поэтому именно пленки требуют особого внимания при проведении диагностики накопления радиоактивного трития.

Одними из наиболее точных и зарекомендовавших себя методов получения данных об абсолютном содержании изотопов водорода являются метод термодесорбционной спектроскопии [6] и метод ядерных реакций [7]. Однако оба этих метода могут быть реализованы только после вскрытия вакуумной камеры — крайне нерегулярной процедуры даже в действующих токамаках, а в случае использования трития в качестве рабочего газа сопряженной с огромными временными и финансовыми затратами. Другой проблемой этих методов является невозможность оперативной оценки содержания дейтерия и трития, захваченных в ходе импульсов плазменного разряда. Отсутствие возможности *in-situ* контроля нестабильности плазмы, вызывающей нагрев первой стенки токамака и десорбцию трития или дейтерия в плазму, может приводить к изменению количественного соотношения между компонентами топлива и неконтролируемой термоядерной реакции [8]. Кроме того, при извлечении исследуемых объектов и контакте с атмосферным воздухом будет происходить изотопный обмен, что может существенно повлиять на количественный анализ [9, 10].

Последние 10–15 лет активно развиваются дистанционные лазерные методы оценки количества изотопов водорода в элементах первой стенки [1, 11–13]. К этим методам относятся лазерно-индуцированная десорбция (ЛИД) и лазерно-индуцированная абляция (ЛИА) в сочетании с масс-спектрометрией и оптической спектроскопией. Эти методы могут применяться между импульсами плазменных разрядов без необходимости вскрытия вакуумного объема термоядерного реактора.

Эффективность детектирования изотопов водорода методом ЛИД совместно с квадрупольным масс-спектрометром (ЛИД-КМС) составляет от 60 до 90% по сравнению с измерениями на таких же образцах термодесорбционной спектроскопией (ТДС) и предполагается как диагностика накопления трития на ITER [11, 14]. Данный метод уже имеет доказанную эффективность для слоев Ве до 10 мкм, однако он плохо применим для объемных материалов и мало изучен для переосажденных слоев вольфрама.

ЛИА является альтернативным методом дистанционной диагностики, который дает возможность профилирования содержания изотопов водорода по глубине за счет послойного удаления материала [12], а также проведения спектроскопии лазерной искры [13, 15–17]. Несмотря на преимущества ЛИА, одним из основных недостатков применения является удаление материала мишени в различной форме: атомы, молекулы, кластеры, капли микронного размера и твердые частицы [18]. При этом остается неясным, какая часть водорода, содержащаяся в удаленном материале, может быть зарегистрирована методом масс-спектрометрии. Сравнение измерений содержания дейтерия в пленках алюминия методом ЛИА с ТДС и ЛИД было проведено в работе [19], где было показано, что ЛИА позволяет выделить до 85% дейтерия от значения, полученного методом ТДС. Несмотря на близкое значение зарегистрированного дейтерия методом ЛИА, количественный результат, полученный методом ЛИД с длительностью импульса 10 нс, у авторов составляет 9% [19], в сравнении с 60–90% зарегистрированными ЛИД-КМС в работе [11] при длительностях лазерного импульса 3–5 мс. Существующие на данный момент противоречивые результаты о количественном содержании изотопов водорода в переосажденных слоях лазерными методами ЛИА и ЛИД требуют дополнительных исследований для оценки возможности их применения для мониторинга накопления термоядерного топлива, в том числе для переосаждений вольфрама.

В данной работе приводятся результаты количественного сравнения измерений содержания дейтерия методами ЛИА и ЛИД в случае модельных образцов пленок вольфрама,

осажденных на кремниевой подложке. Для осуществления ЛИД использовался режим свободной генерации лазера. Для данного процесса было проведено компьютерное моделирование нагрева образца лазерным излучением. ЛИА осуществлялась на этом же стенде, но в режиме модуляции добротности.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ УСТАНОВКА И ОБРАЗЦЫ

Для проведения ЛИД и ЛИА использовался импульсный лазер Nd:YAG Solar LQ529 (Solar LS, Беларусь) с длиной волны излучения 1064 нм, частотой следования импульсов 10 Гц и возможностью работы в режимах модуляции добротности и свободной генерации с длительностью импульса 12 нс и 200 мкс соответственно. Энергия в импульсе составляет 450 мДж. Профиль лазерного излучения имеет близкое к равномерному распределение энергии в режиме свободной генерации и гауссово распределение для режима модуляции добротности с пиковой плотностью энергии на поверхности образца от 1 Дж/см² до 150 Дж/см², которая изменяется аттенуатором. Фокусирование лазерного излучения на образце осуществляется двухлинзовой телескопической системой. Все оптические элементы имеют просветляющее покрытие на 1064 нм.

Вакуумный объем представляет собой цилиндр диаметром 250 мм с общим объемом 70 л. Перед началом эксперимента камера откачивалась до рабочего давления $7 \cdot 10^{-5}$ – $2 \cdot 10^{-4}$ Па турбомолекулярным насосом Turbovac 90i (Leybold, Германия) со скоростью откачки 90 л/с. Анализ остаточных газов производится с помощью квадрупольного масс-спектрометра Extorr XT300M (Extorr Inc., США). В экспериментальном стенде для ЛИА и ЛИД, КМС имеет собственную дифференциальную откачку вакуумным постом HiCube 80 ECO (Pfeiffer Vacuum, Германия) и присоединяется к общему вакуумному объему через апертуру диаметром 1 мм для обеспечения давления в объеме КМС в пределах 1 – $2 \cdot 10^{-2}$ Па во время лазерных импульсов.

В качестве образцов для исследования ЛИА и ЛИД использовали пленку вольфрама толщиной 300–400 нм, насыщенную дейтерием, на подложке кремния толщиной 300 мкм.

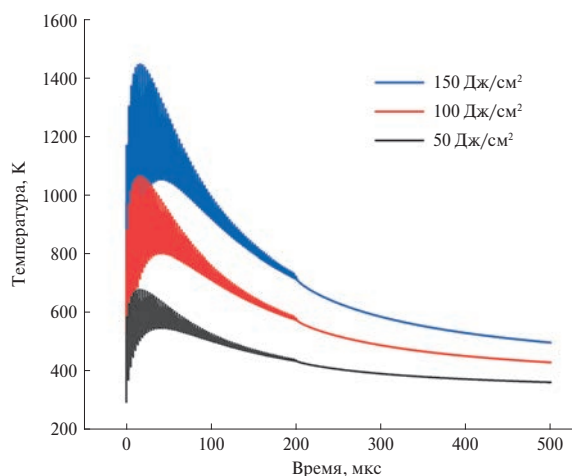


Рис. 1. График динамики температуры в центре воздействия лазерного излучения на поверхности образца при воздействии лазерным импульсом в режиме свободной генерации.

Напыление пленки W осуществлялось из мишени марки ВЧ-1 методом импульсного лазерного осаждения в атмосфере дейтерия (99.92%) при рабочем давлении 30 Па.

МОДЕЛИРОВАНИЕ

В работах [11, 20] для ЛИД используется лазерное излучение с длительностью импульса 1.5–5 мс и с равномерным распределением интенсивности по лазерному пятну и во времени. В нашем случае в режиме свободной генерации лазерный импульс общей длительностью порядка 200 мкс, задний фронт волны которого затухал к концу импульса. Импульс состоял из пиков с полушириной 400 нс. Для оценки требуемой плотности энергии для достижения температуры десорбции дейтерия из пленки вольфрама в первом приближении импульс свободной генерации описывался набором функций Гаусса, интенсивность которых спадала экспоненциально, согласно временным характеристикам импульса, измеренным с помощью осциллографа. Длительность единичного импульса составляла 400 нс, период – 2700 нс, суммарно 100 импульсов. Моделирование лазерного нагрева производилось в программном пакете COMSOL Multiphysics 6.1. В качестве образца для моделирования процесса ЛИД использовали тонкий слой пленки вольфрама (W) толщиной 1 мкм, который находился на кремниевой подложке с радиусом 5 мм и

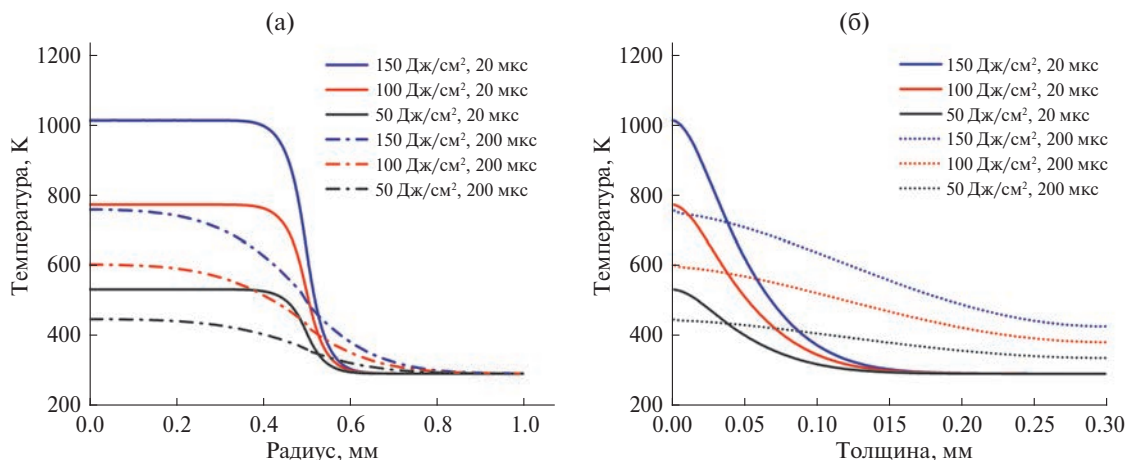


Рис. 2. Распределение температуры по поверхности (а) и толщине (б) образца при достижении максимальной температуры на поверхности и сразу после окончания воздействия лазерного импульса в режиме свободной генерации.

толщиной 300 мкм. В качестве источника излучения использовали лазер с длиной волны излучения 1064 нм (длина волны учитывалась в поглощательной способности W). В поперечном сечении пучок был задан равномерным распределением интенсивности шириной 1 мм, что соответствует реально измеренному размеру пятна на поверхности образца.

Для исследования зависимости температурного распределения в объеме образца использовали три плотности энергии лазерного излучения 50 Дж/см², 100 Дж/см² и 150 Дж/см².

График изменения температуры от времени в центре лазерного пятна на поверхности образца во время импульса представлен на рис. 1. Согласно работам [4, 21], температура, при которой активно начинается десорбция дейтерия из пленок вольфрама, составляет 450–500 К, а большая часть дейтерия выделяется из пленок вольфрама до 750–800 К, следовательно, пленку вольфрама необходимо прогреть на всю глубину до данной температуры. Пунктирной линией на рис. 1 обозначена температура 800 К. Максимальная температура в центре пятна воздействия в режиме свободной генерации достигается после 20–50 мкс от начала воздействия лазерного импульса и по результатам моделирования составляет 540 К, 800 К и 1050 К (оценка снизу) для плотностей энергии 50 Дж/см², 100 Дж/см² и 150 Дж/см² соответственно. Из результатов моделирования следует, что при плотности энергии 50 Дж/см², если и будет, то скорее всего незначительная десорбция дейтерия. При плотностях энергий 100 и 150 Дж/см² должна

наблюдаться полная десорбция дейтерия из вольфрамовых осадений.

На рис. 2а приведены графики температуры на поверхности образца для 3 плотностей энергии в зависимости от точки удаления от центра лазерного пятна в момент максимальной температуры (сплошные линии) и в конце импульса свободной генерации (пунктирные линии). На рис. 2б представлены графики распределения температуры по глубине образца в те же моменты времени.

По результатам моделирования можно сделать вывод, что плотности энергии 50 Дж/см² заведомо недостаточно для десорбции дейтерия из пленок вольфрама, но температура достигает значений начала десорбции. В случае 100 Дж/см² температура находится на ~50–100° К ниже температуры десорбции дейтерия из всех ловушек и, по-видимому, данной плотности энергии будет недостаточно для полной десорбции. В случае 150 Дж/см² максимальная температура пленки достигает заведомо больших температур, которых будет достаточно для десорбции изотопов водорода из пленок вольфрама толщиной 1 мкм. Если же смотреть на глубины прогрева импульсом свободной генерации, то можно сказать, что во всех трех случаях пленки толщиной 1 мкм имеют однородную температуру по глубине.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ЧАСТЬ

Лазерно-индуцированная десорбция

Согласно проведенному моделированию в эксперименте ЛИД также использовались три

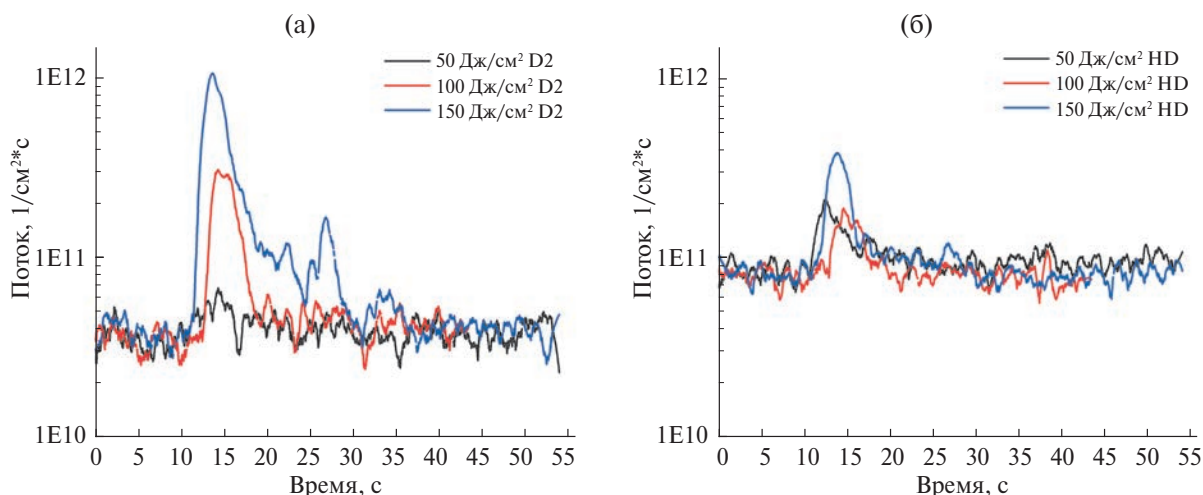


Рис. 3. Поток 4-й массы (а) и 3-й массы (б) при облучении в режиме свободной генерации с плотностями энергии 50, 100 и 150 Дж/см².

плотности энергии 50, 100 и 150 Дж/см². Оптическая система лазера не позволяет осуществить одиночный импульс в режиме свободной генерации. В связи с этим образец облучался в течение 1 мин с частотой следования импульсов 10 Гц. На рис. 3 представлены потоки молекул 4-й (а) и 3-й (б) масс. Абсолютные значения потоков вычислялись по калиброванной течи дейтерия с фиксированным потоком $1 \cdot 10^{-6}$ Па·м³/с. Представленные данные усреднялись по 50 точкам с помощью фильтра Савицкого–Голея (Savitzky–Golay). Черная кривая соответствует плотности энергии 50 Дж/см², и в случае 4-й массы повышение потока с началом воздействия – слабо заметно в сравнении с фоновым уровнем сигнала. В случае 3-й массы возрастание сигнала отчетливо наблюдается, что говорит о десорбции дейтерия в составе молекул HD. Для плотности энергии 100 Дж/см² пик 4-й массы становится явно выраженным, как и в случае 3-й массы. Несмотря на то что облучение длилось 1 мин, длительности пиков десорбции 4-й и 3-й масс составляет 5–6 с. Синие кривые соответствуют плотности энергии 150 Дж/см². Максимальный уровень потока 4-й массы при плотности энергии 150 Дж/см² превышает в 3 раза максимальный уровень при 100 Дж/см². Стоит отметить, что длительность основного пика десорбции составляет 8–10 с, но далее наблюдается затяжной спадающий фронт и несколько пиков десорбции, что, вероятнее всего, связано с постепенным нагревом близлежащей пленки вольфрама, которое

вносит не более 15% в общее содержание зарегистрированного дейтерия.

На рис. 4 представлены результаты измерения поверхностной плотности атомов дейтерия методом ЛИД–КМС в зависимости от плотности энергии. Интегральная поверхностная плотность вычислялась как разность между интегралом, включающим пик десорбируемых молекул D₂ и HD, и интегралом фонового уровня сигнала за один и тот же временной промежуток. Полученные данные нормировались на площадь лазерного пятна на образце, измеренного по микрофотографиям. Исходя из данных по моделированию нагрева в режиме свободной генерации результат, полученный экспериментально, подтверждает выводы о том, что температура пленки при плотности 50 Дж/см² только достигает температуры начала десорбции дейтерия из пленки. При плотности 100 Дж/см² максимальная температура превосходит температуру начала десорбции на 200–250 К, однако является недостаточной для полной десорбции дейтерия. И в последнем случае при 150 Дж/см² наблюдается максимальный выход дейтерия, а также становится заметным выход дейтерия из окружающей области за счет латеральной диффузии тепла.

Лазерно-индуцированная абляция

Для осуществления лазерной абляции использовалась та же оптическая схема, но лазер работал в режиме модуляции добротности, при котором длительность импульса составляла 12 нс. Порог абляции вольфрама

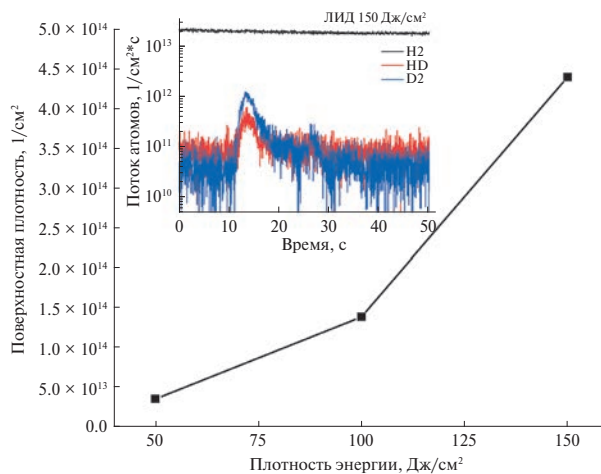


Рис. 4. Зависимость измеренной поверхностной плотности дейтерия от плотности энергии в режиме свободной генерации ($t_{\text{имп}} = 200$ нс). Во вставке представлены временные зависимости для 2-й, 3-й и 4-й масс в случае плотности энергии 150 Дж/см^2 .

для наносекундных импульсов составляет от 1 Дж/см^2 [22] до $3.5\text{--}4 \text{ Дж/см}^2$ [17]. В данной работе были выбраны плотности энергии $5, 10$ и 15 Дж/см^2 . Конфигурация лазера в режиме модуляции добротности позволяет осуществить единственный выстрел, поэтому регистрация сигнала КМС в режиме ЛИА осуществлялась для одиночных импульсов.

На рис. 5 представлена зависимость поверхностной плотности дейтерия от плотности энергии в случае ЛИА в том же масштабе, что и для ЛИД. В отличие от ЛИД, формы пиков десорбции 3-й и 4-й масс во всех трех случаях идентичны за исключением их амплитуд. Во-первых, стоит отметить, что для ЛИА разброс значений поверхностной плотности не такой значительный, как для ЛИД, и может быть связан с различной толщиной пленки вольфрама в разных частях образца. Во-вторых, все 3 значения близки к количеству дейтерия, зарегистрированному методом ЛИД при 150 Дж/см^2 . Для двух методов количество атомов дейтерия, зарегистрированного при максимальной плотности энергии 150 Дж/см^2 для ЛИД и 15 Дж/см^2 для ЛИА, равно $4.0 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-2}$ и $4.3 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-2}$ соответственно.

ВЫВОДЫ

В работе представлены результаты моделирования нагрева вольфрамовой пленки на кремневой подложке лазерным импульсом в режиме

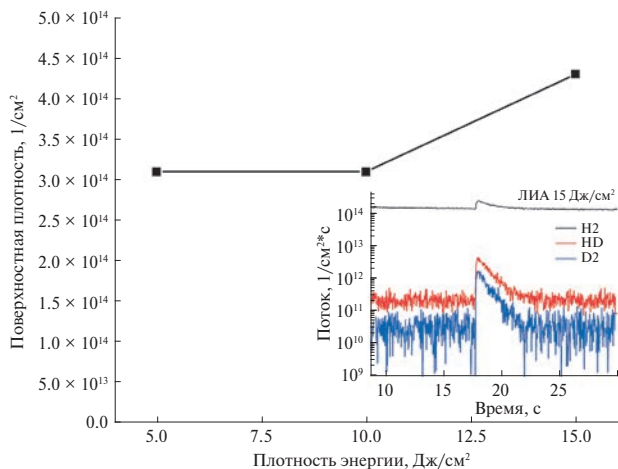


Рис. 5. Зависимость потока дейтерия от плотности энергии лазерного излучения в режиме модуляции добротности ($t_{\text{имп}} = 12$ нс). Во вставке представлены временные зависимости для 2-й, 3-й и 4-й масс в случае плотности энергии 15 Дж/см^2 .

свободной генерации. Показано, что для длительности в режиме свободной генерации импульса 200 нс плотности энергии 150 Дж/см^2 достаточно для нагрева пленки толщиной 1 мкм для полной десорбции дейтерия. Результаты моделирования находятся в хорошем согласии с экспериментальным наблюдением десорбции дейтерия.

Проведено сравнение двух методов ЛИА и ЛИД по количеству регистрируемого дейтерия методом квадрупольной масс-спектрометрии. Показано, что разница при 150 Дж/см^2 для ЛИД и 15 Дж/см^2 для ЛИА составляет всего $6\text{--}7\%$. На следующем этапе работы планируется провести сравнение представленных результатов с данными, полученными классическими методами, такими как термодесорбционная спектроскопия и/или метод ядерных реакций.

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы выражают благодарность заведующему лаборатории лазерной диагностики плазмы и взаимодействия плазмы с поверхностью ФТИ им. А.Ф. Иоффе Евгению Евгеньевичу Мухину за помощь в постановке эксперимента и МРЦ “Нанотехнологии” СПбГУ за проведение структурных исследований.

Статья написана по материалам одноименного доклада на 6-й школе-конференции молодых ученых ИОФ РАН “Прохоровские недели”, 2023 г.

Доклад был рекомендован к публикации по результатам экспертных оценок как один из лучших.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Моделирование лазерного воздействия выполнено при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (госзадание, тема №0034-2019-0001). Макетирование лазерно-индуцированной абляции и десорбции проведено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 22-12-00360). Исследования выполнены при финансовой поддержке Российского научного фонда.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Mukhin E.E. et al.* In situ monitoring hydrogen isotope retention in ITER first wall // *Nuclear Fusion*. 2016. V. 56. № 3. P. 036017. <https://doi.org/10.1088/0029-5515/56/3/036017>
2. *Roth J. et al.* Tritium inventory in ITER plasma-facing materials and tritium removal procedures // *Plasma Physics and Controlled Fusion*. 2008. V. 50. № 10. P. 103001. <https://doi.org/10.1088/0741-3335/50/10/103001>
3. *Родина Н.Д., Морозова Н.Б., Введенский А.В.* Кинетика выделения атомарного водорода и водородопроницаемость сплавов Ag-Pd в щелочной среде // *Конденсированные среды и межфазные границы*. 2020. Т. 22. № 2. С. 96–104. <https://doi.org/10.17308/kcmf.2020.22/2853>
4. *Dellasega D. et al.* Deuterium retention and surface modifications of nanocrystalline tungsten films exposed to high-flux plasma // *J. Nuclear Materials*. 2015. V. 463. P. 989–992. doi: 10.1016/j.jnucmat.2014.11.025
5. *Skinner C.H.* Tritium retention and removal in Tokamaks // *AIP Conference Proc. American Institute of Physics*, 2009. V. 1095. № 1. P. 127–145. <https://doi.org/doi: 10.1063/1.3097310>
6. *Krat S.A. et al.* A setup for study of co-deposited films // *J. Instrumentation*. 2020. V. 15. № 1. P. P01011. <https://doi.org/10.1088/1748-0221/15/01/P01011>
7. *Rubel M. et al.* Efficiency of fuel removal techniques tested on plasma-facing components from the TEXTOR tokamak // *Fusion Engineering and Design*. 2012. V. 87. № 5–6. P. 935–940. <https://doi.org/10.1016/j.fusengdes.2012.02.054>
8. *Katayama K., Nishikawa M., Yamaguchi J.* Isotope effect in hydrogen isotope exchange reaction on first wall materials // *J. Nuclear Science and Technology*. 2002. V. 39. № 4. P. 371–376. <https://doi.org/10.1080/18811248.2002.9715206>
9. *Hodille E.A. et al.* Retention and release of hydrogen isotopes in tungsten plasma-facing components: the role of grain boundaries and the native oxide layer from a joint experiment-simulation integrated approach // *Nuclear Fusion*. 2017. V. 57. № 7. P. 076019. <https://doi.org/10.1088/1741-4326/aa6d24>
10. *Moshkunov K.A. et al.* Air exposure and sample storage time influence on hydrogen release from tungsten // *J. Nuclear Materials*. 2010. V. 404. № 3. P. 174–177. <https://doi.org/10.1016/j.jnucmat.2010.07.011>
11. *Zlobinski M. et al.* Laser induced desorption as tritium retention diagnostic method in ITER // *Fusion Engineering and Design*. 2011. V. 86. № 6–8. P. 1332–1335. <https://doi.org/10.1016/j.fusengdes.2011.02.030>
12. *Paris P. et al.* Comparison of LIBS results on ITER-relevant samples obtained by nanosecond and picosecond lasers // *Nuclear Materials and Energy*. 2019. V. 18. P. 1–5. <https://doi.org/10.1016/j.nme.2018.11.018>
13. *Maddaluno G. et al.* Detection by LIBS of the deuterium retained in the FTU toroidal limiter // *Nuclear Materials and Energy*. 2019. V. 18. P. 208–211. <https://doi.org/10.1016/j.nme.2018.12.029>
14. *Gierse N. et al.* In situ characterisation of hydrocarbon layers in TEXTOR by laser induced ablation and laser induced breakdown spectroscopy // *J. Nuclear Materials*. 2011. V. 415. № 1. P. S1195–S1198. <https://doi.org/10.1016/j.jnucmat.2010.11.055>
15. *Van Der Meiden H.J. et al.* Monitoring of tritium and impurities in the first wall of fusion devices using a LIBS based diagnostic // *Nuclear Fusion*. 2021. V. 61. № 12. P. 125001. <https://doi.org/10.1088/1741-4326/ac31d6>
16. *Razdobarin G.T. et al.* Detecting dust on plasma-facing components in a next-step tokamak using a laser-induced breakdown spectroscopy technique // *Fusion Science and Technology*. 2002. V. 41. № 1. P. 32–43. <https://doi.org/10.13182/FST02-A198>
17. *Liu J. et al.* Study of spectral intensity of the laser ablated tungsten plasma and ablation mass at various laser spot sizes and laser fluence in vacuum environment // *Spectrochimica Acta Part B: Atomic Spectroscopy*. 2023. V. 199. P. 106569. <https://doi.org/10.1016/j.sab.2022.106569>
18. *Zhang D.L.* Processing of advanced materials using high-energy mechanical milling // *Progress in Materials Science*. 2004. V. 49. № 3–4. P. 537–560. [https://doi.org/10.1016/S0079-6425\(03\)00034-3](https://doi.org/10.1016/S0079-6425(03)00034-3)
19. *Yehia-Alexe S.A. et al.* Considerations on hydrogen isotopes release from thin films by laser induced ablation and laser induced desorption techniques // *Spectrochimica Acta Part B: Atomic Spectroscopy*. 2023. V. 208. P. 106774. <https://doi.org/10.1016/j.sab.2023.106774>

20. Zlobinski M. *et al.* Laser-Induced Desorption of co-deposited Deuterium in Beryllium Layers on Tungsten // Nuclear Materials and Energy. 2019. V. 19. P. 503–509.
<https://doi.org/10.1016/j.nme.2019.04.007>
21. Krat S. *et al.* Tungsten-deuterium co-deposition: Experiment and analytical description // Vacuum. 2018. V. 149. P. 23–28.
<https://doi.org/10.1016/j.vacuum.2017.12.004>
22. Kajita S. *et al.* Plasma-assisted laser ablation of tungsten: Reduction in ablation power threshold due to bursting of holes/bubbles // Applied Physics Letters. 2007. V. 91. №. 26.
<https://doi.org/10.1063/1.2824873>

LASER-INDUCED ABLATION AND DESORPTION OF DEUTERIUM-CONTAINING TUNGSTEN FILMS

E. V. Smirnova^{a,c}, O. S. Medvedev^{a,b}, A. G. Razdobarin^{a,b}, D. I. Elets^{a,b,c},
 L. A. Snigirev^{a,c}, I. R. Shubin^{a,c}

^aA.F. Ioffe Physicotechnical Institute, Russian Academy of Sciences, St. Petersburg, Russia

^bNational Research Nuclear University “MEPhI”, Moscow, Russia

^cSt. Petersburg’s State University, St. Petersburg, Russia

Presented by Academician of the RAS N.N. Rozanov

The laser-induced desorption (LID) and laser-induced ablation (LIA) methods are compared with each other regarding the possibility of measurements an absolute quantitative analysis of hydrogen isotopes content in first wall materials of fusion reactors. Deuterium containing tungsten films with a thickness of 300–400 nm on a silicon substrate were used as model samples. To implement the LID, the samples were irradiated with laser pulses with a duration of 200 microseconds and an energy density of 50–150 J/cm², for LIA – 12 ns and 5–15 J/cm². The registration of residual gases was carried out by quadrupole mass spectrometry. Computer simulation of laser pulse heating was performed for the LID process. The simulation results and experimental data showed that heating at an energy density of 100–150 J/cm² is sufficient to degas tungsten films of the studied thickness. A comparison of the amount of desorbed deuterium in the LID (150 J/cm²) and LIA (15 J/cm²) modes shows that it is identical within the measurement error and is equal to $4.15 \pm 0.15 \cdot 10^{14}$ cm⁻².

Keywords: laser-induced ablation, laser-induced desorption, modeling, first wall, tokamak, tritium accumulation diagnostic

УДК 535-36 + 535.34 + 535.36

АКУСТИЧЕСКИ ИНДУЦИРОВАННАЯ ПРОЗРАЧНОСТЬ ДЛЯ ГАММА-ФОТОНОВ И НЕКОТОРЫЕ ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

© 2024 г. И. Р. Хайрулин^{1,*}, Е. В. Радионычев^{1,**}

Представлено академиком РАН А.Г. Литваком 06.12.2023 г.

Поступило 06.12.2023 г.

После доработки 06.12.2023 г.

Принято к публикации 07.02.2024 г.

Рассматривается эффект возникновения прозрачности резонансно поглощающей среды для электромагнитного излучения посредством возбуждения в среде поршнеобразных акустических колебаний вдоль направления распространения излучения — акустически индуцированной прозрачности. Обсуждаются физический механизм и основные условия реализации эффекта, а также его применения для уменьшения скорости распространения фотонов гамма-диапазона и восстановления по требованию произвольной части однофотонного волнового пакета, резонансно поглощаемого средой.

Ключевые слова: акустически индуцированная прозрачность, рентгеновское и гамма-излучение, замедление фотонов, эффект Мёссбауэра

DOI: 10.31857/S2686740024020052, EDN: KHMCLK

Индукцированная прозрачность оптически толстой среды для резонансного электромагнитного излучения является мощным инструментом управления взаимодействием между средой и полем. Явление индуцированной прозрачности на основе различных физических механизмов продемонстрировано в различных физических системах для излучения от микроволнового до гамма-диапазона [1–15]. Большинство соответствующих исследований было стимулировано открытием эффекта электромагнитно-индуцированной прозрачности (ЭИП) [2, 3], который в оптическом диапазоне является основой наиболее перспективных для приложений методов управления одиночными фотонами (оптические линии задержки, обработка квантовой информации, магнитометрия и т.п.).

Эффект ЭИП имеет место в квантованных трехуровневых и многоуровневых средах. Он

состоит в существенном уменьшении резонансного поглощения среды в пределах индуцированного узкого спектрального окна на фоне резонансной линии поглощения вследствие воздействия на среду управляющего поля, которое совместно с “рабочим” (пробным) полем возбуждает квантовую когерентность (недиагональный элемент матрицы плотности) на переходе $|1\rangle \leftrightarrow |2\rangle$ среды (рис. 1).

Благодаря крутому наклону резонансной дисперсии среды внутри индуцированного узкого спектрального окна прозрачности возможно реализовать сильное замедление резонансного пробного поля оптического диапазона. Например, в работе [12] реализовано уменьшение групповой скорости распространения микросекундного импульса в газе атомов натрия до 17 м/с при температуре несколько микрокельвинов. Групповая скорость 90 м/с наблюдалась в газе атомов рубидия при температуре около 360 К [13], а также 45 м/с в кристалле $\text{Pr:Y}_2\text{SiO}_5$ при температуре 5 К [14]. При определенных условиях возможно и вовсе “остановить свет” в среде, благодаря совместному действию

¹Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики им. А.В. Гапонова-Грехова
Российской академии наук, Нижний Новгород, Россия

*E-mail: khairulinir@ipfran.ru

**E-mail: radion@appl.sci-nnov.ru

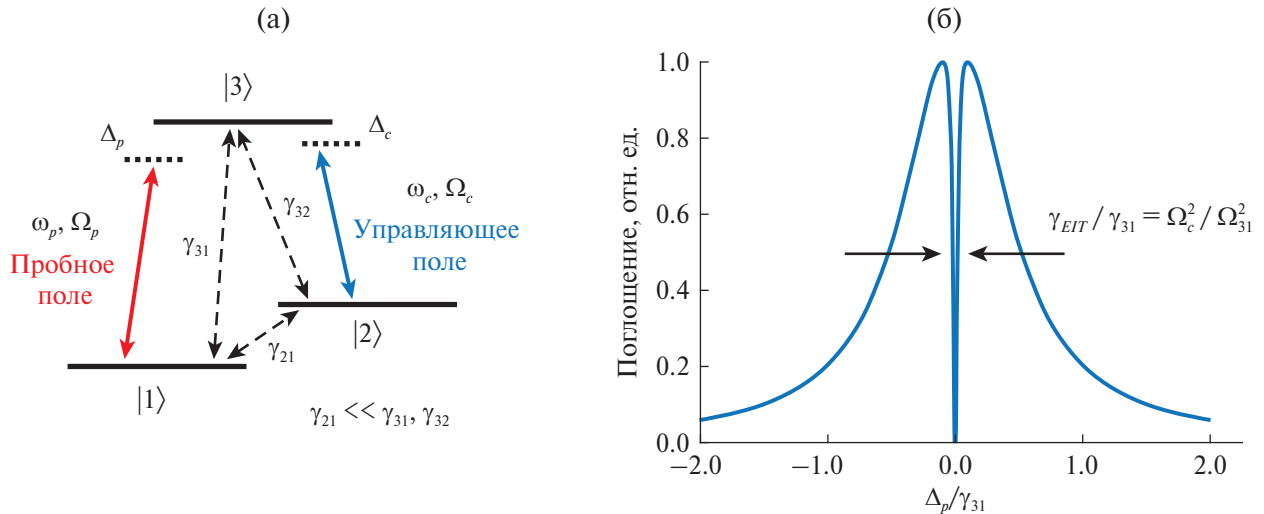


Рис. 1. а – Общая энергетическая схема возбуждения квантовой когерентности на переходе $|1\rangle \leftrightarrow |2\rangle$ трехуровневой среды, обуславливающей эффект ЭИП, и б – спектральное окно ЭИП внутри резонансной спектральной линии поглощения пробного поля на переходе $|1\rangle \leftrightarrow |3\rangle$. Ω_p, Ω_c – частоты Раби пробного и управляющего полей соответственно, пропорциональные амплитудам этих полей; ω_p, ω_c – несущие частоты пробного и управляющего полей; γ_{mn} ($mn = 21, 31, 32$) – скорости релаксации соответствующих квантовых переходов, Δ_p, Δ_c – отстройки несущих частот полей от частот соответствующих квантовых переходов. Рисунок 1б построен для случая $\gamma_{21} \ll \gamma_{31}, \gamma_{32}$, $\Delta_c = 0$ и $\Omega_c/\gamma_{31} = 0.2$; также на нем приведена оценка ширины индуцированного спектрального окна ЭИП в этом случае.

временной и пространственной дисперсии среды [15].

Однако для большинства экспериментов по ЭИП в оптическом диапазоне необходимо использовать криогенные температуры для сужения спектральных линий квантовых переходов среды. Кроме того, для реализации ЭИП необходимо также использовать достаточно интенсивные спектрально узкие когерентные источники. Такие источники имеются в оптическом диапазоне, однако на сегодняшний день отсутствуют в рентгеновском и гамма-диапазонах. Это не позволяет непосредственно реализовать ЭИП в высокочастотной области спектра, включая рентгеновский и гамма-диапазоны.

АКУСТИЧЕСКИ ИНДУЦИРОВАННАЯ ПРОЗРАЧНОСТЬ

Альтернативным способом реализации индуцированной прозрачности в рентгеновском и гамма-диапазонах является эффект акустически индуцированной прозрачности (АИП) [16–19], который не требует использования интенсивных когерентных управляющих полей и криогенных температур, а также может быть реализован даже в двухуровневой среде.

Эффект АИП состоит в просветлении резонансной поглощающей среды вследствие акустических колебаний среды как целого (поршнеобразные колебания) вдоль направления распространения излучения. Рассмотрим модельную двухуровневую поглощающую среду с однородно уширенной спектральной линией (рис. 2а). Спектр поглощения такой среды имеет вид лоренцевой контуры с центральной частотой ω_{21} (рис. 2б, черная штриховая линия). Пусть поглотитель совершает гармонические поршнеобразные колебания с частотой Ω и амплитудой R вдоль направления распространения резонансного излучения с частотой ω (рис. 2а).

Тогда вследствие эффекта Доплера частота резонансного перехода ω_{21} будет гармонически изменяться во времени (рис. 2а). Это может кардинально изменить отклик среды на монохроматическое поле $E = E_0 e^{-i(\omega t - kz)}$, где $k = \omega/c$. Действительно, индуцированная полем когерентность ρ_{21} колеблющегося поглотителя удовлетворяет уравнению [16–19]

$$\frac{\partial \rho_{21}}{\partial t} + i[\omega_{21} + kR\Omega \cos(\Omega t + \vartheta)]\rho_{21} - \frac{i}{\hbar} n_{12} d_{21} E = -\gamma_{21} \rho_{21}, \quad (1)$$

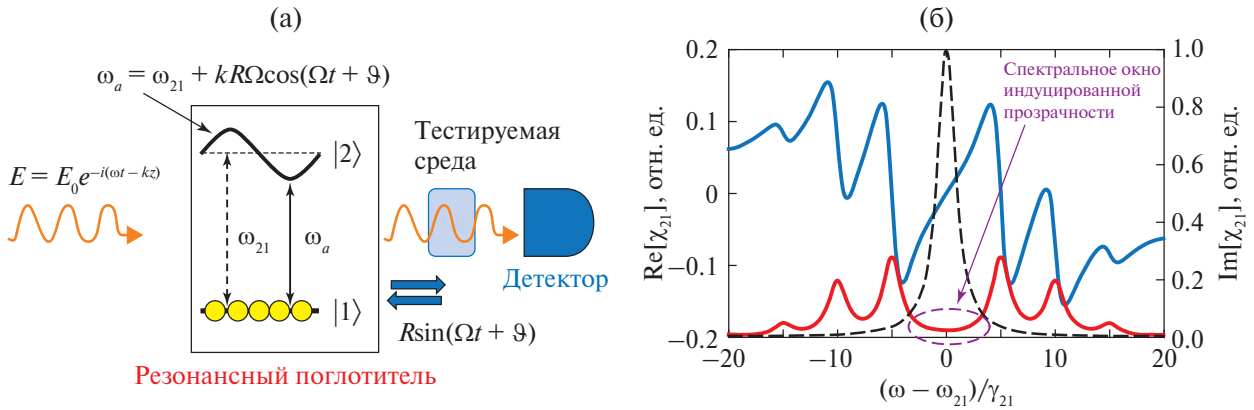


Рис. 2. а – Схема энергетических уровней двухуровневого поглотителя, совершающего поршнеобразные гармонические колебания вдоль направления распространения электромагнитного поля, а также схема предлагаемого метода мёссбауэровской спектроскопии тестируемой среды с временным разрешением; б – спектр резонансной восприимчивости такого поглотителя в случае АИП. Поглощение (красная сплошная линия, правая ось) и дисперсия (синяя сплошная линия, левая ось) построены согласно (8) при $p = p_1 = 2.4$ и $\Omega/\gamma_{21} = 5$. Черная штриховая линия (правая ось) – спектральная линия неподвижного поглотителя, построенная в соответствии с (8) при $p = 0$. Черная штриховая линия также может иллюстрировать спектр падающего на среду импульса поля с шириной $2\gamma_{21}$.

где $d_{12} = d_{21}^*$ и $n_{12} = \rho_{11} - \rho_{22}$ – эффективный дипольный момент и разность населенностей между состояниями $|1\rangle$ и $|2\rangle$, γ_{21} – полуширина спектральной линии резонансного перехода, ϑ – начальная фаза колебаний поглотителя, и предполагается, что $\Omega \ll \omega_{21}, \omega$. Решение уравнения (1) можно записать в виде

$$\rho_{21} = \rho_{21}^{(0)} + \sum_{\substack{q=-\infty \\ q \neq 0}}^{\infty} \rho_{21}^{(q)}, \quad (2)$$

где когерентность

$$\rho_{21}^{(0)} = \frac{i}{\hbar} n_{12} d_{21} E_0 e^{-i\omega t + ikz} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \eta_n J_n^2(p) \quad (3)$$

описывает отклик поглотителя на частоте ω падающего поля, а величина

$$\rho_{21}^{(q)} = \frac{i}{\hbar} n_{12} d_{21} E_0 e^{-iq\vartheta - i(\omega + q\Omega)t + ikz} \times \sum_{n=-\infty}^{\infty} \eta_n J_n(p) J_{n+q}(p) \quad (4)$$

описывает возникновение когерентности, а следовательно, поля на комбинационных частотах $\omega_q = \omega + q\Omega$, $q \neq 0$. Амплитуды когерентностей $\rho_{21}^{(q)}$, $q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, определяются

спектральными свойствами резонансного квантового перехода поглотителя,

$$\eta_n = \frac{1}{\gamma_{21} + i(\omega_{21} - \omega + n\Omega)}, \quad (5)$$

а также индексом модуляции $p = kR$, который задает величины функций Бесселя первого рода соответствующего порядка $J_n(p)$. Таким образом, в общем случае падающее монохроматическое поле становится на выходе из поглотителя многокомпонентным. При определенных значениях индекса модуляции амплитуды когерентностей $\rho_{21}^{(q)}$ на комбинационных частотах могут быть достаточно большими, что позволяет преобразовать падающее монохроматическое или квазимонохроматическое излучение в последовательность ультракоротких импульсов, как это было показано в работах [16, 20–22]. Однако если амплитуда осцилляций поглотителя принимает значения

$$R = R_i, \text{ где } R_1 \approx 0.38\lambda, \quad R_2 \approx 0.88\lambda, \quad (6) \\ R_3 \approx 1.37\lambda, \dots,$$

где $\lambda = 2\pi/k$, соответствующие индексу модуляции

$$p = p_i, \text{ где } p_1 \approx 2.4, \quad p_2 \approx 5.5, \quad p_3 \approx 8.6, \dots, \quad (7)$$

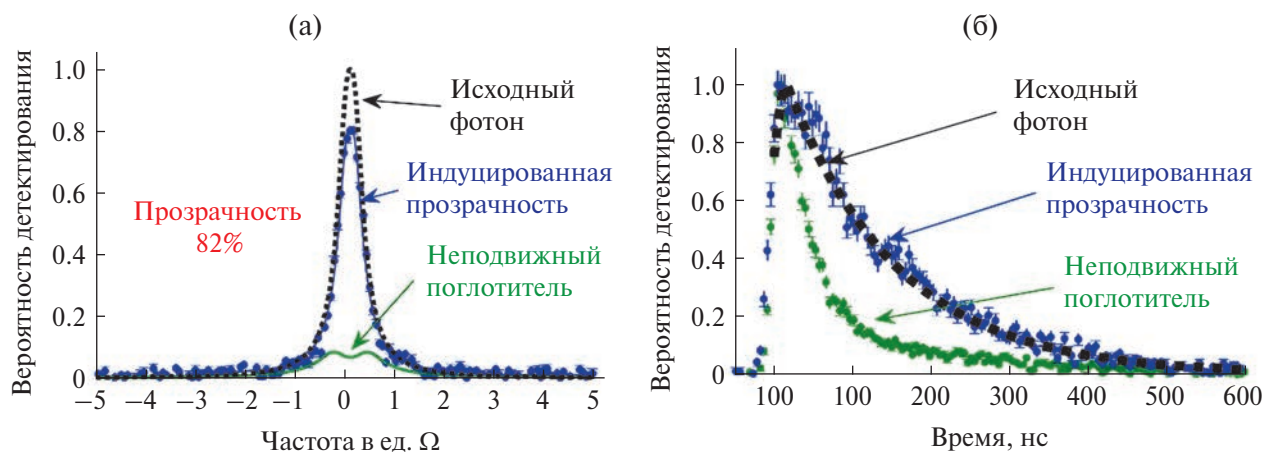


Рис. 3. Измеренные в [17] спектр (а) и нормированная интенсивность (б) однофотонного волнового пакета, пропорциональные соответственно спектральной и временной зависимостям вероятности детектирования фотонов с энергией 14.4 кэВ, испускаемых радиоактивным мёссбауэровским источником ^{57}Co , на выходе из фольги нержавеющей стали с естественным содержанием ядер ^{57}Fe в условиях АИП. Синие и зеленые точки с доверительными интервалами – измеренные значения в условиях АИП и в случае неподвижного поглотителя соответственно, черные пунктирные линии – исходный однофотонный волновой пакет, зеленая сплошная линия на (а) – спектр однофотонного волнового пакета на выходе из неподвижного поглотителя. Параметры эксперимента [17] следующие: полная ширина спектральных линий источника и поглотителя – 1.36 МГц и 1.7 МГц соответственно; оптическая толщина поглотителя – 5.2; частота и амплитуда колебаний фольги – 9.8 МГц и 0.33 \AA соответственно.

то в формулах (3) и (4) имеем $J_0(p_i) \approx 0$. В этом случае, если $\Omega > \gamma_{21}$, что, как правило, соответствует ультразвуковым акустическим колебаниям поглотителя, то, как следует из (2)–(5), возбуждаемая резонансным полем $\omega = \omega_{21}$ когерентность ρ_{21} мала на всех частотах и уменьшается с увеличением частоты колебаний поглотителя за счет членов $\gamma_{21}/(n\Omega)$ в (5). Вследствие этого среда становится прозрачной для резонансного поля, а соотношения (6), (7) являются необходимыми условиями АИП (более подробно см. [16–19]). Поскольку среда в условиях АИП практически не взаимодействует с полем, то поле на выходе из среды сохраняет свои спектральные и временные характеристики.

Как следует из (6), реализация АИП для излучения оптического диапазона трудно реализуема, поскольку требует значительных величин амплитуды ($R \sim 0.2 \text{ мкм}$ для длины волны $\lambda \sim 600 \text{ нм}$) и частоты $(\Omega/(2\pi)) > 1 \text{ ГГц}$ колебаний среды вследствие относительно больших длин волн излучения и большого уширения соответствующих спектральных линий в твердом теле. Эти ограничения отсутствуют в рентгеновском и гамма-диапазонах благодаря малой длине волны излучения и очень узким спектральным линиям мёссбауэровских

(взаимодействующих с излучением без отдачи) квантовых переходов ядер твердотельной среды.

Эффект АИП был экспериментально продемонстрирован при комнатной температуре для одиночных фотонов с энергией 14.4 кэВ, испускаемых радиоактивным мёссбауэровским источником ^{57}Co и распространяющихся в среде ядер ^{57}Fe , входящих в состав фольги нержавеющей стали толщиной 25 мкм с естественным (около 2%) содержанием нуклида ^{57}Fe во фракции железа [17]. Вибрация фольги с частотой 9.8 МГц и амплитудой 0.33 \AA позволила примерно в 150 раз уменьшить резонансное поглощение фотонов. При этом как спектральные, так и временные характеристики прошедших сквозь фольгу фотонов были сохранены благодаря АИП (рис. 3).

ЗАМЕДЛЕНИЕ ИМПУЛЬСА ПОЛЯ В СРЕДЕ В УСЛОВИЯХ АКУСТИЧЕСКИ ИНДУЦИРОВАННОЙ ПРОЗРАЧНОСТИ

Рассмотрим резонансную восприимчивость среды $\chi_{21}(\omega)$ на частоте падающего поля ω для случая $p = p_1$. Учитывая соотношение между резонансной поляризацией P_{21} , когерентностью $\rho_{21}^{(0)}$ и полем E , $P_{21} = f_a N d_{12} \rho_{21}^{(0)} = \chi_{21}(\omega) E_0 e^{-i\omega t}$

(где N – концентрация резонансно поглощающих частиц, f_a – фактор Мёссбауэра–Лэмба, учитывающий вероятность поглощения излучения без отдачи в случае взаимодействия гамма-излучения с ядрами атомов), получим непосредственно из (3), (5):

$$\chi_{21}(\omega) = \frac{f_a N n_{12} |d_{21}|^2}{\hbar} \times \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2(p_1) \frac{\omega_{21} - \omega + n\Omega + i\gamma_{21}}{(\omega_{21} - \omega + n\Omega)^2 + \gamma_{21}^2}. \quad (8)$$

Как показано на рис. 2б, спектральное окно АИП сопровождается достаточно большим наклоном дисперсионной кривой в окрестности резонанса. Аналогично случаю ЭИП, такой наклон дисперсии приводит к существенному уменьшению групповой скорости распространения резонансного излучения в среде. Групповая скорость тем меньше, чем меньше частота колебаний поглотителя. Однако с уменьшением частоты колебаний растет поглощение поля в окне прозрачности. Кроме этого, в случае достаточно короткого импульса с широким спектром возникает неравномерность поглощения и дисперсии спектральных составляющих поля (рис. 2б, черная штриховая линия), что приводит к искажению огибающей импульса.

Таким образом, можно определить минимальную частоту колебаний поглотителя, обеспечивающую наименьшую скорость распространения волнового пакета в среде и одновременно достаточно небольшие искажения. Она примерно равна сумме ширин спектральных линий источника поля и поглотителя [19].

С учетом этого в [19] было показано, что однофотонный импульс, испускаемый синхротронным мёссбауэровским источником Европейского центра синхротронного излучения (European Synchrotron Radiation Facility, ESRF, Франция [23]) длительностью на полувысоте 100 нс (с шириной спектра 3.4 МГц) может быть задержан на 42 нс с сохранением 73% энергии импульса при комнатной температуре в фольге нержавеющей стали $\text{Fe}_{70}\text{Cr}_{19}\text{Ni}_{11}$, на 95% обогащенной нуклидом ^{57}Fe во фракции железа, толщиной 1.2 мкм, колеблющейся с частотой 3.36 МГц и амплитудой 0.33 Å. Соответствующая скорость распространения однофотонного волнового пакета составляет 30 м/с.

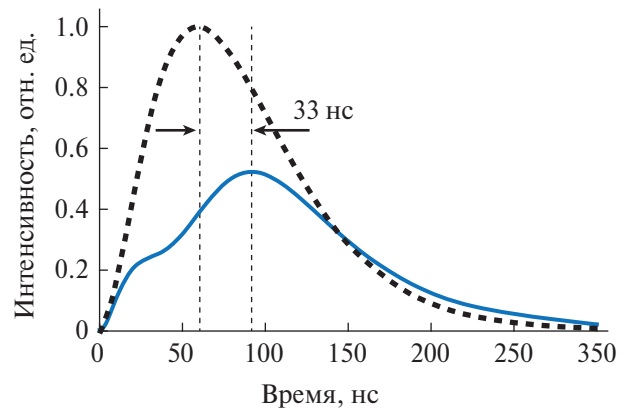


Рис. 4. Нормированная интенсивность (синяя линия) однофотонного волнового пакета с энергией фотонов 14.4 кэВ от синхротронного мёссбауэровского источника ESRF на выходе из фольги нержавеющей стали в условиях АИП. Черная пунктирная линия соответствует исходному фотону. Полная ширина спектральной линии поглотителя – 1.7 МГц; оптическая толщина поглотителя – 13, частота колебаний поглотителя $\Omega/(2\pi) = 3.81$ МГц. Площадь под каждой кривой пропорциональна энергии соответствующего импульса.

Отметим, что в [19] был рассмотрен предельный случай естественного уширения резонансной спектральной линии ^{57}Fe , $2\gamma_{21} = 1.13$ МГц. В условиях эксперимента [17] ширина указанной спектральной линии в фольге нержавеющей стали при комнатной температуре составляла $2\gamma_{21} = 1.7$ МГц. Соответственно, для эффективного уменьшения скорости распространения волнового пакета в такой среде при достаточно небольших его искажениях необходимо увеличить минимальную частоту колебаний фольги до 3.81 МГц. Это приведет к увеличению скорости распространения однофотонного импульса до 38 м/с и уменьшению его задержки в среде до 33 нс (рис. 4).

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ПО ТРЕБОВАНИЮ ЧАСТИ ВОЛНОВОГО ПАКЕТА ПОСРЕДСТВОМ ЗАДЕРЖАННОЙ АКУСТИЧЕСКИ ИНДУЦИРОВАННОЙ ПРОЗРАЧНОСТИ

Акустически индуцированную прозрачность можно также использовать для восстановления по требованию произвольной части волнового пакета. В качестве примера рассмотрим однофотонный волновой пакет с энергией фотона 14.4 кэВ, получаемый в экспериментах

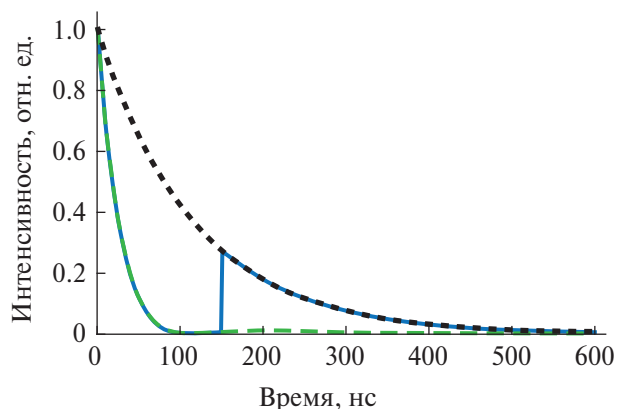


Рис. 5. Временная зависимость нормированной интенсивности однофотонного волнового пакета с энергией фотона 14.4 кэВ, излучаемого радиоактивным мёссбауэровским источником ^{57}Co с шириной линии 1.36 МГц, в окрестности его несущей частоты на выходе из фольги нержавеющей стали с естественным содержанием ядер ^{57}Fe , которая начинает осциллировать в режиме АИП ($p = 2.41$, $\Omega/(2\pi) = 100$ МГц) в момент времени $t_{start} = 150$ нс (синяя сплошная линия), а также на входе в поглотитель (чёрная пунктирная линия) и на выходе из этого же, но покоящегося поглотителя (зелёная штриховая линия). Оптическая толщина поглотителя — 5.2, ширина спектральной линии поглощения — $2\gamma_{21} = 1.7$ МГц.

с радиоактивным источником ^{57}Co и поглотителем в виде вышеупомянутой фольги нержавеющей стали с естественным содержанием ядер ^{57}Fe [17, 20, 21]. Такой волновой пакет имеет лоренцевый спектр с шириной 1.36 МГц и соответствующую огибающую в форме резкого фронта и экспоненциально спадающего хвоста с длительностью по полувысоте интенсивности примерно 80 нс (рис. 3б и рис. 5, чёрная пунктирная линия).

Будем полагать, что изначально поглотитель покоится, а в произвольный момент времени t_{start} , отсчитываемый от фронта импульса, поглотитель начинает совершать гармонические колебания в условиях АИП. Тогда до момента включения колебаний испущенный источником однофотонный волновой пакет будет испытывать резонансное поглощение вследствие возбуждения противофазной ядерной поляризации поглотителя на частотах падающего поля, которая деструктивно интерферирует с возбуждающим эту поляризацию полем (рис. 5, синяя линия).

Включаемые в момент t_{start} колебания поглотителя приводят к подавлению поляризации ядер в окрестности частоты падающего волнового пакета и появлению отклика ядер на комбинационных частотах, которые отстоят от частоты резонанса на целое число частот колебаний. Таким образом, при высокой частоте колебаний среды $\Omega/\gamma_{21} \gg 1$ резонансный поглотитель становится прозрачным для резонансного поля, и непоглощённая часть однофотонного волнового пакета выходит из поглотителя с сохранением экспоненциальной формы огибающей (рис. 5, синяя линия) и, как следствие, лоренцевым контуром спектральной линии исходного однофотонного импульса. В этом смысле можно говорить о восстановлении по требованию рассматриваемого однофотонного волнового пакета.

Описанный метод восстановления однофотонного волнового пакета радиоактивного источника ^{57}Co может быть использован для проведения мёссбауэровской ядерной спектроскопии с временным разрешением. Действительно, если после поглотителя поместить исследуемую среду-мишень, допированную ядрами ^{57}Fe , как это делается в традиционной мёссбауэровской спектроскопии (рис. 1), то благодаря задержанной АИП только восстановленная в момент времени t_{start} часть однофотонного волнового пакета будет взаимодействовать с ядрами ^{57}Fe мишени. И если в среде в течение измерений происходят процессы, приводящие к изменению состояний ядер ^{57}Fe , то можно исследовать их динамику путем измерения как огибающей однофотонного волнового пакета, так и его спектра на выходе из тестируемой среды при различных значениях времени задержки t_{start} .

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, рассмотренный эффект акустически индуцированной прозрачности является перспективным аналогом электромагнитно-индуцированной прозрачности в рентгеновском и гамма-диапазонах. Он позволяет реализовать эффективную задержку излучения в среде при комнатной температуре, обусловленную значительным уменьшением скорости распространения импульса поля, а

также восстановить по требованию его спектрально-временные характеристики.

БЛАГОДАРНОСТИ

Статья написана по материалам одноименного доклада на 6-й школе-конференции молодых ученых ИОФ РАН “Прохоровские недели”, 2023 г. Доклад был рекомендован к публикации по результатам экспертных оценок как один из лучших.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (госзадание ИПФ РАН, проект № 2024-FFUF-2024-0030).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *McCall S.L., Hahn E.L.* Self-Induced Transparency by Pulsed Coherent Light // *Phys. Rev. Lett.* 1967. V. 18 (21). P. 908–911.
2. *Kocharovskaya O., Khanin Ya.I.* Population trapping and coherent bleaching of a three-level medium by a periodic train of ultrashort pulses // *Sov. Phys. JETP.* 1986. V. 63 (5). P. 945–950.
3. *Boller K.J., Imamoglu A., Harris S.E.* Observation of electromagnetically induced transparency // *Phys. Rev. Lett.* 1991. V. 66 (20). P. 2593–2596.
4. *Kocharovskaya O., Radeonychev Y.V.* Spontaneous emission from the ground atomic state due to its crossing with the dynamic Stark level // *Foundations of Physics.* 1998. V. 28 (4). P. 561–584.
5. *Saglamyurek E., Hrushevskiy T., Rastogi A., Heshami K., LeBlanc L.J.* Coherent storage and manipulation of broadband photons via dynamically controlled Autler–Townes splitting // *Nature Photonics.* 2018. V. 12. P. 774–782.
6. *Litvak A.G., Tokman M.D.* Electromagnetically Induced Transparency in Ensembles of Classical Oscillators // *Phys. Rev. Lett.* 2002. V. 88 (9). 095003(4).
7. *Coussement R., Rostovtsev Y., Odeurs J., Neyens G., Muramatsu H., Gheysen S., Callens R., Vyvey K., Kozyreff G., Mandel P., Shakhmurov R., Kocharovskaya O.* Controlling Absorption of Gamma Radiation via Nuclear Level Anticrossing // *Phys. Rev. Lett.* 2002. V. 89 (10). 107601(4).
8. *Totsuka K., Kobayashi N., Tomita M.* Slow light in coupled-resonator-induced transparency // *Phys. Rev. Lett.* 2007. V. 98 (21). 213904(4).
9. *Zhang S., Genov D., Wang Y., Liu M., Zang X.* Plasmon-induced transparency in metamaterials // *Phys. Rev. Lett.* 2008. V. 101 (4). 047401(4).
10. *Weis S., Riviere R., Deléglise S., Gavartin E., Arcizet O., Schliesser A., Kippenberg T.J.* Optomechanically Induced Transparency // *Science.* 2010. V. 330 (6010). P. 1520–1523.
11. *Röhlsberger R., Wille H.-C., Schlage K., Sahoo B.* Electromagnetically induced transparency with resonant nuclei in a cavity // *Nature.* 2012. V. 482. P. 199–203.
12. *Hau L.V., Harris S.E., Dutton Z., Behroozi C.H.* Light speed reduction to 17 metres per second in an ultracold atomic gas // *Nature.* 1999. V. 397. P. 594–598.
13. *Kash M.M., Sautenkov V.A., Zibrov A.S., Hollberg L., Welch G.R., Lukin M.D., Rostovtsev Y., Fry E.S., Scully M.O.* Ultraslow group velocity and enhanced nonlinear optical effects in a coherently driven hot atomic gas // *Phys. Rev. Lett.* 1999. V. 82 (26). P. 5229–5232.
14. *Turukhin A.V., Sudarshanam V.S., Shahriar M.S., Musser J.A., Ham B.S., Hemmer P.R.* Observation of ultraslow and stored light pulses in a solid // *Phys. Rev. Lett.* 2002. V. 88 (2). 023602(4).
15. *Kocharovskaya O., Rostovtsev Y., Scully M.O.* Stopping Light via Hot Atoms // *Phys. Rev. Lett.* 2001. V. 86 (4). P. 628–931.
16. *Radeonychev Y.V., Tokman M.D., Litvak A.G., Kocharovskaya O.* Acoustically induced transparency in optically dense resonance medium // *Phys. Rev. Lett.* 2006. V. 96 (9). 093602(4).
17. *Radeonychev Y.V., Khairulin I.R., Vagizov F.G., Scully M., Kocharovskaya O.* Observation of Acoustically Induced Transparency for γ -Ray Photons // *Phys. Rev. Lett.* 2020. V. 124 (16). 163602(7).
18. *Radeonychev Y.V., Khairulin I.R., Kocharovskaya O.* On the Possibility of Propagation of Gamma-Ray Photons at a Velocity Less Than 6 m/s at Room Temperature by Means of Acoustically Induced Transparency // *JETP Letters.* 2021. V. 114 (12). P. 729–736.
19. *Khairulin I.R., Radeonychev Y.V., Kocharovskaya O.* Slowing down x-ray photons in a vibrating recoilless resonant absorber // *Scientific Reports.* 2022. V. 12. P. 20270(19).
20. *Vagizov F., Antonov V., Radeonychev Y.V., Shakhmurov R.N., Kocharovskaya O.* Coherent Control of the Waveforms of Recoilless γ -Photons // *Nature.* 2014. V. 508 (7494). P. 80–83.
21. *Shakhmurov R.N., Vagizov F.G., Antonov V.A., Radeonychev Y.V., Scully M.O., Kocharovskaya O.* Transformation of a single-photon field into bunches of pulses // *Phys. Rev. A.* 2015. V. 92 (2). 023836(15).
22. *Khairulin I.R., Antonov V.A., Radeonychev Y.V., Kocharovskaya O.* Ultimate capabilities for compression of the waveform of a recoilless γ -ray photon into a pulse sequence in an optically deep vibrating resonant absorber // *Phys. Rev. A.* 2018. V. 98 (4). 043860(15).
23. *Potapkin V., Chumakov A.I., Smirnov G.V., Celse J-Ph., Ruffer R., McCammon C., Dubrovinsky L.* A ^{57}Fe synchrotron Mössbauer source at the ESRF // *J. Synchrotron Radiation.* 2012. V. 19 (4). P. 559–569.

ACOUSTICALLY INDUCED TRANSPARANCY FOR GAMMA-RAY PHOTONS AND SOME OF ITS APPLICATIONS

I. R. Khairulin^a, Y. V. Radeonychev^a

*^aFederal Research Center A.V. Gaponov-Grekhov Institute of Applied Physics
of the Russian Academy of Sciences, Nizhny Novgorod, Russia*

In this paper, we consider the effect of the emergence of transparency of a resonantly absorbing medium for electromagnetic radiation due to the excitation of piston-like acoustic oscillations of the medium along the direction of radiation propagation – acoustically induced transparency. The physical mechanism and basic conditions for the implementation of the effect are discussed, as well as its application to reduce the propagation velocity of gamma-ray photons and on-demand recovery of an arbitrary part of a single-photon wave packet resonantly absorbed in the medium.

Keywords: acoustically induced transparency, x-ray and gamma-ray radiation, slowing down photons, Mössbauer effect

УДК 536.2; 544.012

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ И ГРАНИЦЫ ИЗМЕНЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В ДИСПЕРСНЫХ СРЕДАХ

© 2024 г. Б. В. Бошнятов^{1,*}

Представлено академиком РАН А.М. Липановым 14.11.2023 г.

Поступило 21.11.2023 г.

После доработки 21.11.2023 г.

Принято к публикации 12.02.2024 г.

Используя наиболее общие физические принципы локальности и симметрии, получены точные решения для коэффициента теплопроводности двухфазной дисперсной среды. Два решения определяют известные границы Хашина–Штрикмана. Третье решение, инвариантное относительно преобразования инверсии фаз, существенно сужает границы Хашина–Штрикмана, что подтверждается сравнением с многочисленными экспериментами других авторов. Показано, что учет дистанционного взаимодействия дисперсных частиц при их повышенной концентрации лишь незначительно (менее 3%) влияет на конечный результат.

Ключевые слова: двухфазная дисперсная среда, точные решения, эффективный коэффициент теплопроводности, взаимодействие дисперсных частиц

DOI: 10.31857/S2686740024020067, EDN: KHHSDC

В последние годы в связи с созданием технологий и изделий нового поколения существенно возрос интерес к использованию в промышленности микро- и нанодисперсных сред [1, 2]. Физические свойства таких структурно неоднородных сред можно характеризовать эффективными параметрами, усредненными по представительному объему Ω , линейные размеры которого находятся в диапазоне $l \ll \Omega^{1/3} \ll L$, где l – микромасштаб структурных неоднородностей, L – масштаб макроскопических неоднородностей в среде после усреднения. Далее усреднение локальных физических величин по объему Ω будем обозначать угловыми скобками, например, эффективный поток тепловой энергии –

$$\langle \mathbf{q}_i \rangle = \frac{1}{\Omega} \int \mathbf{q}_i(x, y, z) dx dy dz.$$

В макроскопическом масштабе L объем Ω фактически является физической точкой. Переход

от микроскопически неоднородной среды к эквивалентной гомогенной (в объеме Ω) среде часто называют проблемой гомогенизации. Решение этой проблемы в общем случае является чрезвычайно сложной задачей, так как эффективные параметры дисперсной среды зависят не только от объемной концентрации и физических свойств составляющих ее компонентов, но и от микроструктуры среды – геометрической формы дисперсных частиц, их коллективного дистанционного взаимодействия, распределения по размерам, а также от статистических характеристик пространственной структуры [3]. Имеется всего несколько случаев, в которых были найдены аналитические решения для вычисления эффективного коэффициента теплопроводности двухфазной дисперсной среды. Вследствие физической (математической) аналогии [4] такое же положение имеет место для коэффициентов электропроводности, диэлектрической проницаемости и других физических величин. Любые приближенные теоретические или полуэмпирические формулы гомогенизации, которых к настоящему времени предложено достаточно много, должны

¹Институт прикладной механики
Российской академии наук, Москва, Россия
*E-mail: bosbosh@mail.ru

иметь количественную оценку области применимости и оценку погрешности предсказания эффективных свойств конкретной среды, оценить которые часто не представляется возможным [5]. Поэтому важно иметь общие неравенства, определяющие границы изменения той или иной физической величины в заданных условиях. В ряде случаев эти границы позволяют достаточно точно предсказать свойства дисперсной среды без детального знания ее микроструктуры. Такие границы для двухфазной дисперсной среды, которые получили названия границ Винера и Хашина–Штрикмана (Х–Ш), были получены из довольно общих предпосылок – классических энергетических неравенств и вариационных принципов в работе [6], а также с использованием свойств гармонических функций и симметрии изотропной среды в работе [7]. Фельдерхоф в работе [8] получил более узкие границы изменения эффективной диэлектрической проницаемости для суспензии идентичных сфер с учетом двух- и трехчастичных взаимодействий.

В данном сообщении границы допустимых изменений эффективного коэффициента теплопроводности дисперсной среды получены с использованием концепции локального поля, свойств симметрии среды и аналитических решений краевых задач уравнения Лапласа как с учетом, так и без учета взаимодействия дисперсных частиц. К преимуществам предлагаемого подхода следует отнести его физическую наглядность и универсальность – представление конечного результата в виде простых аналитических формул и применимость к средам с произвольным соотношением концентраций и теплопроводностей фаз.

Рассмотрим в рамках макроскопического подхода двухфазную ($i = 1, 2$) дисперсную среду, состоящую из однородных и изотропных фаз с известными коэффициентами молекулярной теплопроводности λ_i , Дж/мс К. Каждая фаза занимает свой неизменный объем

$$f_i = \frac{\Omega_i}{\Omega}$$

и может находиться в любом из трех агрегатных состояний. Пусть внутри каждой фазы теплопроводность описывается линейным законом

Фурье: $\mathbf{q}_i = -\lambda_i \nabla T_i$, где \mathbf{q}_i – локальный поток тепловой энергии, Дж/м²с; ∇T_i – локальный градиент температуры внутри i -й фазы, К/м. Локальная теплопроводность в такой среде принимает одно из двух значений λ_1 или λ_2 , так как $f_1 + f_2 = 1$. Тогда эффективный коэффициент молекулярной теплопроводности дисперсной среды λ^* определяется из линейного уравнения $\langle \mathbf{q} \rangle = -\lambda^* \langle \nabla T \rangle$, и безразмерная формула для вычисления эффективного коэффициента теплопроводности будет иметь следующий вид:

$$\frac{\alpha^* - 1}{\alpha - 1} = \frac{\Psi_{21} f_2}{1 - (1 - \Psi_{21}) f_2}, \quad (1)$$

где $\alpha^* = \frac{\lambda^*}{\lambda_1}$; $\alpha = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$; Ψ_{21} – неизвестный линейный оператор ($\Psi_2 = \Psi_{21} \Psi_1$), $\Psi_i = \frac{\langle \nabla T_i \rangle \langle \nabla T \rangle}{\langle \nabla T \rangle^2}$.

Из формулы (1) видно, что вся информация о геометрической структуре дисперсной среды и характере коллективного взаимодействия частиц при их повышенной концентрации содержится в операторе Ψ_{21} . Этот оператор определяет связь между локальными векторными полями $\langle \nabla T_2 \rangle$ и $\langle \nabla T_1 \rangle$. Это важно, поскольку в силу линейности закона Фурье, уравнения Лапласа и граничных условий процесс переноса тепла в дисперсной среде имеет локальный характер. Таким образом, векторное поле ∇T_2^k внутри каждой k -й частицы (и тепловой поток) определяются локальным полем ∇T_1^k , которое в зависимости от структуры среды может в разы отличаться от внешнего или среднего поля $\langle \nabla T \rangle$. Для сферических частиц локальное поле ∇T_1^k вычисляется в центре сферической полости k -й частицы, если ее удалить из среды. Следуя работе [9], задачу определения оператора Ψ_{21} будем называть задачей о взаимодействии фаз.

В рамках макроскопического подхода эта задача имеет точное решение лишь для простейших слоистых структур. Действительно, если слои параллельны интенсивности внешнего поля $\mathbf{E} = \langle \nabla T \rangle$, то $\langle \nabla T_i \rangle = \langle \nabla T \rangle$. Подставляя $\Psi_{21} = 1$ в формулу (1), получим: $\lambda_{21}^* = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$. Если слои перпендикулярны интенсивности внешнего поля, то равны потоки тепла:

$$\lambda_1 \langle \nabla T_1 \rangle = \lambda_2 \langle \nabla T_2 \rangle \text{ и } \psi_{21} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2},$$

соответственно:

$$\frac{1}{\lambda_{\perp}^*} = \frac{f_1}{\lambda_1} + \frac{f_2}{\lambda_2}.$$

Эти точные решения совпадают с границами Винера $\lambda_{\perp}^* \leq \lambda^* \leq \lambda_{\parallel}^*$, которые были получены независимыми методами в работах [6, 7] для дисперсной среды с произвольной анизотропной внутренней микроструктурой.

Совпадение границ Винера с точными решениями для слоистых сред не является случайным, поскольку, как правило, точные решения удастся найти лишь в средах, которые обладают определенной степенью симметрии. В таких средах пространственное распределение неоднородностей соответствует некоторым предельным микроструктурам [10]. Слоистые среды являются такими предельными микроструктурами произвольной анизотропной дисперсной среды.

В общем случае задачу о взаимодействии фаз необходимо решать на более детальном микроструктурном уровне, решая уравнение Лапласа для дисперсной среды при удовлетворении соответствующих граничных условий на бесконечности и на всех межфазных поверхностях.

Далее будет показано, что точные решения для статистически однородной и изотропной дисперсной среды, одна из фаз которой представлена сферическими частицами, также соответствуют предельным микроструктурам, которые определяют границы изменения коэффициентов теплопроводности для любых двухфазных сред с произвольной микроструктурой, когда известны лишь свойства фаз и их концентрация. Действительно, сфера имеет бесконечное множество плоскостей симметрии и предельные геометрические свойства: для любого выпуклого тела заданного объема сфера имеет минимальную площадь поверхности. Более того, у сферы имеется и ряд экстремальных физических свойств. Так, например, из всех тел с данным объемом сфера имеет наименьшую электростатическую емкость (А. Пуанкаре, 1903; Г. Сеге, 1930).

В работе [11] в гидродинамической постановке идеальной несжимаемой жидкости впервые в аналитическом виде была решена задача о взаимодействии фаз в суспензии идентичных сферических частиц с учетом их парных взаимодействий для произвольных соотношений плотностей фаз $\langle \nabla \phi_2 \rangle = \psi_{21}^g \langle \nabla \phi \rangle$, где $\langle \nabla \phi \rangle = U^{(0)}$ – внешнее поле воздействия на среду. Из этого решения и соотношения $\langle \nabla \phi \rangle = \langle \nabla \phi_1 \rangle f_1 + \langle \nabla \phi_2 \rangle f_2$ нетрудно получить оператор связи между локальными скоростями $\langle \nabla \phi_2 \rangle = \psi_{21}^g \langle \nabla \phi_1 \rangle$:

$$\psi_{21}^g = \frac{3}{1+2\gamma} [1 + k(\gamma) f_2], \quad (2)$$

$$k(\gamma) = \frac{7}{72} \frac{\gamma-1}{1+2\gamma} + \frac{1415}{5632} \left(\frac{\gamma-1}{1+2\gamma} \right)^2 + \frac{5}{2112} \left(\frac{\gamma-1}{1+2\gamma} \right)^3,$$

где ψ_{21}^g – решение задачи о взаимодействии фаз в гидродинамической постановке;

$$\gamma = \frac{\rho_2}{\rho_1},$$

ρ_2 и ρ_1 – плотность дисперсной частицы и дисперсионной жидкости соответственно.

Решение (2) получено с учетом членов разложений искомых функций по малому параметру $\delta = \frac{a}{l}$ (где a – радиус дисперсной частицы, l – расстояние между центрами частиц) до степени δ^{14} , что важно при описании свойств среды при повышенной концентрации частиц [8] и соответствует погрешности вычисления коэффициента $k(\gamma)$ меньше 0.25%.

Используя решение (2) и формулы соответствия физической аналогии динамики идеальной несжимаемой жидкости и процессов теплопередачи (верхний индекс t) – $\psi_{21}^g \rightarrow \psi_{21}^t$, $\gamma \rightarrow \frac{\alpha+1}{2}$ [9], легко получить решение задачи о взаимодействии фаз для процессов теплопередачи:

$$\psi_{21}^t = \frac{3}{\alpha+2} [1 + k(\beta)], \quad (3)$$

$$k(\beta) = 0.0486\beta + 0.0628\beta^2 + 0.0003\beta^3. \quad (4)$$

В формулах (3) и (4)

$$\beta = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 2}.$$

После подстановки (3) в (1) получим искомую аналитическую зависимость для эффективной теплопроводности дисперсной среды, с учетом коллективного взаимодействия дисперсных частиц, в виде

$$\beta^* = f_2 \beta \frac{1 + k(\beta)f_2}{1 + k(\beta)f_2^2}. \quad (5)$$

В формуле (5)

$$\beta^* = \frac{\alpha^* - 1}{\alpha^* + 2}.$$

При слабом взаимодействии частиц, $k(\beta) \ll 1$, формула (5) переходит в так называемую эвристическую формулу Максвелла (Клаузиуса–Моссоти) при любой объемной концентрации дисперсных частиц $0 < f_2 < 1$:

$$\beta_M^* = f_2 \beta. \quad (6)$$

Таким образом, вопреки существующему мнению [12], в предположении отсутствия взаимодействия частиц, теория не накладывает никаких ограничений на объемную концентрацию дисперсных частиц в формуле (6). В дальнейшем формулу (6) будем называть аналитической формулой Максвелла, поскольку в научной литературе формулой Максвелла часто называют ее линейное приближение $\alpha^* = 1 + 3\beta f_2 + O(f_2^2)$.

Аналитическую формулу Максвелла (6) можно получить и не используя ограничения монодисперсности сферических частиц, непосредственно из формулы (1) и принципа локальности [9].

Используя полученное решение (5), оценим влияние взаимодействия дисперсных частиц на неточность аналитической формулы Максвелла при различных значениях параметра α и повышенных концентрациях дисперсных частиц. При изменении параметра α от нуля до бесконечности безразмерный параметр β изменяется в пределах $-0.5 < \beta < 1$, а коэффициент $k(\beta)$ – в пределах $-0.0086 < k(\beta) < 0.1117$. Максимальная погрешность ε формулы (6)

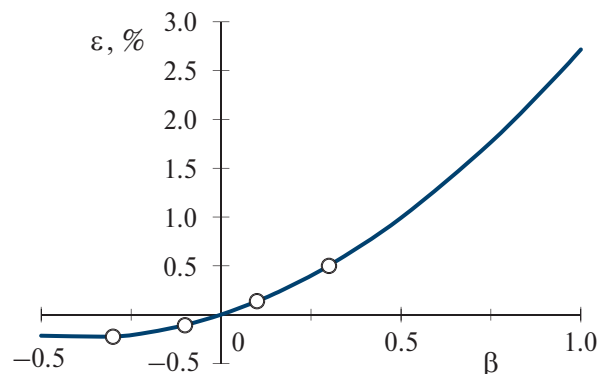


Рис. 1. Максимальная погрешность (при $f_2 = 0.5$) аналитической формулы Максвелла (6) в зависимости от параметра β , которая возникает из-за пренебрежения взаимодействием частиц. Линия – аналитическая зависимость ε . Точки – расчетные данные Фельдерхофа [8] при $-0.3 < \beta < 0.3$.

из-за пренебрежения взаимодействием дисперсных частиц

$$\varepsilon = \frac{\beta^* - \beta_M^*}{\beta_M^*} 100\%$$

достигается при $f_2 = 0.5$ и составляет при $\beta = 1$ около 2.7%, что, как правило, меньше погрешности измерения коэффициентов теплопроводности. На рис. 1 дана зависимость максимальной погрешности ε от параметра β . Там же приведены расчетные данные Фельдерхофа [8], полученные независимым статистическим методом. Видно, что они очень хорошо согласуются с полученной аналитической зависимостью.

Таким образом, основным фактором влияния на зависимость эффективного коэффициента теплопроводности дисперсной среды от концентрации дисперсных частиц является чисто геометрический фактор стесненности дисперсных частиц, который в полной мере учитывается аналитической формулой Максвелла (6). Влияние дистанционного взаимодействия частиц при повышенной концентрации дисперсной фазы приводит лишь к незначительным поправкам.

Используя это замечательное свойство аналитической формулы Максвелла и свойства симметрии однородной и изотропной дисперсной среды, можно построить еще два важных точных решения. Действительно, поскольку

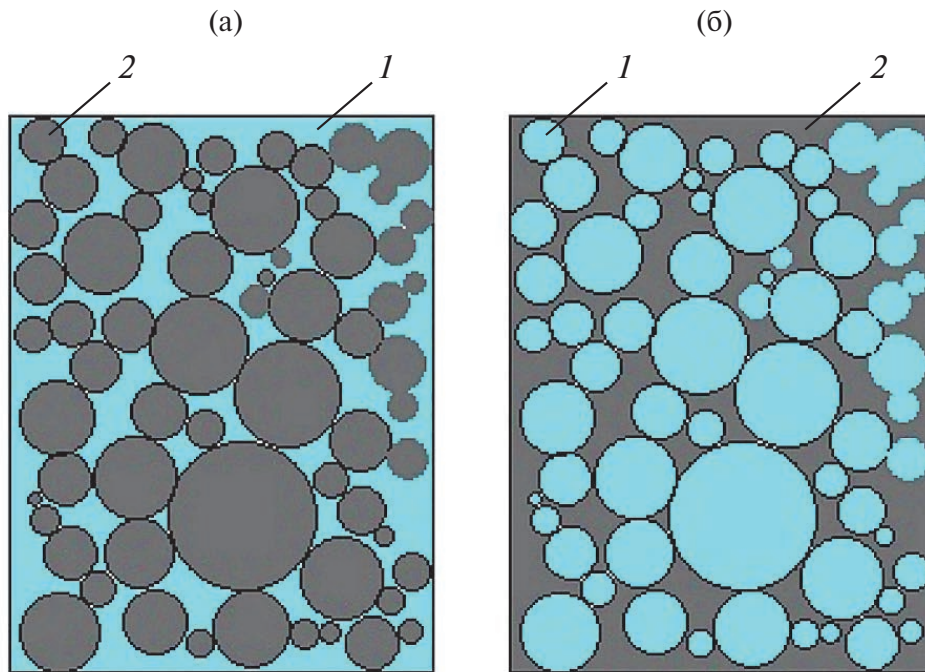


Рис. 2. Два симметричных типа микроструктуры однородной и изотропной дисперсной среды, образованной полидисперсными сферическими частицами: а – дисперсная фаза – сферические частицы, среда описывается формулой Максвелла (6); б – сферические частицы образуют непрерывную фазу (матрицу), среда описывается формулой (7). 1 – дисперсионная жидкость (матрица); 2 – дисперсная фаза.

формула (6) дает достаточно высокую точность во всем диапазоне параметров α и f_2 , то мы можем увеличивать объемную концентрацию дисперсной фазы до такой степени, что она образует сплошной континуум. В этом случае, поменяв местами в формуле (6) нижние индексы ($1 \leftrightarrow 2$), т.е. применив преобразование инверсии фаз $(\lambda_1, f_1) \leftrightarrow (\lambda_2, f_2)$ –

$$\alpha \rightarrow \frac{1}{\alpha}, \quad \alpha^* \rightarrow \frac{\alpha^*}{\alpha} \quad \text{и} \quad f_2 \rightarrow f_1 = 1 - f_2,$$

мы получим точное решение, которое описывает дисперсную среду с другой (предельной) геометрией матрицы и дисперсной фазы (см. рис. 2):

$$\frac{\alpha^* - \alpha}{\alpha^* + 2\alpha} = \frac{1 - \alpha}{1 + 2\alpha} f_1. \tag{7}$$

Сравнение формул (6) и (7) с границами X–Ш, которые (при $\alpha > 1$) имеют вид

$$1 + \frac{f_2}{\frac{1}{\alpha - 1} + \frac{f_1}{3}} \leq \alpha^* \leq \alpha \left(1 + \frac{f_1}{\frac{\alpha}{1 - \alpha} + \frac{f_2}{3}} \right), \tag{8}$$

показывает, что при $\alpha > 1$ аналитическая формула Максвелла (6) в точности совпадают с нижней границей X–Ш, а решение (7) – с верхней.

Таким образом, формулы (6) и (7) являются точными решениями (без учета взаимодействия частиц), которые совпадают с границами X–Ш и описывают предельные микроструктуры (а) и (б) рис. 2. Физическая реализуемость решения (б) в широком диапазоне параметров f_2 и α доказана сравнением с экспериментами в работах [9, 13]. Область практической применимости решения (7), второй границы X–Ш, требует уточнения.

Из рис. 1 видно, что микроструктура (б) дисперсной среды, когда сферы образуют непрерывную фазу, физически может реализоваться (не нарушая исходного условия однородности и изотропности среды) лишь при относительно

высоких концентрациях f_2 , когда трудно отличить, какая из фаз является непрерывной. Поэтому более реалистичной второй границей (при $\alpha > 1$ – верхняя граница) будет решение, инвариантное относительно преобразования инверсии фаз $(\lambda_1, f_1) \leftrightarrow (\lambda_2, f_2)$. Такое точное решение легко построить как линейную комбинацию решений (6) и (7):

$$\frac{\alpha^* - 1}{\alpha^* + 2}(\alpha + 2)f_1 + \frac{\alpha^* - \alpha}{\alpha^* + 2\alpha}(2\alpha + 1)f_2 = 0. \quad (9)$$

Нетрудно убедиться, что решение (9) не изменяется относительно замены нижних индексов $1 \leftrightarrow 2$, т.е. оно инвариантно относительно преобразования инверсии фаз. В частном случае, при равных объемных концентрациях фаз $f_1 = f_2 = 0.5$, формула (9) упрощается до уравнения

$$(\alpha^*)^2 + \frac{2\alpha}{\alpha + 1}\alpha^* - 2\alpha = 0. \quad (10)$$

На рис. 3 показано (линия 2) единственное положительное решение уравнения (10) $\alpha^* = f(\alpha)$. Там же приведены точные решения (6) и (7) при $f_1 = f_2 = 0.5$, которые, как было показано выше, определяют границы X–Ш, и многочисленные экспериментальные данные при $0.45 < f_2 < 0.65$, взятые из работы [12], где в виде таблиц приведены данные более 60 измерений различными авторами эффективных коэффициентов теплопроводности в самых различных двухфазных средах. Видно, что и при достаточно высоком значении $f_2 = 0.5$ точное решение (7), которое описывает ситуацию, когда дисперсные частицы образуют непрерывный континуум (рис. 2б), практически реализуется лишь в узком диапазоне $-0.3 < \beta < 0.3$, когда все три решения (6), (7) и (10) практически совпадают друг с другом. В то время как полученное в данной работе точное решение (10), инвариантное относительно преобразования инверсии фаз, не только существенно сужает границы X–Ш, но и четко ограничивает сверху все экспериментальные точки в широком диапазоне приведенных значений параметра $1.81 < \alpha < 743.8$.

На рис. 4 дано сравнение точных решений (6), (7) и (9) при $\alpha = 50$ с экспериментами [12] при близких значениях параметра $37.08 < \alpha < 66.7$ в координатах $\lambda^*/\lambda_1 = f(f_2)$.

Видно, что в диапазоне объемных концентраций дисперсной фазы $0.1 < f_2 < 0.74$ экспериментальные

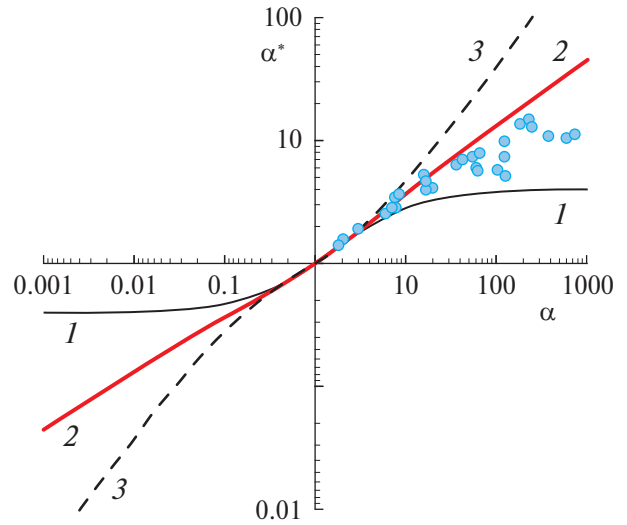


Рис. 3. Границы (линии 1–2) возможных изменений эффективного коэффициента теплопроводности в любой однородной и изотропной дисперсной среде с произвольной микроструктурой при $f_1 = f_2 = 0.5$: 1 – аналитическая формула Максвелла (6); 2 – решение (10), инвариантное относительно преобразования инверсии фаз, 3 – верхняя (нижняя) граница Хашина–Штрикмана при $\alpha > 1$ (при $\alpha < 1$). Точки – эксперименты [12].

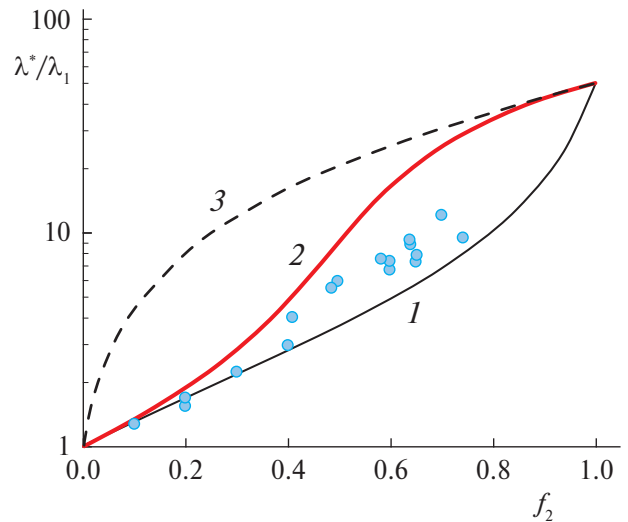


Рис. 4. Границы возможных изменений (линии 1–2) эффективного коэффициента теплопроводности в любой однородной и изотропной дисперсной среде с произвольной микроструктурой при $\alpha = 50$. Обозначения как на рис. 3.

данные ограничиваются снизу аналитической формулой Максвелла, а сверху, как и на рис. 3, – точным решением (9). Верхняя граница X–Ш (линия 3), которая совпадает с точным решением (7), может реализоваться на практике лишь

при $f_2 > 0.8$, где она приближается к решению (9). В работе [12] имеется лишь два экспериментальных подтверждения такой ситуации: $f_2 = 0.9$, $\alpha = 1167.3$, $\alpha^* = 992$ и $f_2 = 0.925$, $\alpha = 1879.4$, $\alpha^* = 1606$.

Таким образом, полученное в данной работе точное решение (9), инвариантное относительно преобразования инверсии фаз, существенно сужает известные границы Хашина–Штрикмана (8), тем самым существенно увеличивая область надежной предсказуемости свойств однородных и изотропных двухфазных дисперсных сред с произвольной микроструктурой.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (госзадание № 121112200122-7).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Li Z.* Nanofluidics: An Introduction. CRC Press, 2018. 401 p.
2. *Бошнятов Б.В.* Микропузырьковые газожидкостные среды и перспективы их использования. Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2016. 170 с.
3. *Torquato S.* Random Heterogeneous Materials – Microstructure and Macroscopic Properties. N.Y.: Springer, 2002. P. 403–646.
4. *Дульнев Г.Н., Новиков В.В.* Процессы переноса в неоднородных средах. Л.: Энергоатомиздат. Ленингр. отд-ние, 1991. 248 с.
5. *Pabst W., Hříbalová S.* Describing the effective conductivity of two-phase and multiphase materials via weighted means of bounds and general power means // JOM. 2019. V. 71 (11). P. 4005–4014. <https://doi.org/10.1007/s11837-019-03693-4>
6. *Hashin Z., Shtrikman S.* A variational approach to theory of effective magnetic permeability of multiphase materials // J. Appl. Phys. 1962. V. 33 (10). P. 3125–3131. <https://doi.org/10.1063/1.1728579>
7. *Bergman D.J.* The dielectric constant of a composite material – a problem in classical physics // Physics Reports (Section C of Physics Letters). 1978. V. 43 (9). P. 377–407. [https://doi.org/10.1016/0370-1573\(78\)90009-1](https://doi.org/10.1016/0370-1573(78)90009-1)
8. *Felderhof U.* Bounds for the effective dielectric constant of a suspension of uniform spheres // J. Phys. C: Solid State Phys. 1982. V. 15. P. 3953–3966. <https://doi.org/10.1088/0022-3719/15/18/011>
9. *Бошнятов Б.В.* Теплопроводность пузырьковых газожидкостных сред повышенной концентрации // Вестн. Томского гос. ун-та. Математика и механика. 2017. № 45. С. 69–79. <https://doi.org/10.17223/19988621/45/6>
10. *Фокин А.Г.* Макроскопическая проводимость случайно-неоднородных сред. Методы расчета // УФН. 1996. Т. 166. № 10. С. 1069–1093.
11. *Гуськов О.Б., Бошнятов Б.В.* Взаимодействие фаз и присоединенная масса дисперсных частиц в потенциальных потоках жидкости // Вестн. Нижегород. ун-та им. Н.И. Лобачевского. 2011. № 4–3. С. 740–741.
12. *Samantray P.K., Karthikeyan P., Reddy K.S.* Estimating effective thermal conductivity of two-phase materials // Intern. J. Heat and Mass Transfer. 2006. V. 49 (21–22). P. 4209–4219. <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2006.03.015>
13. *Бошнятов Б.В.* К расчету эффективных коэффициентов переноса в монодисперсных суспензиях сферических частиц // Письма в ЖТФ. 2015. Т. 41 (3). С. 67–73.

EXACT SOLUTIONS AND BOUNDS FOR THE THERMAL CONDUCTIVITY COEFFICIENT OF A DISPERSED MEDIUM

B. V. Boshenyatov^a

^aInstitute of Applied Mechanics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

Presented by Academician of the RAS A.M. Lipanov

Exact solutions for the thermal conductivity coefficient of a two-phase dispersed medium are obtained using the most general physical principles of locality and symmetry. Two solutions define the well-known Hashin–Shtrikman bounds. The third solution, invariant under the phase inversion transformation, significantly narrows the Hashin–Shtrikman boundaries; this is confirmed by comparison with numerous experiments by other authors. It has been shown that taking into account the remote interaction of dispersed particles at their increased concentration only slightly (less than 3%) affects the result.

Keywords: two-phase dispersed medium, exact solutions, effective thermal conductivity coefficient, interaction of dispersed particles

УДК 532.517.45

ОБОБЩЕННЫЙ ПРИНЦИП БРЕНЬЕ И ПРОБЛЕМА ЗАМЫКАНИЯ ИЕРАРХИИ ЛАНДГРЕНА–МОНИНА–НОВИКОВА ДЛЯ ПОЛЯ ВИХРЯ

© 2024 г. В. Н. Гребенёв^{1,*}, А. Н. Гришков^{2,**}

Представлено академиком РАН М.П. Федорук 28.11.2023 г.

Поступило 28.11.2023 г.

После доработки 28.11.2023 г.

Принято к публикации 12.02.2024 г.

Концепция Бренье – представление решения уравнений идеальной несжимаемой гидродинамики в терминах вероятностных мер на множестве лагранжевых траекторий в случае их стохастичности, является обобщением принципа наименьшего действия Арнольда построения гладких решений уравнений Эйлера. В настоящей работе вариационный обобщенный принцип Бренье применяется для замыкания бесконечной цепочки уравнений Ландгрена–Монина–Новикова на n -точечные функции плотности распределения вероятности f_n поля вихря двумерных турбулентных потоков. Кроме того, в рамках статистического подхода предложена аппроксимация вариационной задачи с условиями на концах, поставленная Шнирельманом для уравнения Эйлера.

Ключевые слова: обобщенный принцип Бернье, двумерная турбулентность, уравнения Ландгрена–Монина–Новикова, проблема замыкания

DOI: 10.31857/S2686740024020073, EDN: KHFELU

Уравнение Навье–Стокса является нелинейным и нелокальным. Как следствие, статистические зависимости, выведенные из этого уравнения, являются незамкнутыми, и статистическое описание приводит к бесконечной цепочке уравнений для многоточечных функций плотности распределения вероятности (ФПРВ). Приведем коротко обзор методов замыкания для иерархии Ландгрена–Монина–Новикова (ЛМН) для поля вихря (скорости), который не претендует на полноту, но представляет основные подходы. Распределения вероятностей поля вихря (скорости) или многоточечные эйлеровы функции плотности распределения вероятности (ФПРВ) [1] $f_n^E(x_{(1)}, \omega_{(1)}, \dots, x_{(n)}, \omega_{(n)}, t)$, $n = 1, \dots, \infty$ (где $\omega_{(i)}$ – значение компоненты завихренности $\Omega(x_{(i)}, t) \equiv \Omega_{(i)}$

в точке $x_{(i)}$ в момент времени t) удовлетворяют иерархии ЛМН [2–4]. ФПРВ рассматриваются как в эйлеровом, так и в лагранжевом описании турбулентности. Кроме возможности формулировать аналитически реализуемые замыкания бесконечной цепочки ЛМН уравнений

$$\frac{\partial f_n}{\partial t} = L_n f_n + L_{n,n+1} f_{n+1}, \quad n = 1, \dots, \infty, \quad (1)$$

где n , $(n+1)$ -точечные ФПРВ f_n, f_{n+1} связаны посредством нелокальных операторов L_n и $L_{n,n+1}$, которые будут представлены ниже, иерархия ЛМН допускает применение прямого численного моделирования. Это направление, сочетающее аналитические замыкания и численные исследования, было инициировано в [4] с использованием условной вероятности распределения поля завихренности, т.е. $p_{n,n+1} = f_{n+1} / f_n$. Прямое численное моделирование позволило проверить условные ФПРВ для малых n и показать, что ЛМН-иерархия несовместима с представлением ФПРВ гауссовым случайным полем, что совпадает с выводом [4] для двухточечных

¹Федеральный исследовательский центр информационных и вычислительных технологий, Новосибирск, Россия

²Институт математики и статистики, Университет Сан-Паулу, Сан-Паулу, Бразилия

*E-mail: vngrebenev@gmail.com

**E-mail: grishkov@ime.usp.br

распределений и является тестом для верификации замыкания. Свойства ФПРВ поля завихренности в обратном каскаде проанализированы в [1] на основе двухточечной статистики, где замыкание иерархии ЛМН специфицируется заданием условной вероятности распределения поля завихренности. Уравнения характеристик ЛМН использовались для описания динамики “квази-вихрей” в смысле “квази-частиц” Ландау. Введение условного усреднения для одноточечных статистик в кинетическое уравнение было проведено в [5]. Показана возможность учитывать небольшие отклонения от сильной негауссовости ФПРВ завихренности до более выраженных статистических корреляций. Замыкание иерархии ЛМН для поля скорости выполнено посредством введения условных ФПРВ для градиента давления и диссипации для однородной изотропной турбулентности (см. обзор в [1]). Статистические симметрии ЛМН-иерархии использовались для проведения сравнения с результатами прямого численного моделирования условных усреднений. Наблюдаемые отклонения от гауссовости одноточечных ФПРВ для поля скорости являются результатом довольно сложного взаимодействия статистических корреляций. ФПРВ поля скорости также может быть связана с ФПРВ для инкремента скорости. Показано (см. обзор в [6]), что в определенном диапазоне масштабов r турбулентного потока инкремент является марковским случайным процессом и уравнения для ФПРВ замыкаются с использованием трехточечной статистики. Эволюция для условной n -точечной ФПРВ на масштабах r определяется уравнением Фоккера–Планка. Таким образом, для определенного диапазона масштабов бесконечная система кинетических уравнений для ФПРВ может быть замкнута и преобразована в трехмасштабную (или четырехточечную) модель. В отличие от “правила слияния” (fusion rule), которое использовалось (см. обзор в [6]) с целью замыкания иерархии ФПРВ на этапе двухточечных статистик, предложенное марковское замыкание действует на следующем уровне иерархии ФПРВ как трехточечное замыкание. Установлено (см. обзор [6]), что уравнения Фоккера–Планка инвариантны относительно дополнительных статистических симметрий [7], которые необходимо использовать для правильного представления

статистики скорости в случаях неоднородного потока при построении замыканий. Существует класс моделей двухточечных корреляций, основанных на преобразовании Фурье кинетического уравнения. Двухточечные модели используются в качестве замыкания подсеточных членов в LES-методах (см., например, [1]), где подсеточная вязкость выражается как функция спектра энергии. Существует также класс замыканий, основанный как на методах возмущения уравнения Навье–Стокса (квазинормальное приближение, приближение прямого взаимодействия, диаграммы Уайлда), так и на методах квантовой теории поля (ренормгруппа, правила слияния, инстантоны). Как отмечено в [6], предложенные замыкания не воспроизводят явления перемежаемости поля скоростей ввиду сильной нелинейности уравнений гидродинамики. Таким образом, методы замыкания статистических зависимостей в турбулентности требуют дальнейшего развития.

Цель сообщения – применить вариационный принцип Бренье [8] для замыкания иерархии ЛМН на n -точечные ФПРВ поля вихря. т.е. эйлерову ФПРВ f_n^E . Вариационный принцип Бренье (ВПБ) является обобщением принципа наименьшего действия Арнольда построения гладких решений уравнений Эйлера. ВПБ описывает решения уравнений Эйлера в терминах вероятностных мер (обобщенных потоков) на множестве лагранжевых траекторий. Понятие обобщенных потоков является естественным для описания лагранжевых траекторий гидродинамической турбулентности в терминах случайных процессов. Будет дана интерпретация обобщенного потока в рамках статистического описания гидродинамической турбулентности. В качестве основной величины движения берется случайное поле завихренности и эволюция f_n^E определяется иерархией ЛМН в эйлеровой формулировке [1], которая выводится из статистической формы уравнений Эйлера с использованием закона Био–Савара. Переход к лагранжевой формулировке осуществляется эквивалентной записью ЛМН-иерархии в виде уравнений вдоль характеристик (лагранжевы траектории) ЛМН-иерархии. Статистическая форма ВПБ выводится с использованием уравнений характеристик, и минимизация функционала выполняется по вариационной переменной f_{n+1}^E . При этом, согласно ВПБ, два крайних

условия, начальное и конечное распределение ФПРВ f_{n+1}^E вдоль характеристик должны быть заданы. Как результат, f_{n+1}^E , определенная из вариационного принципа (оптимальный статистический ансамбль реализаций), позволяет замкнуть f_n^E -уравнение ЛМН-иерархии. При этом статистическая форма ВПБ совпадает с вариационным принципом Арнольда (ВПА) (рассматривая формально предел при $n \rightarrow \infty$) для краевой задачи о геодезической, соединяющей две заданные конфигурации жидкости. Постановка такой задачи впервые предложена в [9] и изучена с привлечением дискретного аналога группы диффеоморфизмов для идеальной несжимаемой жидкости, которая не является классической в гидродинамике. Для двумерного случая неизвестно [9], существует ли всегда решение вариационной задачи с условиями на концах. В настоящей работе предложена другая аппроксимация этой задачи, основанная на статистической версии уравнения Эйлера, т.е. ЛМН-иерархии, которая более ориентирована на численные эксперименты, что представляет отдельную тему исследования.

1. ОБОБЩЕННЫЙ ПРИНЦИП БРЕНЬЕ

Следуя [10], приведем основные сведения о вариационном принципе Бренье. Согласно ВПА [11], движение идеальной жидкости реализуется как экстремаль функционала – интегрированная по времени $t \in [0, T]$ кинетическая энергия частиц жидкости для $T \ll 1$. Хорошо известно [10], что для воспроизведения характерных особенностей турбулентных потоков ВПА необходимо ослабить. Один из подходов – ВПБ, который формулируется как нахождение экстремали функционала Бренье [8]

$$B[\mu] = \int \mu[D\gamma]S[\gamma] \rightarrow \inf, \quad \mu|_{t=0} = \mu_0, \quad \mu|_{t=T} = \mu_T, \quad (2)$$

где $\mu[D\gamma]$ – равномерные по t вероятностные меры (обобщенные потоки) на лагранжевых случайных траекториях $t \mapsto \gamma(a, t)$ потока $(a, t) \mapsto \gamma(a, t)$ с начальным условием $\gamma(a, 0) = a$ и краевыми условиями

$$\mu[D\gamma](t = 0) = \mu_0, \quad \mu[D\gamma](t = T) = \mu_T, \quad (3)$$

которые представляют распределения вероятности траектории пройти через заданные точки

в моменты времени $t = 0, t = T$, $D\gamma$ – вектор, дуальный касательному вектору γ_t . Вариационный функционал определяется как

$$S[\gamma] = \frac{1}{2} \int_0^T \int_D |\gamma_t(a, t)|^2 \, da dt, \quad (4)$$

где $|\gamma_t(a, t)|^2$ – квадрат римановой длины касательных векторов, $S[\gamma]$ – случайная величина, $\mu[D\gamma]$ – вероятность для траектории $\gamma(a, t)$ пройти через заданные точки, когда t меняется от 0 до T . Доказаны следующие свойства задачи (2), (3) [8]: а) решение задачи существует в смысле обобщенного потока; б) обобщенный вариационный принцип реализует (классические) решения уравнения Эйлера при условии, что $T = 1$, при этом $\mu_T = \delta(x - y(a, T))da$, где $(a, t) \mapsto y(a, t)$ – лагранжевый поток движения идеальной жидкости и $y(a, T)$ – положение в момент времени $t = T$, мера $\mu[D\gamma]$ сингулярна на лагранжевых траекториях; в) при $t > T$ стохастические движения идеальной жидкости определяются вероятностной мерой (обобщенный поток) $\mu[D\gamma]$.

ВПБ – задача линейной оптимизации, в которой как целевая функция, т.е. $\mu[D\gamma]$, так и ограничения (3) линейно зависят от аргументов, которые необходимо минимизировать. В дискретной постановке задача оптимизации состоит в минимизации усредненного линейного функционала энергии [10]

$$\mu \mapsto \sum_{i_n} \mu(i_n) E_d(i_n), \quad (5)$$

где последовательность индексов $\{i_n\}_{n=1, \dots, N_t}$ – дискретные лагранжевы траектории, $i = (i_1, \dots, i_d) \in [1, N_x]^d$, N_t – шаг по времени; $D = \cup_x N_x^d$ – разбиение на равные объемы N_x^d , $d = \dim D$, $E_d(i_n)$ – энергия дискретных лагранжевых траекторий i_n . Обобщенные потоки – конечномерные тензоры, представленные $(N_x^d)^{N_t}$ значениями дискретной меры $\mu\{i_n\} = \mu(i_1, \dots, i_{N_t})$. Краевые условия (3) – матрицы с предписанными вероятностями лагранжевых траекторий начального и конечного положения в триангуляции D . Эффективные алгоритмы, численная реализация задачи (5), (3) и обсуждение применения к турбулентным потокам приведены в [10]. Дискретные течения, для которых определены аналоги вариационного функционала – группа перестановок N_x^d , которая впервые введена

в [9] для аппроксимации лагранжева потока и рассматривалась как модель основной группы диффеоморфизмов идеальной несжимаемой жидкости. Эта конструкция позже применялась в [8, 10].

2. ЗАМЫКАНИЕ ИЕРАРХИИ ЛАНДГРЕНА–МОНИНА–НОВИКОВА НА ОСНОВЕ ВАРИАЦИОННОГО ПРИНЦИПА БРЕНЬЕ

Формулируется вариационный принцип Бренье в терминах оптимального статистического ансамбля. Конкретно, уравнение (1) специфицируется как f_n^E -уравнение иерархии ЛМН для поля вихря. Далее, следуя [1], уравнение переписывается в лагранжевой формулировке, движение n частиц определяется уравнениями характеристик. Для вычисления длины касательного вектора характеристики вводится риманова метрика, которая определяется условием инвариантности элемента длины относительно группы преобразований симметрии f_n^E -уравнения [12, 13].

2.1. ЛМН-иерархия статистического описания поля вихря

Используются следующие обозначения:

$$\begin{aligned} f_n^E(x_{(1)}, \omega_{(1)}, \dots, x_{(n)}, \omega_{(n)}; t) = \\ = \left\langle \prod_{i=1}^n \delta(\omega_{(i)} - \omega(x_{(i)}, t)) \right\rangle \end{aligned}$$

есть n -точечная эйлерова ФПРВ, $n = 1, \dots, \omega_{(i)}$, $i = 1, \dots, n$ – значение компоненты завихренности $\Omega(x_{(i)}, t) (\equiv \Omega_{(i)})$ в точке $x_{(i)} = (x_i, y_i)$, f_n^E -уравнение при внешнем воздействии F принимает вид [1]

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_n^E}{\partial t} = - \sum_{j=1}^n \left[\frac{\partial}{\partial x_{(j)}} \langle u(x_{(j)}, t) | \{\omega_{(l)}, x_{(l)}\} \rangle f_n^E + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial y_{(j)}} \langle v(x_{(j)}, t) | \{\omega_{(l)}, x_{(l)}\} \rangle f_n^E \right] = \\ = - \frac{\partial}{\partial \omega_{(j)}} \langle F(x_{(j)}, t) | \{\omega_{(l)}, x_{(l)}\} \rangle, \end{aligned} \quad (6)$$

с начальным условием

$$f_n^E(\{\omega_{(l)}, x_{(l)}\}; t = 0) = f_n^{E0}(\{\omega_{(l)}^0, x_{(l)}^0\}). \quad (7)$$

Компоненты скорости определяются формулами

$$\begin{aligned} \langle u(x_{(j)}, t) | \{\omega_{(l)}, x_{(l)}\} \rangle = \\ = \int dx_{(n+1)} d\omega_{(n+1)} \omega_{(n+1)} \alpha^1(x_{(j)} - x_{(n+1)}) \times \\ \times \frac{f_{n+1}^E(x_{(n+1)}, \omega_{(n+1)}, \{\omega_{(l)}, x_{(l)}\}, t)}{f_n^E(\{\omega_{(l)}, x_{(l)}\}, t)}, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \langle v(x_{(j)}, t) | \{\omega_{(l)}, x_{(l)}\} \rangle = \\ = \int dx_{(n+1)} d\omega_{(n+1)} \omega_{(n+1)} \alpha^2(x_{(j)} - x_{(n+1)}) \times \\ \times \frac{f_{n+1}^E(x_{(n+1)}, \omega_{(n+1)}, \{\omega_{(l)}, x_{(l)}\}, t)}{f_n^E(\{\omega_{(l)}, x_{(l)}\}, t)}. \end{aligned} \quad (9)$$

Далее будем использовать обозначения

$$\alpha^1(r_{(1,n+1)}) = \alpha_{(1,n+1)}^1, \quad \alpha^2(r_{(1,n+1)}) = \alpha_{(1,n+1)}^2. \quad (10)$$

Класс ФПРВ определяется условиями нормализации, совпадения и разделения ФПРВ [1] на соответствующих масштабах.

Характеристики уравнения (6) описывают динамику n лагранжевых частиц $X_{n(j)}(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} X_{n(j)}(t) = \\ = \langle u(x_{(j)}, t) | \omega_{(l)}, x_{(l)} \rangle \Big|_{\{\omega_{(l)}, x_{(l)}\} = \{\Omega_{(l)}(t), X_{n(l)}(t)\}}, \quad (11) \\ X_{n(j)}(0) = a_j, \\ \frac{d}{dt} \Omega_{n(j)}(t) = \\ = \langle F(x_{(j)}, t) | \{\omega_{(l)}, x_{(l)}\} \rangle \Big|_{\{\omega_{(l)}, x_{(l)}\} = \{\Omega_{(l)}(t), X_{n(l)}(t)\}}, \quad (12) \\ \Omega_{(l)}(0) = \omega_{(l)}^0, \end{aligned}$$

где $j = 1, \dots, n$ и $l = 1, \dots, n$. Нижний индекс в выражении $\{\omega_{(l)}, x_{(l)}\} = \{\Omega_{(l)}(t), X_{n(l)}(t)\}$ означает, что статистика вычисляется в текущем положении частицы на характеристике. Завихренность меняется вдоль характеристики согласно (12). Далее предполагаем, что находимся в равновесной стадии турбулентности, т.е. внешнее воздействие отсутствует. Тогда, ввиду (12), завихренность переносится вдоль $X_{n(l)}(a_j, t)$ без изменения.

При этом f_n -уравнение инвариантно преобразуется для $\{\omega_{(j)}, x_{(j)}\}$ с $\omega_{(j)} = 0$, т.е. вдоль характеристик нулевой завихренности, что согласуется с результатами [15]. Группа симметрий $G = G_1 \times \dots \times G_n$ определяет расслоение

$$P = P_{x_{(1)}} \times \dots \times P_{x_{(n)}}$$

многообразия D с базой $x_{(j)}$, где слой $P_{x_{(j)}}$ – группа преобразований G_j . Такие расслоения называются главными. Группа Ли G_j имеет вид [13]

$$z_{(1)}^* = F(z_{(1)}), \tag{13}$$

$$\omega_{(1)}^* = \left| F_{z_{(1)}} \right|^2 \omega_{(1)}, \tag{14}$$

...

$$z_{(k)}^* = F(z_{(k)}), \tag{15}$$

$$\omega_{(k)}^* = \left| F_{z_{(k)}} \right|^2 \omega_{(k)}, \tag{16}$$

...

$$z_{(n+1)}^* = F'(z_{(j)}, z_{(n+1)}) = F(z_{(j)}) + (z_{(n+1)} - z_{(j)}) \frac{dF(z_{(j)})}{dz_{(j)}} \left| \frac{dF(z_{(j)})}{dz_{(j)}} \right|^{-2/3}, \tag{17}$$

$$\omega_{(n+1)}^* = \left| F_{z_{(j)}} \right|^{2/3} \omega_{(n+1)}, \tag{18}$$

$$f_n^{E*} = \prod_{i=1}^n \left| F_{z_{(i)}} \right|^{-2} f_n^E, \tag{19}$$

$$f_{n+1}^{E*} = \left| F_{z_{(j)}} \right|^{-2/3} \prod_{i=1}^n \left| F_{z_{(i)}} \right|^{-2} f_{n+1}^E, \tag{20}$$

$$z_{(j)} = x_{(j)}^1 + ix_{(j)}^2,$$

где $F = U + iV$, U, V – произвольные сопряженные гармонические функции, удовлетворяющие условиям Коши–Римана, т.е. F – конформное отображение, $F_{z_{(k)}}$ – производная по $z_{(k)}$.

$F'(z_{(j)}, z_{(n+1)})$ определено на $C \times C$, параметр группы a опущен в обозначениях. Характеристики $X_{n(j)} (Z_{n(j)} \in C)$ в комплексных переменных $z_{(j)} = x_{(j)} + iy_{(j)}$ конформно-инвариантно преобразуются группой G_j . Инфинитезимальный оператор алгебры Ли t_j подгруппы $H_j \subset G_j$, преобразующей $z_{(j)}$ и f_n^E , имеет вид

$$T_{(j)} = \Phi(z_{(j)}) \frac{\partial}{\partial z_{(j)}} + \bar{\Phi}(\bar{z}_{(j)}) \frac{\partial}{\partial \bar{z}_{(j)}} - \Phi_{z_{(j)}}(z_{(j)}) f_n^E \frac{\partial}{\partial f_n^E} - \bar{\Phi}_{\bar{z}_{(j)}}(\bar{z}_{(j)}) f_n^E \frac{\partial}{\partial f_n^E}, \tag{21}$$

где $\Phi(z_{(j)})$ – произвольное конформное отображение, так что

$$z_{(j)}^* = F(z_{(j)}), dz_{(j)}^* = F_{z_{(j)}} dz_{(j)}, d\bar{z}_{(j)}^* = \bar{F}_{\bar{z}_{(j)}} d\bar{z}_{(j)}, \tag{22}$$

$$f_n^{E*} = \left| F_{z_{(j)}} \right|^{-2} f_n^E, \left| F_{z_{(j)}} \right|^2 = F_{z_{(j)}} \bar{F}_{\bar{z}_{(j)}}.$$

Уравнение (12) описывает динамику j -й лагранжевой частицы на j -й компоненте n -мерного комплексного пространства $C^n = C_{(1)} \times \dots \times C_{(n)}$, где $C_{(j)} \simeq C$. Таким образом, $Z_{(n)j}(t) = X_{n(j),t}^1(t) + iX_{n(j),t}^2(t)$ – кривая на $C_{(j)}$, вдоль которой $\omega_{(j)}^0$ сохраняется. Элемент длины (метрика) в $C_{(j)}$ определяется функцией Λ :

$$dl_{(j)}^2 = \Lambda^2(z_{(j)}, \bar{z}_{(j)}) dz_{(j)} d\bar{z}_{(j)}. \tag{23}$$

Инфинитезимальный оператор наиболее широкой группы преобразований, инвариантно преобразующей $dl_{(j)}^2$, следовательно, длину характеристики $Z_{n(j)}(t)$, совпадает с $T_{(j)}$ [14]. Таким образом, условие $\Lambda^2 = f_n^E$ определяет риманову длину вектора скорости

$$\frac{d}{dt} Z_{n(j)}(s),$$

инвариантную относительно действия группы H_j .

Сформулируем статистический аналог ВПБ. Кинетическая энергия лагранжева потока $X_{n(j)}(a_j, t)$, интегрированная по t , равна

$$S[X_{n(j)}] = \frac{1}{2} \int_0^T \int_D \left| \frac{d}{dt} X_{n(j)}(a_j, t) \right|^2 da_j dt. \tag{24}$$

Принимая во внимание (9), (10) и конформный вид метрики $dl_{(j)}^2$, т.е. (23), получаем

$$\begin{aligned}
S[X_{n(j)}] &= \int_0^T \int_D \left| \frac{d}{dt} X_{n(j)}(t)(a_j, t) \right|^2 da_j dt = \\
&= \int_0^T \int_D f_n^E \left\{ \left\langle u(x_{(j)}, t) \mid \{\omega_{(l)}, x_{(l)}\} \right\rangle^2 + \right. \\
&+ \left. \left\langle v(x_{(j)}, t) \mid \{\omega_{(l)}, x_{(l)}\} \right\rangle^2 \right\} \Big|_{\{\omega_{(l)}, x_{(l)}\} = \{\Omega_{(l)}(t), X_{n(l)}(a_j, t)\}} da_j dt = \\
&= \int_0^T \int_D f_n^E \left\{ \left\langle u(x_{(j)}, t) \mid \{\omega_{(l)}, x_{(l)}\} \right\rangle^2 + \right. \\
&+ \left. \left\langle v(x_{(j)}, t) \mid \{\omega_{(l)}, x_{(l)}\} \right\rangle^2 \right\} \Big|_{\{\omega_{(l)}, x_{(l)}\} = \{\Omega_{(l)}(t), X_{n(l)}(a_j, t)\}} da_j dt = \\
&= \int_0^T \int_D \left[f_n^E \left(\int dx_{(n+1)} d\omega_{(n+1)} \omega_{(n+1)} \times \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \times \alpha^1(x_{(j)} - x_{(n+1)}) \frac{f_{n+1}^E}{f_n^E} \right)^2 + \right. \\
&\quad \left. + f_n^E \left(\int dx_{(n+1)} d\omega_{(n+1)} \omega_{(n+1)} \times \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \times \alpha^2(x_{(j)} - x_{(n+1)}) \frac{f_{n+1}^E}{f_n^E} \right)^2 \right] \Big|_{\{\omega_{(l)}, x_{(l)}\} = \{\Omega_{(l)}(t), X_{n(l)}(a_j, t)\}} da_j dt, \quad (25)
\end{aligned}$$

где $\{\omega_{(l)}, x_{(l)}\} = \{\Omega_{(l)}(t), X_{n(l)}(a_j, t)\}$ задает лагранжево представление поля скорости и в лагранжевом описании $S[X_{n(j)}]$ – случайная величина. Лагранжева ФПРВ поля вихря равна

$$\begin{aligned}
&f_n^L(x_{(1)}, a_1, \omega_{(1)}, \dots, x_{(n)}, a_n, \omega_{(n)}, t) = \\
&= \left\langle \prod_{i=1}^n \delta(x_{(i)} - X_{n(i)}(a_i, t)) \delta(\omega_{(i)} - \Omega_{(i)}(a_i, t)) \right\rangle. \quad (26)
\end{aligned}$$

Функционал Бренье статистического ансамбля случайной величины $S[X_{n(j)}]$ определяется формулой

$$\int \mu[DX_n] S[X_{n(j)}] = \int da_1 \dots da_n f_n^L S[X_{n(j)}], \quad (27)$$

где $\mu[DX_n]$ – двойная стохастическая мера [8]:

$$\begin{aligned}
\mu[DX_n] &= \left\langle \prod_{j=1}^n \delta(x_{(j)} - X_{n(j)}(a_j, t)) \times \right. \\
&\quad \left. \times \delta(\omega_{(j)} - \Omega_{(j)}(a_j, t)) \right\rangle da_1 \dots da_n. \quad (28)
\end{aligned}$$

Интегрируя (27) относительно $da_1 \dots da_n$ и используя формулу (см. [16]):

$$\begin{aligned}
\int da_1 \dots da_n f_n^L &= f_n^E(x_{(1)}, \omega_{(1)}, \dots, x_{(n)}, \omega_{(n)}, t) \equiv \\
&\equiv \left\langle \prod_j^n \delta(\omega_{(j)} - \omega(x_{(j)}, t)) \right\rangle, \quad (29)
\end{aligned}$$

получаем

$$\int \mu[DX_n] S[X_{n(j)}] = f_n^E S[X_{n(j)}]. \quad (30)$$

Функционал (30) рассматривается на характеристиках $x_{(j)} = X_{n(j)}(a_j, t)$, и, принимая во внимание, что f_n^E постоянна вдоль характеристики (см. формулу (30), где $\omega(X_{n(j)}(a_j, t)) = \omega^0(a_j)$), получаем с учетом начального условия (7), что правая часть (30) равна

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \int_0^T f_n^{E0} \int_D \left[f_n^{E0} \left(\int dx_{(n+1)} d\omega_{(n+1)} \omega_{(n+1)} \times \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \times \alpha^1(x_{(j)} - x_{(n+1)}) \frac{f_{n+1}^E}{f_n^{E0}} \right)^2 + \right. \\
&\quad \left. + f_n^{E0} \left(\int dx_{(n+1)} d\omega_{(n+1)} \omega_{(n+1)} \times \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \times \alpha^2(x_{(j)} - x_{(n+1)}) \frac{f_{n+1}^E}{f_n^{E0}} dx_{(n+1)} \right)^2 \right] \Big|_{\{\omega_{(l)}, x_{(l)}\} = \{\Omega_{(l)}(t), X_{n(l)}(t)\}} dt da_j. \quad (31)
\end{aligned}$$

Таким образом, функционал Бренье имеет вид

$$\begin{aligned}
B[f_{n+1}^E] &= \frac{1}{2} \int_0^T f_n^{E0} \int_D \left[f_n^{E0} \left(\int dx_{(n+1)} d\omega_{(n+1)} \omega_{(n+1)} \alpha^1(x_{(j)} - x_{(n+1)}) \frac{f_{n+1}^E}{f_n^{E0}} \right)^2 + \right. \\
&\quad \left. + \left(\int dx_{(n+1)} d\omega_{(n+1)} \omega_{(n+1)} \alpha^2(x_{(j)} - x_{(n+1)}) \frac{f_{n+1}^E}{f_n^{E0}} \right)^2 \right] \Big|_{\{\omega_{(l)}, x_{(l)}\} = \{\Omega_{(l)}(t), X_{n(l)}(t)\}}. \quad (32)
\end{aligned}$$

Принцип Бренье наименьшего действия для функционала (32) формулируется так:

$$B[f_{n+1}^E] \rightarrow \inf_{f_{n+1}^E}, \quad (33)$$

$$f_{n+1}^E|_{t=0} = f_{n+1,0}^E, \quad f_{n+1}^E|_{t=T} = f_{n+1,T}^E, \quad (34)$$

где $f_{n+1,0}^E, f_{n+1,T}^E$ – заданные ФПРВ поля вихря в моменты времени $t = 0, t = T$. Конкретно, имеем

$$f_{n+1}^E|_{\{\omega_{(l)}, x_{(l)}\} = \{\Omega_{(l)}(t), X_{n(l)}(t)\}, t=0} = \delta(\omega_{(n+1)} - \omega(x_{(n+1)}, 0))g_n(\{\omega_{(l)}^0, a_l\}), \quad (35)$$

$$f_{n+1}^E|_{\{\omega_{(l)}, x_{(l)}\} = \{\Omega_{(l)}(t), X_{n(l)}(t)\}, t=T} = \delta(\omega_{(n+1)} - \omega(x_{(n+1)}, T))g_n(\{\omega_{(l)}^T, X_{n(j),f}\}), \quad (36)$$

где $\delta(\omega_{(n+1)} - \omega^0(x_{(n+1)}))$ и $\delta(\omega_{(n+1)} - \omega^T(x_{(n+1)}))$ – ФПРВ в моменты времени $t = 0$ и $t = T$;

$$g_n(\{\omega_{(l)}^0, a_l\}) = \prod_{j=1}^n \delta(\omega_{(j)} - \omega^0(a_j)),$$

$$g_n(\{\omega_{(l)}^T, X_{n(l),f}\}) = \prod_{j=1}^n \delta(\omega_{(j)} - \omega^T(X_{n(j),f}))$$

суть ФПРВ поля вихря $\omega_{(j)}$ при $t = 0, t = T$ в начальной и “финальной” точках соответственно. Условие равномерности ассоциированной вероятностной меры μ относительно t – это условие на характеристиках $X_{n(j)}(a_j, t)$. Равенство $d/dt \Omega_{n(j)}(t) = 0$ вдоль $X_{n(j)}(a_j, t)$ ведет к независимости μ от t на характеристиках. Следовательно, условие равномерности выполнено. Статистическая формулировка ВПБ переходит в ВПА при $n \rightarrow \infty$ ($j \rightarrow \infty$). Действительно, переходя формально к пределу при $n \rightarrow \infty$, имеем $(X_{n(j)}(a_j, t), \Omega_{n(j)}(a_j, t)) \rightarrow (X(a, t), \Omega(a, t))$, где a заполняют D . Уравнения (11), (12) сходятся к уравнению завихренности в лагранжевой формулировке (см. формулы (52a), (52b) [1]):

$$\frac{d}{dt} X(a, t) = \int da' \Omega(a', t) (\alpha^1(X(a, t) - X(a', t)) + \alpha^2(X(a, t) - X(a', t))), \quad (37)$$

$$\frac{d}{dt} \Omega(a, t) = 0 \quad \text{вдоль } X(a, t). \quad (38)$$

При этом правая часть (32) стремится к

$$\int_0^T da dt \left(\int_D da' \Omega(a', t) \alpha^1(X(a, t) - X(a', t)) \right)^2 + \left(\int_D da' \Omega(a', t) \alpha^2(X(a, t) - X(a', t)) \right)^2, \quad (39)$$

где под интегралом в (38) – ядро Био–Савара. Интеграл (39) совпадает с интегрированной по t кинетической энергией объема жидкости. Проверка выполнения соответствующих краевых условий элементарна. Полученная вариационная краевая задача для функционала (39) с заданными конфигурациями жидкости при $t = 0$ и $t = T$ [9] не является классической, при которой задается начальное положение траектории жидкой частицы и ее скорость.

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы благодарят С.Б. Медведева за полезное обсуждение результатов работы.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-11-00287, <https://rscf.ru/project/22-11-00287/>. А.Н. Гришков поддержан FAPESP (Brazil), проект 2021/09845-0.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Конфликт интересов отсутствует.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Friedrich R., Daitche A., Kamps O., Lülff J., Michel Voß kühle M., Wilczek M. The Lundgren–Monin–Novikov hierarchy: Kinetic equations for turbulence // C.R. Physique. 2012. V. 13. P. 929–953.
2. Lundgren T.S. Distribution functions in the statistical theory of turbulence // Phys. Fluids. 1967. V. 10. P. 969–975.
3. Монин А.С. Уравнения турбулентного движения // Прикладная математика и механика. 1967. Т. 31. № 6. С. 1057–1068.
4. Новиков Е.А. Кинетические уравнения для поля вихря // ДАН. 1967. Т. 177. № 2. С. 299–301.
5. Friedrich R. Statistics of Lagrangian velocities in turbulent flows // Phys. Rev. Lett. 2003. V. 90. P. 084501.
6. Friedrich J. Closure of the Lundgren–Monin–Novikov Hierarchy in Turbulence via a Markov Property of Velocity Increments in Scale. Dissertation: Doktor der Naturwissenschaften. Bochum, 2017.

7. *Wacławczyk M., Staffolani N., Oberlack M., Rosteck A., Wilczek M., Friedrich R.* Statistics of Lagrangian velocities in turbulent flows // *Phys. Rev. E.* 2014. V. 90. P. 013022.
8. *Brenier Y.* The least action principle and the related concept of generalized flows for incompressible perfect fluids // *J. Am. Math. Soc.* 1989. V. 2. P. 225–255.
9. *Шнирельман А.И.* О геометрии группы диффеоморфизмов и динамике идеальной несжимаемой жидкости // *Матем. сб.* 1985. Т. 170. № 1. С. 82–109.
10. *Thalabard S., Bec J.* Turbulence of generalised flows in two dimensions // *J. Fluid Mechan.* 2020. V. 883. P. A49.
11. *Arnold V.I.* Sur la geom'etrie diff'erentielle des groupes de lie de dimension infinie et ses applications a l'hydrodynamique des fluides parfaits // *Ann. Inst. Fourier.* 1966. V. 16. P. 319–361.
12. *Гребенёв В.Н., Гришков А.Н., Оберлак М.* Симметрии уравнений Лангрена–Монина–Новикова для распределения вероятности поля вихря // *Доклады РАН. Физика, технические науки.* 2023. Т. 509. №. 1. С. 50–55.
13. *Гребенёв В. Н., Гришков А.Н., Медведев С.Б.* Преобразования симметрии статистики поля вихря в оптической турбулентности // *Теоретическая и математическая физика.* 2023. Т. 217. № 2. С. 438–451.
14. *Grebenev V.N., Oberlack M., Grishkov A.N.* Infinite dimensional Lie algebra associated with conformal transformations of the two-point velocity correlation tensor from isotropic turbulence // *Z. Angew. Math. Phys.* 2013. V. 64. P. 599–620.
15. *Фалькович Г.* Конформная инвариантность в гидродинамической турбулентности // *Успехи мат. наук.* 2007. Т. 62. Вып. 3(375). С. 193–206.
16. *Friedrich R.* Lagrangian probability distributions of turbulent flows. arXiv:physics/0207015v1. 2018

GENERALIZED BRENIER PRINCIPLE AND THE CLOSURE PROBLEM OF LANDGREN–MONIN–NOVIKOV HIERARCHY FOR VORTICITY FIELD

V. N. Grebenev^a, A. N. Grishkov^b

^a*Federal Research Center for Information and Computational Technologies, Novosibirsk, Russia*

^b*Institute of Mathematics and Statistics, The University of Sao Paulo, Sao Paulo, Brazil*

Presented by Academician of the RAS M.P. Fedoruk

Brenier's concept – a representation of solutions to the equations of ideal incompressible fluids in terms of probability measures on the set of Lagrangian trajectories in the case of their stochasticity, is a generalization of Arnold's principle of least action of finding smooth solutions of Euler's equations. In this work, the variational generalized Brenier principle (Brenier, *J. Am. Math. Soc.* 1989) is used to close the infinite chain of Landgren–Monin–Novikov equations for the n -point probability density functions f_n of the vortex field of two-dimensional turbulence. In addition, within the framework of the statistical approach, an approximation of the variational problem with conditions at the ends posed by Shnirelman (*Mat. Sat.* 1985) for the Euler equation is proposed.

Keywords: Generalized Brenier principle, two-dimensional turbulence, Lundgren–Monin–Novikov equations, closure problem

УДК 531/534

О МОДАЛЬНОЙ ЛОКАЛИЗАЦИИ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ В СИСТЕМЕ СЛАБОСВЯЗАННЫХ МИКРОБАЛОЧНЫХ РЕЗОНАТОРОВ ПРИ ЭЛЕКТРОТЕПЛОМ ВОЗБУЖДЕНИИ

© 2024 г. Н. В. Пискун¹, А. В. Лукин^{1,*}, И. А. Попов¹, Л. В. Штукин¹

Представлено академиком РАН Н. Ф. Морозовым 24.11.2023 г.

Поступило 24.11.2023 г.

После доработки 27.11.2023 г.

Принято к публикации 12.02.2024 г.

Проведено исследование нелинейной динамики параметрически возбуждаемых изгибных колебаний двух слабосвязанных балочных микрорезонаторов при электротеплом возбуждении. Получено установившееся гармоническое распределение температуры в объеме резонаторов в частотной области. Выведена система уравнений механически связанных балочных резонаторов с учетом осажденной частицы на один из них. С помощью асимптотических методов нелинейной динамики получены уравнения в медленных переменных, которые были исследованы методами теории бифуркаций. Показано, что в идеально симметричной системе в определенном диапазоне частот наблюдается эффект нарушения симметрии – возникновение режима с различными амплитудами колебаний двух балочных резонаторов, что может быть положено в основу нового принципа высокоточных измерений слабых возмущений различной физической природы, в частности – измерений сверхмалых масс осаждаемых частиц.

Ключевые слова: МЭМС, слабосвязанные резонаторы, локализация колебаний, детектор массы осаждаемых частиц

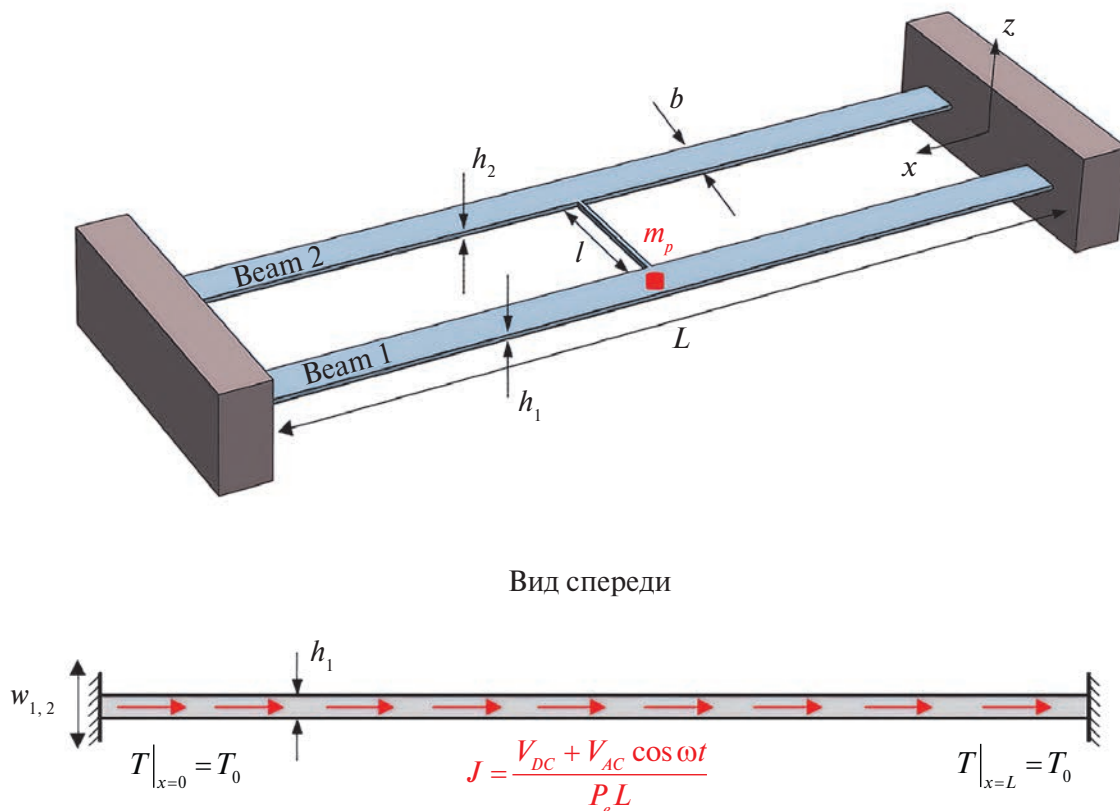
DOI: 10.31857/S2686740024020083, EDN: KHFDZA

Датчики на основе микроэлектромеханических систем (МЭМС), разработанные за последние десятилетия, показали высокий уровень выходных характеристик и в то же время низкое энергопотребление наряду с высокой надежностью. Благодаря своим небольшим размерам и высокой чувствительности к изменениям различных физических величин, МЭМС-датчики имеют весьма обширный спектр потенциальных приложений, среди которых можно назвать инерциальные датчики (акселерометры [1], гироскопы [2]), датчики давления [3], гравиметры [4], датчики скорости и градиента скорости потока [5], датчики перемещения, а также датчики массы [6] и газовые детекторы [7]. Детекторы массы осаждаемых частиц и газовые детекторы

находят применение в относительно новой области применения МЭМС, а именно в биомедицинских системах. Среди конкретных приложений можно назвать датчики для диагностики заболеваний посредством измерения массы небольших биологических элементов, таких как молекулы, вирусы и бактерии [8, 9], а также датчики для мониторинга состава воды и воздуха (в основном измеряется концентрация того или иного газа) [10] для мониторинга качества воздуха и обнаружения потенциальной утечки выхлопных газов на предприятиях.

За последнее время были исследованы различные архитектуры и механизмы измерения сверхмалых масс посредством механических колебаний. Самым распространенным и широко изученным является резонансный детектор массы, где добавление массы на единственный чувствительный элемент меняет значение его собственной частоты колебаний [11–15].

¹Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Санкт-Петербург, Россия
*E-mail: lukin_av@spbstu.ru



Вид спереди

Рис. 1. Модель слабосвязанных микрорезонаторов с иллюстрацией механизма возбуждения колебаний.

Отдельным классом приборов для измерения массы следует отметить микроканальные резонаторы, в которых для детектирования используются резонансные характеристики связанной системы резонатор–жидкость–частица [16, 17].

Наряду с классическими резонансными МЭМС-датчиками интенсивно развивающимся направлением является изучение модального взаимодействия между разными степенями свободы нелинейных и слабосвязанных колебательных систем для применения особенностей этого взаимодействия к задачам высокоточных измерений, в том числе и задачам детектирования массы [18–21].

Авторы работы [22] изучают явления потери симметрии при осаждении частиц при помощи аппарата нелинейных нормальных мод и предлагают измерять их массу на основе отслеживания перехода между различными локализованными режимами, где резко меняется отношение амплитуд колебаний двух резонаторов. В работе [23] показано, что при параметрическом возбуждении колебаний чувствительность детекторов массы может быть повышена

на 1–2 порядка по сравнению с режимом вынужденных колебаний вследствие работы датчика на основе отслеживания бифуркации. Авторами показано, что чувствительность вблизи точки бифуркации типа “вилка” может быть повышена на три порядка, и при этом детектор демонстрирует превосходную помехоустойчивость в определенном диапазоне демпфирования, что открывает возможность избежать проблемы недостаточной надежности для детекторов массы на основе бифуркации.

Настоящая работа посвящена качественному аналитическому исследованию нелинейной динамики параметрически возбуждаемых изгибных колебаний в системе двух слабосвязанных микромеханических резонаторов в целях разработки нового класса МЭМС-датчиков на основе эффекта модальной локализации колебаний.

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Рассматривается система из двух заделанных с двух сторон микробалочных резонаторов (рис. 1), связанных механически через тонкую

упругую перемычку, изгибная жесткость которой много меньше изгибной жесткости резонаторов. В центре одной из балок осажена частица массы m_p . Геометрические параметры резонаторов подобраны таким образом, что резонаторы имеют равные длины $L_1 = L_2 = L$, ширины $b_1 = b_2 = b$ и толщины $h_1 = h_2 = h$. Предполагается, что $h \ll L$ и что прогибы резонаторов $\hat{w}_{1,2}$ в процессе колебаний малые, но конечные, так что модель учитывает растяжение средней плоскости. Резонаторы изготовлены из изотропного упругого материала плотности ρ и с модулем Юнга E .

Параметрические изгибные колебания возбуждаются путем неравномерного по длине и времени нагрева микробалочных элементов вследствие протекания электрического тока J гармонического вида (1). Механизм возбуждения колебаний проиллюстрирован на рис. 1:

$$J = \frac{V_{DC} + V_{AC} \cos \omega t}{\rho_e L}, \quad (1)$$

где V_{DC} – амплитуда постоянной компоненты напряжения, V_{AC} и ω – амплитуда и частота переменной компоненты напряжения, ρ_e – удельное сопротивление материала балки, t – время.

С применением принципа Гамильтона может быть получено следующее уравнение для системы:

$$\begin{aligned} \rho S \frac{\partial^2 \hat{w}_1}{\partial t^2} + m_p \delta \left(\hat{x} - \frac{L}{2} \right) \frac{\partial^2 \hat{w}_1}{\partial t^2} + \hat{\mu} \frac{\partial \hat{w}_1}{\partial t} + EI \frac{\partial^4 \hat{w}_1}{\partial \hat{x}^4} - \\ - \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \left(\hat{N}_1 \frac{\partial \hat{w}_1}{\partial \hat{x}} \right) + \hat{\kappa} (\hat{w}_1 - \hat{w}_2) \delta \left(\hat{x} - \frac{L}{2} \right) = 0, \\ \rho S \frac{\partial^2 \hat{w}_2}{\partial t^2} + \hat{\mu} \frac{\partial \hat{w}_2}{\partial t} + EI \frac{\partial^4 \hat{w}_2}{\partial \hat{x}^4} - \\ - \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \left(\hat{N}_2 \frac{\partial \hat{w}_2}{\partial \hat{x}} \right) - \hat{\kappa} (\hat{w}_1 - \hat{w}_2) \delta \left(\hat{x} - \frac{L}{2} \right) = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где \hat{x} – координата вдоль оси резонаторов, $\hat{\mu}$ – коэффициент демпфирования в среде вокруг резонаторов, $\hat{N}_{1,2}$ – осевая сила, действующая на резонаторы, $\kappa = \frac{3E'I'}{l}$ – коэффициент статической изгибной жесткости перемычки, E' , I' и l – момент инерции сечения, длина перемычки и модуль Юнга материала перемычки

соответственно, I – момент инерции сечения резонаторов, S – площадь сечения резонаторов, $\delta(\cdot)$ – дельта-функция Дирака.

Распорное усилие $\hat{N}_{1,2}$ вызвано эффектом Джоуля из-за нагрева резонаторов $\hat{N}_{th(1,2)}$, а также эффектом растяжения средней плоскости $\hat{N}_{e(1,2)}$:

$$\begin{aligned} \hat{N}_{1,2} &= \hat{N}_{th(1,2)} + \hat{N}_{e(1,2)}, \\ \hat{N}_{th(1,2)} &= -\frac{ES_{1,2}}{L} \int_0^L \alpha (T_{1,2}(\hat{x}) - T_0) d\hat{x}, \quad (3) \\ \hat{N}_{e(1,2)} &= \frac{ES}{2L} \int_0^L \left(\frac{\partial \hat{w}_{1,2}}{\partial \hat{x}} \right)^2 d\hat{x}, \end{aligned}$$

где α – коэффициент линейного температурного расширения материала резонаторов, $T_{1,2}(\hat{x})$ – распределение температуры вдоль оси резонаторов (вычисляется ниже), T_0 – начальная температура резонаторов.

После введения безразмерных параметров

$$w_{1,2} = \frac{\hat{w}_{1,2}}{h}, \quad x = \frac{\hat{x}}{L}, \quad t = \frac{\hat{t}}{\sqrt{\frac{\rho S L^4}{EI}}}, \quad N_{th} = \frac{\hat{N}_{th} \cdot L^2}{EI},$$

$$\kappa = \frac{\hat{\kappa} \cdot L^3}{EI}, \quad \mu = \frac{\hat{\mu} \cdot L^2}{\sqrt{EI \rho S}}, \quad m_{non} = \frac{m_p}{\rho S L}$$

может быть получено уравнение в безразмерном виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} + m_{non} \delta \left(x - \frac{1}{2} \right) \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} + \\ + \mu \frac{\partial w_1}{\partial t} - \left(N_{th} + 6 \int_0^1 \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} \right)^2 dx \right) \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \\ + \kappa (w_1 - w_2) \delta \left(x - \frac{1}{2} \right) = 0, \\ \frac{\partial^4 w_2}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} + \mu \frac{\partial w_2}{\partial t} - \\ - \left(N_{th} + 6 \int_0^1 \left(\frac{\partial w_2}{\partial x} \right)^2 dx \right) \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} - \\ - \kappa (w_1 - w_2) \delta \left(x - \frac{1}{2} \right) = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

2. НАХОЖДЕНИЕ УСТАНОВИВШЕГОСЯ ГАРМОНИЧЕСКОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ В ОБЪЕМЕ РЕЗОНАТОРОВ

Нестационарное одномерное уравнение теплопроводности вдоль оси балки $x \in [0, L]$ имеет вид

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \hat{x}^2} - \frac{1}{\alpha^T} \frac{\partial T}{\partial \hat{t}} = -\frac{1}{k} Q(\hat{x}, \hat{t}), \quad (5)$$

где $\alpha^T = \frac{k}{\rho c}$ – температуропроводность, k – коэффициент теплопроводности, ρ – плотность, c – удельная теплоемкость материала резонаторов, $Q(\hat{x}, \hat{t})$ – объемное тепловыделение в резонаторе вследствие протекания тока.

Тепловые граничные условия показаны на рис. 1. Объемное тепловыделение из-за протекания тока может быть описано следующим образом:

$$\begin{aligned} Q(\hat{x}, \hat{t}) &= J^2 \rho_e = \frac{(V_{DC} + V_{AC} \cos \omega \hat{t})^2}{\rho_e L^2} = \\ &= Q_s(\hat{x}) + Q_d(\hat{x}, \hat{t}), \end{aligned}$$

где

$$Q_s(\hat{x}) = \frac{V_{DC}^2 + \frac{1}{2} V_{AC}^2}{\rho_e L^2}$$

и

$$Q_d(\hat{x}, \hat{t}) = \frac{2V_{DC}V_{AC} \cos \omega \hat{t} + \frac{1}{2} V_{AC}^2 \cos 2\omega \hat{t}}{\rho_e L^2}$$

суть статическая и динамическая компоненты объемного тепловыделения соответственно.

Статическая компонента T_s установившегося распределения температуры в резонаторе имеет вид

$$T_s(\hat{x}) = -\frac{V_{DC}^2 + \frac{1}{2} V_{AC}^2}{2k\rho_e L^2} (\hat{x}^2 - L\hat{x}) + T_0.$$

Установившееся гармоническое распределение температуры T_d в резонаторе может быть найдено в частотной области, для этого задача

записывается в комплексной форме как сумма двух гармоник \tilde{T}_{d1} и \tilde{T}_{d2} с частотами ω и 2ω соответственно:

$$\begin{aligned} T_d(\hat{x}, \omega) &= \tilde{T}_{d1}(\hat{x}, \omega) + \tilde{T}_{d2}(\hat{x}, \omega), \\ \frac{\partial^2 \tilde{T}_{d1,2}}{\partial \hat{x}^2} - \sigma_{1,2}^2 \tilde{T}_{d1,2} &= -\frac{1}{k} \tilde{Q}_{d1,2}, \quad (6) \end{aligned}$$

где

$$\sigma_1 = \frac{i\omega}{\alpha}, \quad \sigma_2 = \frac{2i\omega}{\alpha}, \quad \tilde{Q}_{d1} = \frac{4V_{DC}V_{AC}}{\rho_e L}, \quad \tilde{Q}_{d2} = \frac{V_{AC}^2}{\rho_e L^2}.$$

Физическое распределение температуры при этом представляется как

$$T_d(\hat{x}, \hat{t}, \omega) = \text{Re} \left\{ \tilde{T}_{d1} \exp(i\omega \hat{t}) \right\} + \text{Re} \left\{ \tilde{T}_{d2} \exp(2i\omega \hat{t}) \right\}.$$

Решение гармонической задачи (6) с помощью функции Грина может быть представлено следующим образом [24]:

$$\tilde{T}_{d1,2}(\hat{x}, \omega) = \frac{\alpha}{k} \int_0^L G_{X11}(\hat{x} | \hat{x}'; \omega) \tilde{Q}_{d1,2}(\hat{x}'; \omega) d\hat{x}'.$$

Функция Грина $G_{X11}(\hat{x} | \hat{x}'; \omega)$ при данных граничных условиях имеет вид

$$\begin{aligned} G_{X11}(\hat{x} | \hat{x}'; \omega) &= \frac{e^{-\sigma(2L - |\hat{x} - \hat{x}'|)} - e^{-\sigma(2L - \hat{x} - \hat{x}')}}{2\alpha\sigma(1 - e^{-2\sigma L})} + \\ &+ \frac{e^{-\sigma(|\hat{x} - \hat{x}'|)} - e^{-\sigma(\hat{x} + \hat{x}')}}{2\alpha\sigma(1 - e^{-2\sigma L})}. \end{aligned}$$

3. МЕХАНИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА

Для получения модели пониженного порядка применяется метод Бубнова–Галёркина с разложением по собственным формам изгибных колебаний ненагруженного резонатора. В разложении удерживается лишь первое слагаемое, соответствующее первой форме изгибных колебаний $\phi_1(x)$, так как предполагается движение резонаторов именно по первой форме изгибных колебаний. Уравнения колебаний приобретает вид

$$\begin{aligned}
 & \ddot{q}_1 + C_1 \ddot{q}_1 + C_2 \dot{q}_1 - C_4 q_2 + C_5 q_1^3 + q_1 \times \\
 & \times \left(\Omega_1^2 - C_3 \left[N_{d1}^{\sin} \sin \eta_1 t + N_{d1}^{\cos} \cos \eta_1 t + \right. \right. \\
 & \left. \left. + N_{d2}^{\sin} \sin \eta_2 t + N_{d2}^{\cos} \cos \eta_2 t \right] \right) = 0, \\
 & \ddot{q}_2 + C_2 \dot{q}_2 - C_4 q_1 + C_5 q_2^3 + q_2 \times \\
 & \times \left(\Omega_1^2 + \Delta \Omega^2 - C_3 \times \right. \\
 & \times \left[N_{d1}^{\sin} \sin \eta_1 t + N_{d1}^{\cos} \cos \eta_1 t + \right. \\
 & \left. \left. + N_{d2}^{\sin} \sin \eta_2 t + N_{d2}^{\cos} \cos \eta_2 t \right] \right) = 0,
 \end{aligned} \tag{7}$$

где параметры введены следующим образом:

$$C_1 = m_{non} \phi_1^2 \left(\frac{1}{2} \right), C_2 = \mu, C_3 = \int_0^1 (\phi_1')^2 dx,$$

$$C_4 = \kappa \phi_1^2 \left(\frac{1}{2} \right), C_5 = 6 \left(\int_0^1 (\phi_1')^2 dx \right),$$

$$\Omega_1^2 = \omega_{non,1}^2 + \kappa \phi_1^2 \left(\frac{1}{2} \right) - N_s \int_0^1 (\phi_1')^2 dx,$$

$$\Delta \Omega^2 = 2n_{\%} \omega_{non,1}^2 - \kappa n_{\%} \phi_1^2 \left(\frac{1}{2} \right),$$

$$N_s = \frac{6\alpha L^2 \left(V_{DC}^2 + \frac{1}{2} V_{AC}^2 \right)}{h_1^2 k p_e},$$

$$N_{d1,2}^{\sin} = \frac{12\alpha L}{h_1^2} \int_0^L T_{d1,2}^{\text{amp},\sin} d\hat{x},$$

$$N_{d1,2}^{\cos} = \frac{12\alpha L}{h_1^2} \int_0^L T_{d1,2}^{\text{amp},\cos} d\hat{x}.$$

К полученной системе (7) применяется метод многих масштабов [25], асимптотическое разложение по которому проводится до третьего порядка включительно. В результате была получена система уравнений в медленных переменных, нелинейная динамика которой исследуется далее.

4. ЗОНЫ ВОЗМОЖНОЙ РАСКАЧКИ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

При анализе параметрических колебаний первым шагом исследования является поиск зон параметрического резонанса. В данной работе были применены два метода для построения диаграмм

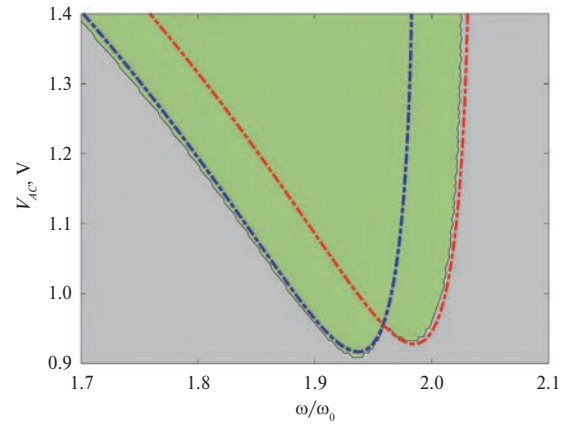


Рис. 2. Зона главного параметрического резонанса. Штриховка – теория Флоке, пунктир – критерий Рауса–Гурвица, $V_{DC} = 0, m_p = 0$.

Айнса–Стретта: классический подход теории Флоке, а также с использованием критерия устойчивости Рауса–Гурвица для системы в медленных переменных. На рис. 2 представлены зоны раскачки колебаний при длине перемычки между резонаторами равной $L_{sm} = 500$ мкм, при отсутствии осажденных частиц $m_p = 0$.

Зоны параметрической раскачки колебаний в системе слабосвязанных резонаторов представляют собой комбинацию из двух зон, типичных для одного резонатора. Левая зона, обозначенная синим пунктиром, соответствует зоне возможной раскачки синфазных колебаний, правая, обозначенная красным пунктиром, – противофазных колебаний. Данные зоны имеют “носики”, которые при уменьшении демпфирования (увеличении добротности) стремятся к значениям собственных частот синфазных (без учета работы упругой перемычки) и противофазных (с учетом перемычки) колебаний. Зоны имеют пересекающиеся области, в них вид колебаний будет зависеть от начальных условий. Также стоит отметить, что решения для зон раскачки колебаний, полученные двумя методами, совпадают.

5. АМПЛИТУДНО-ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИСТЕМЫ

На рис. 3а представлена амплитудно-частотная характеристика системы при $V_{AC} = 0.94$ В, т.е. до момента взаимного пересечения зон раскачки колебаний.

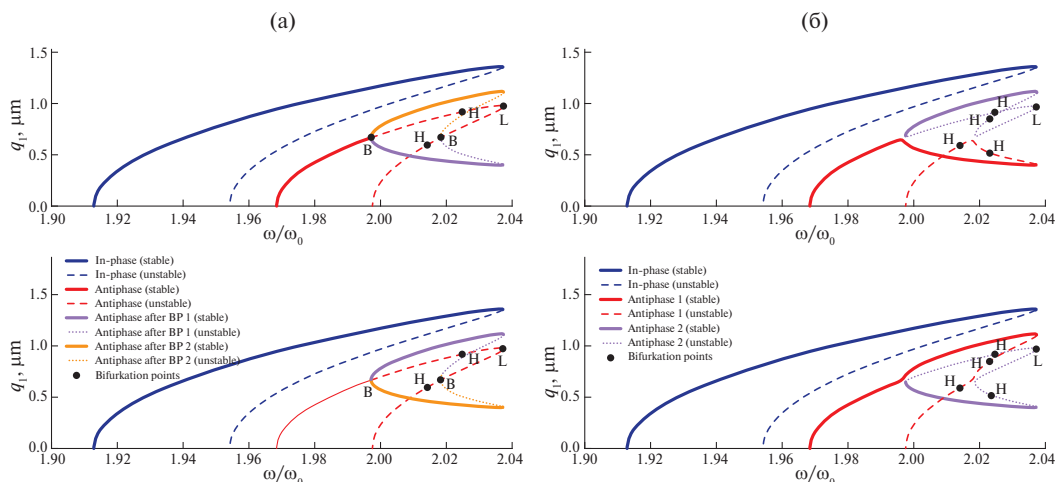


Рис. 3. АЧХ системы при отсутствии пересечения зон раскочки колебаний, $V_{DC} = 0$, $m_p = 0$ (а), $m_p = 10$ пг (б).

Синфазная ветвь АЧХ (синяя линия) представляет собой классическую амплитудно-частотную диаграмму при параметрическом возбуждении с характерной “жесткой” нелинейностью. Ветвь противофазных колебаний (красная линия) имеет особенность в виде точки ветвления типа “вилка” при значении частоты, близком к удвоенной собственной частоте ненагруженного резонатора. После данной точки одна устойчивая ветвь АЧХ каждого резонатора разделяется на две ветви с различными амплитудами (оранжевая и фиолетовая линии), причем если один из резонаторов колеблется с амплитудой верхней ветви, то другой — с амплитудой нижней ветви. Режим колебаний системы, при котором амплитуды резонаторов различны, может быть полезным с точки зрения измерения малых возмущений, вводимых в систему, например, в виде осажденной частицы.

Далее на рис. 3б представлена амплитудно-частотная характеристика резонаторов при наличии возмущения на одном из них в виде осажденной частицы массы $m_p = 10$ пг.

При наличии возмущения противофазная ветвь АЧХ-системы распадается на две непесекающиеся ветви, т.е. в системе также наблюдается режим колебаний с различными амплитудами, причем отношение амплитуд, а также точка перехода из режима с одинаковыми амплитудами в режим с различными зависят от величины возмущения, в нашем случае от массы осаждаемой частицы. Отсюда можно сделать вывод о возможности измерения массы

осаждаемых частиц детектором, чувствительным элементом которого будет служить система из слабосвязанных резонаторов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе выполнено параметрическое исследование нелинейной динамики слабосвязанных резонаторов при электротепловом возбуждении. При помощи принципа Гамильтона получена система уравнений с учетом геометрической нелинейности и наличия возмущения в виде точечной массы. Далее система была сведена к модели пониженного порядка при помощи метода Галёркина. Применен метод многих масштабов для получения системы в медленных переменных, которая затем исследовалась методами теории бифуркаций. Показано, что в симметричной системе на устойчивой противофазной ветви амплитудно-частотной характеристики существует зона значений частоты, при которых в системе наблюдается режим колебаний с различными амплитудами у резонаторов. При наличии осажденной частицы на амплитудно-частотной характеристике наблюдается возникновение изолированной ветви, также соответствующей противофазным колебаниям с различными амплитудами.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при поддержке гранта Совета по грантам Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых МК-4577.2022.1.1.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Индейцев Д.А., Можгова Н.В., Лукин А.В., Попов И.А.* Модель микромеханического модально-локализованного акселерометра с чувствительным элементом в виде балки с начальной погибью // Известия Академии наук. Механика твердого тела. 2023. № 3. С. 135–151.
2. *Indeitsev D.A. et al.* Analysis of imperfections sensitivity and vibration immunity of MEMS vibrating wheel gyroscope // *Nonlinear Dynamics*. 2021. V. 105. P. 1273–1296.
3. *Wang H. et al.* A novel high-sensitivity MEMS pressure sensor for rock mass stress sensing // *Sensors*. 2022. V. 22. № 19. P. 7593.
4. *Valenzuela V.M. et al.* Three robust temperature-drift compensation strategies for a MEMS gravimeter // *J. Applied Physics*. 2023. V. 133. № 23.
5. *Wang Y.H. et al.* MEMS-based gas flow sensors // *Microfluidics and nanofluidics*. 2009. V. 6. P. 333–346.
6. *Nathani M.U. et al.* Capacitive based micromachined resonators for low level mass detection // *Micromachines*. 2020. V. 12. № 1. P. 13.
7. *Yaqoob U., Younis M.I.* Chemical gas sensors: Recent developments, challenges, and the potential of machine learning – A review // *Sensors*. 2021. V. 21. № 8. P. 2877.
8. *Ganesan A.V.* A novel MEMS based immunosensor for ebola virus detection // *ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition*. Amer. Soc. of Mechanical Engineers, 2013. V. 56321. P. V07BT08A074.
9. *Ghommem M. et al.* Deep learning for gas sensing using MOFs coated weakly-coupled microbeams // *Applied Mathematical Modelling*. 2022. V. 105. P. 711–728.
10. *Yaqoob U. et al.* Highly selective multiple gases detection using a thermal-conductivity-based MEMS resonator and machine learning // *IEEE Sensors Journal*. 2022. V. 22. № 20. P. 19858–19866.
11. *Akulenko L.D., Nesterov S.V.* Mass defect influence on the longitudinal vibration frequencies and mode shapes of a beam // *Mechanics of Solids*. 2014. V. 49. P. 104–111.
12. *Bouchaala A. et al.* Mass and position determination in MEMS mass sensors: a theoretical and an experimental investigation // *J. Micromechanics and Microengineering*. 2016. V. 26. № 10. P. 105009.
13. *Mouro J., Tiribilli B., Paoletti P.* A versatile mass-sensing platform with tunable nonlinear self-excited microcantilevers // *IEEE Transactions on Nanotechnology*. 2018. V. 17. № 4. P. 751–762.
14. *Patocka F. et al.* Position-dependent mass responsivity of silicon MEMS cantilevers excited in the fundamental, two-dimensional roof tile-shaped mode // *J. Micromechanics and Microengineering*. 2019. V. 29. № 4. P. 045009.
15. *Xia C. et al.* A mass multi-warning scheme based on one-to-three internal resonance // *Mechanical Systems and Signal Processing*. 2020. V. 142. P. 106784.
16. *Yan H. et al.* A measurement criterion for accurate mass detection using vibrating suspended microchannel resonators // *J. Sound and Vibration*. 2017. V. 403. P. 1–20.
17. *Yan H. et al.* Relative Vibration of Suspended Particles With Respect to Microchannel Resonators and Its Effect on the Mass Measurement // *J. Vibration and Acoustics*. 2019. V. 141. № 4. P. 041005.
18. *Ghommem M. et al.* Deep learning for gas sensing using MOFs coated weakly-coupled microbeams // *Applied Mathematical Modelling*. 2022. V. 105. P. 711–728.
19. *Zhao J. et al.* An asymmetric mode-localized mass sensor based on the electrostatic coupling of different structural modes with distributed electrodes // *Nonlinear Dynamics*. 2022. V. 108. № 1. P. 61–79.
20. *Xiong L., Tang L.* On the Sensitivity Analysis of Mode-Localized Sensors Based on Weakly Coupled Resonators // *J. Vibration Engineering & Technologies*. 2023. V. 11. № 3. P. 793–807.
21. *Fang Z. et al.* A multi-sensing scheme based on nonlinear coupled micromachined resonators // *Nonlinear Dynamics*. 2023. V. 111. № 9. P. 8021–8038.
22. *Grenat C. et al.* Mass sensing by symmetry breaking and localization of motion in an array of electrostatically coupled nonlinear MEMS resonators // *Intern. J. Non-Linear Mechanics*. 2022. V. 140. P. 103903.
23. *Song J. et al.* A Novel Mass Sensor Based on Parametrically Excited Mode-Localized Resonators // *International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*. Amer. Soc. Mechanical Engineers, 2022. V. 86298. P. V008T08A008.
24. *Beck J.V. et al.* Heat conduction using Green's function. Boca Raton (FL, USA): Taylor & Francis, 1992.
25. *Найфэ А.* Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984.

SYMMETRY BREAKING AND MODAL LOCALIZATION IN A SYSTEM OF PARAMETRICALLY EXCITED MICROBEAM RESONATORS

N. V. Piskun^a, A. V. Lukin^a, I. A. Popov^a, L. V. Shtukin^a

^a*Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, Saint-Petersburg, Russia*

Presented by Academician of the RAS N.F. Morozov

In this work, we study the nonlinear dynamics of parametrically excited bending vibrations of two weakly coupled beam microresonators under electrothermal excitation. A steady-state harmonic temperature distribution in the volume of the resonators in the frequency domain was obtained. A system of equations for mechanically coupled beam resonators is derived, considering the deposited particle on one of them. Using asymptotic methods of nonlinear dynamics, equations in slow variables were obtained, which were studied by methods of the theory of bifurcations. It is shown that in a perfectly symmetrical system in a certain frequency range, the effect of symmetry breaking is observed – the emergence of a mode with different amplitudes of oscillations of two beam resonators, which can be the basis for a new principle of high-precision measurements of weak disturbances of various physical natures, in particular – measurements of ultra-low masses of deposited particles.

Keywords: MEMS, weakly coupled resonators, modal localization, mass sensor

УДК 532.685: 532.71

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРИТЕРИЙ ОБРАЗОВАНИЯ КРИОПЭГОВ В ПРОЦЕССЕ ПРОМЕРЗАНИЯ ПОРОД, НАСЫЩЕННЫХ РАСТВОРОМ СОЛИ

© 2024 г. М. М. Рамазанов^{1,2,*}, Н. С. Булгакова^{1,3,**}, академик РАН Л. И. Лобковский^{4,***}

Поступило 30.10.2023 г.

После доработки 30.10.2023 г.

Принято к публикации 12.02.2024 г.

На основе математической модели, учитывающей эффект осмоса, получен критерий образования криопэггов в промерзающих породах, насыщенных раствором соли. Показано, что указанный критерий существенно зависит от коэффициента осмоса. Исследованы свойства криопэга в зависимости от параметров задачи.

Ключевые слова: промерзание, засоленные породы, криопэги, осмос, математическая модель, моделирование

DOI: 10.31857/S2686740024020094, EDN: KNEIDT

Промерзание горных пород, насыщенных раствором солей, является сложным процессом, включающим различные механизмы переноса солей и влаги, а также развитие различных деформаций и напряжений в грунтовом скелете.

Согласно современным представлениям, в течение геологической истории толщи горных пород в прибрежной зоне Сибирского арктического шельфа подвергались периодическим процессам трансгрессии и регрессии моря, а также замерзания и оттаивания, в результате чего здесь сформировалась мерзлота с большим количеством линз и прослоев сильноминерализованных вод с отрицательной температурой,

называемых криопэгами [1, 2]. В то же время известно, что соленая морская вода и криопэги самым существенным образом способствуют разрушению и деградации вечной мерзлоты и, соответственно, интенсивному высвобождению метана в результате разложения метастабильных газогидратов, содержащихся в мерзлых породах в самоконсервированном виде [3–5]. Метан является мощным парниковым газом и влияет на глобальное потепление [6]. Поэтому исследования закономерностей образования криопэггов при промерзании пород, насыщенных раствором солей, весьма актуальны.

Моделирование процессов как замерзания, так и оттаивания пород и почв, насыщенных раствором солей, проводили многие авторы [7–9]. Существенным отличием предлагаемой нами модели является то, что в ней учитывается осмос, связанный с градиентом концентрации соли, который характерен для растворов и является мощным механизмом движения (миграции) растворов в слабопроницаемых пористых средах [10, 11]. Это, в частности, позволяет найти критерий образования криопэггов в промерзающих засоленных грунтовых средах, который существенно зависит от коэффициента осмотической фильтрации. Кроме того, как правило, аналогичные модели не учитывают

¹Институт проблем геотермии и возобновляемой энергетики – филиал Объединенного института высоких температур Российской академии наук, Махачкала, Россия

²Институт динамики геосфер им. академика М.А. Садовского Российской академии наук, Москва, Россия

³Дагестанский государственный университет народного хозяйства, Махачкала, Россия

⁴Институт океанологии им. П.П. Ширинова Российской академии наук, Москва, Россия

*E-mail: mukatay-igp@mail.ru

**E-mail: ipgnatali@mail.ru

***E-mail: llobkovsky@ocean.ru

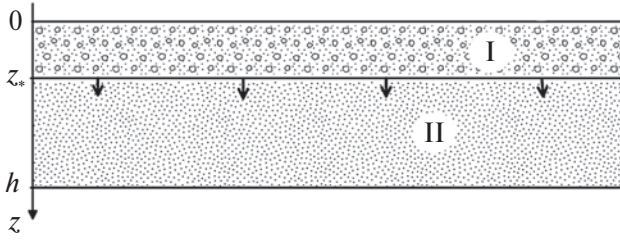


Рис. 1. Схема задачи: I – частично замороженная область пласта, насыщенная льдом и раствором соли, находящимися в термодинамическом равновесии; II – незамороженная область пласта, насыщенная раствором соли; $z = z_*(t)$ – фронт частичного замерзания раствора.

деформацию вмещающих пород, что не всегда оправдано, особенно при влиянии осмоса, который может создавать большие давления, способные разрушить пласт.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Имеется горизонтальный проницаемый грунтовый пласт, насыщенный раствором соли с постоянной концентрацией и с заданной температурой. В некоторый момент времени на верхней границе температура падает ниже температуры замерзания при данном локальном давлении и данной концентрации раствора. Тогда сверху вниз будет распространяться фронт частичного замерзания раствора (рис. 1).

Требуется сформулировать математическую модель рассматриваемого процесса и исследовать условия образования и свойства криопэггов.

Отметим, что, вообще говоря, над двумя слоями, показанными на рис. 1, будет присутствовать еще один полностью замерзший слой с подвижной границей. Однако можно показать, что если проницаемость не слишком мала, то граница этого слоя будет двигаться намного медленнее передней границы частичного замерзания, показанной на рис. 1. В этом случае указанный первый слой в первом приближении можно не учитывать. При необходимости учет этого слоя не составит принципиальных трудностей.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Приведем систему уравнений в первом слое. Направим ось z вниз и выберем систему координат, как это показано на рис. 1.

Область I. Система в этой области находится в состоянии фазового равновесия, потому согласно уравнению состояния температура является функцией давления и концентрации соли. Обычно считается, что температура зависит от концентрации линейно. Другими словами, уравнение состояния можно записать в виде

$$p = P_w(T + \psi_0 c), \quad (1)$$

здесь $p = P_w(T)$ – известная функция, уравнение состояния для чистой жидкости.

Система уравнений в рассматриваемой области пласта запишется в виде

$$\begin{aligned} v = -\frac{kf_w(s)}{\eta} \left(\rho_w \frac{\partial \mu_1}{\partial c} c' + \frac{dP}{dT} (T' + \psi_0 c') - \rho_w g \right), \\ \frac{\partial}{\partial t} [m(sp_w + (1-s)\rho_i)] + (\rho_w v)' = 0, \\ (ms + \Gamma) \frac{\partial c}{\partial t} + v c' = (sDc)' - c_0 \frac{m\rho_i}{\rho_w} \frac{\partial s}{\partial t}, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\Gamma(K, c) = \frac{\partial a(K, c)}{\partial c}, \quad \lim_{Kc \rightarrow \infty} a(K, c) = a_\infty,$$

$$\bar{C}_m \frac{\partial T}{\partial t} + qm\rho_i \frac{\partial s}{\partial t} + \rho_w \bar{C}_w v T' = (\lambda_m T')',$$

$$\bar{C}_m = C_m - ms\beta_w T \frac{dP}{dT},$$

$$\rho_w \bar{C}_w = \rho_w C_w - \beta_w T \frac{dP}{dT},$$

$$C_m = m[sp_w C_w + (1-s)\rho_i C_i] + (1-m)C_s,$$

$$\lambda_m = m[s\lambda_w + (1-s)\lambda_i] + (1-m)\lambda_s,$$

где k – проницаемость; s – водонасыщенность; ρ_w, ρ_i – плотности воды и льда соответственно; v – поле скорости раствора; C_m – эффективная теплоемкость единицы объема насыщенной пористой среды; C_w, C_i, C_s – теплоемкости воды, льда и пород; T – температура; c – концентрация; c_0 – характерная концентрация; λ_m – эффективная теплопроводность насыщенной пористой среды; $\lambda_w, \lambda_i, \lambda_s$ – теплопроводности воды, льда и пород; μ_1 – химический потенциал

растворителя в растворе; η – вязкость раствора; D – коэффициент диффузии соли в растворе; q – удельная теплота плавления льда; a – концентрация соли в твердой фазе пористой среды; K – константа адсорбционного равновесия; β_w – коэффициент теплового расширения.

В дальнейшем в этой системе будем полагать коэффициенты $\partial\mu_1/\partial c$, dP_w/dT постоянными величинами, при этом сами величины давления, температуры и концентрации связаны нелинейной зависимостью фазового равновесия (1). Кроме того, для простоты будем считать фазовую проницаемость раствора линейной, т.е. положим

$$f_w(s) = s.$$

В (2) учтена установившаяся адсорбция соли. Например, в случае изотермы Ленгмюра уравнение адсорбции имеет вид

$$a(K, c) = a_\infty \frac{Kc}{1 + Kc}, \quad (3)$$

где a_∞ – значение предельной адсорбции; c – равновесная концентрация адсорбента в растворе.

Отметим, что первый член в законе Дарси в (2), пропорциональный градиенту концентрации, есть осмотическая сила [10]. В (2) первое уравнение – это обобщенный закон Дарси, второе – уравнение баланса массы воды, третье и четвертое – уравнения баланса соли и энергии.

В дальнейшем будем полагать, что выполнено неравенство

$$\frac{\rho_w g}{\gamma dP/dT} \ll 1, \quad \gamma = \frac{T_0 - T^0}{h}, \quad (4)$$

где h – толщина слоя; T_0 – температура на нижней границе области II, T^0 – температура на границе $z = 0$. Неравенство (4) означает, что градиент температуры на линии насыщения, вызванный гидростатическим перепадом давления, который по оценкам составляет примерно один градус на сто метров, мал по сравнению с рассматриваемым градиентом температуры.

В соответствии с условием (4) в дальнейшем в первом уравнении системы (2) будем пренебрегать силой тяжести.

Систему уравнений в области II получим из системы (2), если положить водонасыщенность s равной единице и учесть, что давление уже не будет зависеть от температуры и концентрации, а будет независимой переменной.

Граничные условия. Считая для простоты нижний слой бесконечным, граничные условия, характеризующие сохранение потоков массы воды, соли и энергии, можно записать в виде

$$z = 0: \quad T_i = T_i^0, \quad s = s^0, \quad v = 0, \quad (5)$$

$$z = z_*:$$

$$\begin{aligned} \rho_w (v_- - ms_- \dot{z}_*) - \rho_i m (1 - s_-) \dot{z}_* &= \rho_w (v_+ - m \dot{z}_*), \\ T_- = T_+ = T_*, \\ -\rho_i q m (1 - s_-) \dot{z}_* + \lambda_- T'_- &= \lambda_+ T'_+, \\ c_- = c_+ = c_*, \\ (v_- - ms_- \dot{z}_*) c_* - s_- D c'_- &= (v_+ - m \dot{z}_*) c_* - D c'_+, \end{aligned} \quad (6)$$

$$v_+ = -\frac{k}{\eta} p'_+,$$

$$p_- = p_+ = p_* = P(T_*),$$

$$z \rightarrow \infty: \quad p \rightarrow p_0, \quad T \rightarrow T_0, \quad c \rightarrow c_0, \quad (7)$$

где T^0 – значение температуры на границе $z = 0$.

Здесь индексы определены следующим образом: индекс “+” характеризует указанную величину при приближении к той или иной границе снизу, индекс “-” – при приближении сверху, индекс “*” указывает на значение на границе $z = z_*$, верхний индекс “0” – на границе $z = 0$, нижний индекс “0” – на границе $z \rightarrow \infty$.

Отметим, что водонасыщенность на границе фазового перехода может терпеть разрыв. В дальнейшем давление будем отсчитывать от гидростатического, а температуру от T^0 .

Запишем задачу (2) в безразмерном виде. Для этого введем масштабы:

$$\begin{aligned} [z] = h, \quad [v] = -\frac{k}{\eta h} \frac{dP}{dT} (T_0 - T^0), \quad [t] = \frac{h}{[v]}, \\ [T] = T_0 - T^0, \\ [p] = -\frac{dP}{dT} (T_0 - T^0), \quad [c] = c_0. \end{aligned} \quad (8)$$

В безразмерном виде, сохраняя обозначения прежними, имеем в области I:

$$\begin{aligned}
v &= s[(\gamma_f + \psi_0)c' + T'], \\
\frac{1}{N_s} \frac{\partial s}{\partial t} - \frac{1}{N_p} \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \psi_0 \frac{\partial c}{\partial t} \right) + v' &= 0, \\
\gamma_c \frac{\partial c}{\partial t} + v c' &= \frac{1}{Pe_c} c'' - \gamma_s \frac{\partial s}{\partial t}, \\
\gamma_T \frac{\partial T}{\partial t} + \gamma_q \frac{\partial s}{\partial t} + v T' &= \frac{1}{Pe_T} T'', \quad (9)
\end{aligned}$$

здесь Pe_T , Pe_c – числа Пекле по температуре и концентрации соответственно.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{N_s} &= m \left(1 - \frac{\rho_i}{\rho_w} \right), \\
\frac{1}{N_p} &= \left[\left(s_0 + (1-s_0) \frac{\rho_i}{\rho_w} \right) \frac{\partial m}{\partial p} + \right. \\
&+ \left. \frac{m}{\rho_w} \left(s_0 \frac{\partial \rho_w}{\partial p} + (1-s_0) \frac{\partial \rho_i}{\partial p} \right) \right] (T_0 - T^0) \left| \frac{dP}{dT} \right|, \\
\gamma_f &= \rho_w \left| \frac{\partial \mu_1}{\partial c} \right| c_0 \left[(T_0 - T^0) \left| \frac{dP}{dT} \right| \right]^{-1}, \\
\gamma_c &= m s_0 + \Gamma, \quad \gamma_s = m \frac{\rho_i}{\rho_w}, \\
\gamma_T &= \frac{C_m + m s \beta_w \bar{T} \left| \frac{dP}{dT} \right|}{\rho_w C_w + \beta_w \bar{T} \left| \frac{dP}{dT} \right|}, \quad (10) \\
\gamma_q &= \frac{q m \rho_i}{\left[\rho_w C_w + \beta_w \bar{T} \left| \frac{dP}{dT} \right| \right] (T_0 - T^0)}, \\
Pe_T &= \frac{[v] h \left[\rho_w C_w + \beta_w \bar{T} \left| \frac{dP}{dT} \right| \right]}{\lambda_m}, \\
Pe_c &= \frac{[v] h}{m s_0 D}, \quad [v] = -\frac{k}{\eta h} \frac{dP}{dT} (T_0 - T^0).
\end{aligned}$$

Уравнения в области II получим, полагая в (9) водонасыщенность тождественно равной единице, а давление независимой величиной.

АВТОМОДЕЛЬНАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Решение будем искать в автомодельном виде, вводя новую координату ξ :

$$\begin{aligned}
v &= \frac{v(\xi)}{\sqrt{t}}, \quad T = T(\xi), \quad c = c(\xi), \\
p &= p(\xi), \quad \xi = \frac{z}{\sqrt{t}}. \quad (11)
\end{aligned}$$

Тогда будем иметь систему в частично замороженной области II:

$$\begin{aligned}
v &= s[(\gamma_f + \psi_0)c' + T'], \\
-\frac{\xi}{2N_s} s' + \frac{\xi}{2N_p} (T' + \psi_0 c') + v' &= 0, \\
-\left(\frac{\gamma_c \xi}{2} - v \right) c' &= \frac{1}{Pe_c} c'' + \frac{\gamma_s \xi}{2} s', \quad (12) \\
-\left(\frac{\gamma_T \xi}{2} - v \right) T' &= \frac{1}{Pe_T} T'' + \frac{\gamma_q \xi}{2} s'.
\end{aligned}$$

Полагая водонасыщенность s равной единице, получим уравнения во втором слое. В качестве граничных условий имеем равенства (5)–(7), записанные в автомодельных координатах.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРИТЕРИЙ ОБРАЗОВАНИЯ КРИОПЭГОВ

Под криопэггом будем понимать замкнутую область пласта, насыщенную высокоминерализованным раствором в условиях отрицательных температур. Полагаем, что поры на границе криопэга полностью заполнены льдом.

Для того чтобы криопэг мог образоваться, параметры рассматриваемого процесса промерзания должны удовлетворять некоторым критериям. В данном разделе выведены математические неравенства, соответствующие этим условиям. Физическая суть этих условий заключается в том, что если коэффициент осмоса слишком большой, то вытягивание влаги, вызванное осмосом, из талой области в промерзающую будет превалировать над промерзанием, и криопэг образоваться не может. Напротив, если осмотический коэффициент равен нулю, то выталкивание раствора из промерзающей области, вызванное ростом равновесного давления при охлаждении и разностью плотностей воды и льда, будет доминирующим процессом, и криопэг в условиях рассматриваемой модели также не образуется.

В данном разделе полагаем, что водонасыщенность в начале координат, т.е. на охлаждаемой границе, равна нулю. В простейшем случае двухмерной задачи для образования криопэга

необходимо, чтобы водонасыщенность обращалась в нуль, кроме начала координат, в еще одной точке промерзающей области $\xi_0 \leq \xi_*$, и в этой точке производная водонасыщенности должна быть отрицательной, т.е. должны выполняться условия:

$$\text{при } \xi = \xi_0 \leq \xi_* : \quad s = 0, \quad s' < 0. \quad (13)$$

Рассмотрим полное, включая скорость, уравнение для водонасыщенности, которое получается из системы (12) после исключения вторых производных по температуре и концентрации:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{N_s} - \frac{2v}{\xi s} + s \left(Pe_T \gamma_q + (\gamma_f + \psi_0) Pe_c \gamma_s \right) \right] s' + \\ & + s \left[Pe_T \left(\gamma_T - \frac{2v}{\xi} \right) T' + \right. \\ & \left. + (\gamma_f + \psi_0) Pe_c \left(\gamma_c - \frac{2v}{\xi} \right) c' \right] = \\ & = \frac{1}{N_p} (T' + \psi_0 c'), \\ & v = s \left[(\gamma_f + \psi_0) c' + T' \right]. \end{aligned} \quad (14)$$

Положим в этом уравнении $s = 0$, тогда получим

$$\left[\frac{1}{N_s} - 2 \frac{(\gamma_f + \psi_0) c' + T'}{\xi} \right] s' = \frac{1}{N_p} (T' + \psi_0 c'). \quad (15)$$

Разлагая решение в ряд Фурье по степеням ξ , с учетом последних двух уравнений в (12) условия возникновения криопэга запишутся в виде

$$\begin{aligned} s'(\xi_0) &= \frac{N_s T'_0}{N_p} \frac{\frac{\gamma_f}{\gamma_f + \psi_0} - \left[A - \frac{\psi_0 B}{(\gamma_f + \psi_0)} \right] \frac{\xi_0^2}{2}}{1 + N_s [A - B] \xi_0 T'_0} < 0, \\ A &= \frac{Pe_T}{2} \left(\gamma_T + \frac{\gamma_f}{\gamma_f + \psi_0} \frac{N_s}{N_p} \gamma_q \right), \\ B &= \frac{Pe_c}{2} \left(\gamma_c - \gamma_f \frac{N_s}{N_p} \gamma_s \right), \\ s(\xi_0) &= 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь $T'_0 = \left. \frac{dT}{d\xi} \right|_{\xi=0}$.

Если такой точки ξ_0 в частично замороженной области, т.е. области $0 < \xi_0 \leq \xi_*$, нет, то криопэг отсутствует.

Рассмотрим случай малых коэффициентов осмоса, когда

$$\gamma_f \ll \psi_0. \quad (17)$$

Тогда из (16) приближенно получим

$$\begin{aligned} Pe_T \gamma_T > Pe_c \gamma_c \left[1 - \frac{\gamma_f}{\psi_0} \left(1 - \frac{N_s \psi_0}{N_p \gamma_c} \gamma_s \right) - \right. \\ \left. - \frac{\gamma_f}{\psi_0} \frac{N_s}{N_p} \gamma_q \right], \quad \frac{\gamma_f}{\psi_0} \ll 1. \end{aligned} \quad (18)$$

Значение ξ_0 находится из второго уравнения (16) или приближенно из уравнения

$$\begin{aligned} & \frac{\gamma_f}{\psi_0} - \left[\frac{Pe_T}{2} \left(\gamma_T + \frac{\gamma_f}{\psi_0} \frac{N_s}{N_p} \gamma_q \right) - \right. \\ & \left. - \frac{Pe_c}{2} \left(\gamma_c \left(1 - \frac{\gamma_f}{\psi_0} \right) - \gamma_f \frac{N_s}{N_p} \gamma_s \right) \right] \frac{\xi_0^2}{6} = 0, \\ & \frac{Pe_T}{2} \left(\gamma_T + \frac{\gamma_f}{\psi_0} \frac{N_s}{N_p} \gamma_q \right) - \\ & - \frac{Pe_c}{2} \left(\gamma_c \left(1 - \frac{\gamma_f}{\psi_0} \right) - \gamma_f \frac{N_s}{N_p} \gamma_s \right) > 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Отсюда следует, что для наличия криопэга требуется, чтобы коэффициент осмоса был отличным от нуля. Кроме того, из (19) следует, что с ростом коэффициента осмоса величина ξ_0 растет и при некотором критическом значении γ_{fc} достигает границы фазового перехода ξ_* , при дальнейшем росте γ_f криопэг раскрывается и водонасыщенность рассматриваемой области на фазовой границе растет. Таким образом, с одной стороны, малые значения коэффициента осмоса необходимы для формирования криопэга, а с другой – при превышении этим коэффициентом критического значения закрытый криопэг не образуется.

Указанное критическое значение γ_{fc} находится из условия $\xi_0 = \xi_*$ или

$$s(\xi_*) = 0. \quad (20)$$

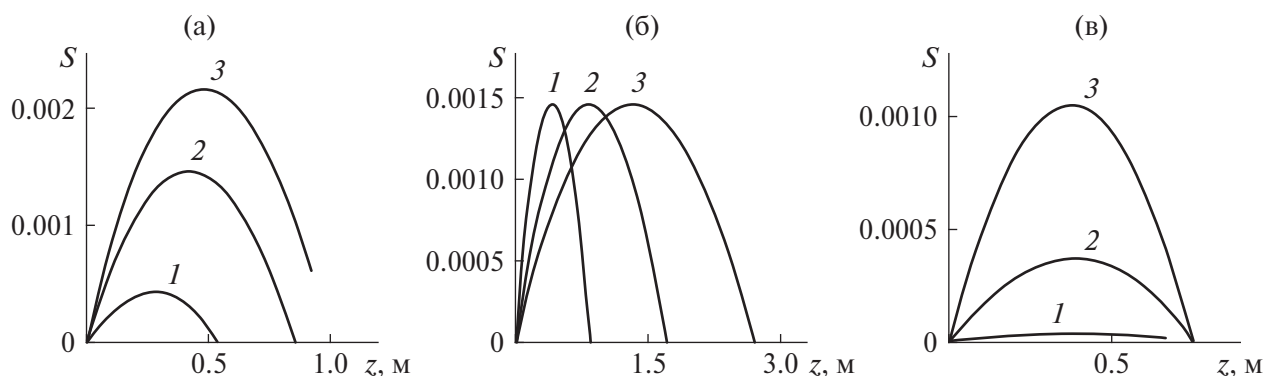


Рис. 2. Распределение водонасыщенности с глубиной при $Pe_c = 10$, $Pe_T = 0.1$, $c_0 = 1.7\%$, $T^0 = -2^\circ\text{C}$.

(а) $t = 1$ год, $\beta_p = 0.1$ при разных значениях коэффициента осмоса: $\gamma_f / \gamma_{f0} = 0.5; 1.3; 1.8$ (1–3);

(б) $\gamma_f / \gamma_{f0} = 1.3$, $\beta_p = 0.3$ для разных значений времени: $t = 1; 4; 10$ год (1–3);

(в) $t = 1$ год, $\gamma_f / \gamma_{f0} = 10$ при разных значениях сжимаемости пород: $\beta_p = 0.01, 0.1, 0.3$ (1–3).

Здесь $\gamma_{f0} = 10^{-3}$ – характерный для криопэга в данных условиях безразмерный осмотический коэффициент.

Приближенно γ_{fc} можно вычислить, полагая в (19) $\xi_0 = \xi_*$.

ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

В данной задаче о промерзании насыщенных пород имеются две силы: выталкивающая раствор в незамерзшую область и втягивающая. Выталкивающая сила связана с тем, что равновесное давление растет с уменьшением температуры, а также с разностью плотностей воды и льда, а втягивающая – вызвана осмотической силой. В зависимости от значений параметров превалирует та или иная сила. Основные свойства рассматриваемого процесса промерзания обусловлены главным образом конкуренцией этих сил.

Из представленных в предыдущем разделе результатов следует, что при определенных условиях промерзания пород насыщенных раствором солей в мерзлоте могут образоваться криопэги (замкнутые “карманы с рассолом”). Математический критерий образования криопэга в рамках рассматриваемой постановки задачи дает формулы (13)–(19).

Некоторые свойства, связанные с криопэгами, полученные на основе численного решения системы (12), иллюстрирует рис. 2. Как показывают расчеты, криопэги в рассматриваемых условиях образуются при наличии коэффициента осмоса γ_f , но он должен быть достаточно мал. Рисунок 2а показывает, что с увеличением

коэффициента осмоса криопэг растет и расширяется (кривая 2). При дальнейшем росте γ_f криопэг открывается (кривая 3). На рис. 2б показана эволюция криопэга во времени. Видно, что криопэг расширяется вместе с продвижением фронта промерзания. На рис. 2в показаны распределения водонасыщенности с глубиной через год после начала промерзания для различных сжимаемостей пород. Как и следовало ожидать, с ростом водоемкости размер криопэга становится больше. Кроме того, заметим, что раствор внутри криопэга практически неподвижен.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе предложенной математической модели проведены исследования процесса промерзания пород, насыщенных растворами солей с учетом осмотического эффекта. Выведен математический критерий образования закрытых “карманов с рассолами” (криопэгов) в мерзлой зоне промерзающих пород. Показаны закономерности зависимости процесса образования криопэгов от коэффициента осмотической силы и других параметров задачи.

На основе численного исследования показано, что при больших значениях осмотического коэффициента в промерзающих грунтах поровый раствор втягивается в промерзающую область из талой области, а при малых, напротив, выталкивается. Выталкивающая сила связана

с тем, что равновесное давление растет с уменьшением температуры, а также с разностью плотностей воды и льда. Это вполне согласуется с результатами физических экспериментов, когда при промерзании глинистые грунты, где осмотические свойства сильно выражены, втягивают раствор, а пески, напротив, выталкивают [12, 13]. Сравнение результатов математических экспериментов с физическими показали не только качественное, но и очень хорошее количественное согласие во многом благодаря учету осмотического эффекта, без которого указанное согласие не достигается.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследования выполнены при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 22-67-00025).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дубиков Г.И., Иванова Н.В. Засоленные мерзлые грунты и их распространение на территории СССР / В кн.: Засоленные мерзлые грунты как основания сооружений. М.: Наука, 1990. С. 3–9.
2. Стрелецкая И.Д., Лейбман М.О. Криогеохимическая взаимосвязь пластовых льдов, криопэггов и вмещающих их отложений центрального Ямала // Криосфера Земли. Новосибирск: ГЕО. 2002. Т. VI. № 3. С. 15–24.
3. Shakhova N., Semiletov I., Dudarev O., Mazurov A.K., Charkin A., Salyuk A., Kosmach D., Karnaukh V., Chernykh D., Gustafsson O., Sergienko V., Lobkovsky L., Ananiev R., Dmitrevsky N., Meluzov A., Tumskoy V., Koshurnikov A., Gunar A., Grigoriev M. Current rates and mechanisms of subsea permafrost degradation in the East Siberian Arctic Shelf // Nature Communications. 2017. V. 8. P. 15872. <https://doi.org/10.1038/ncomms15872>
4. Лобковский Л.И., Рамазанов М.М. Фронтальной режим теплопереноса в газогидратном пласте в условиях отрицательных температур // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2018. № 4. С. 75–89. <https://doi.org/10.31857/S056852810000562-9>
5. Chuvilin E., Ekimova V., Bukhanov B., Grebenkin S.; Shakhova N.; Semiletov I. Role of Salt Migration in Destabilization of Intra Permafrost Hydrates in the Arctic Shelf: Experimental Modeling // Geosciences. 2019. V. 9 (4). P. 188:1–188:18. <https://doi.org/10.3390/geosciences9040188>
6. Якушев В.С. Природный газ и газовые гидраты в криолитозоне. М.: ВНИИГАЗ, 2009. 190 с.
7. Цыпкин Г.Г. Течения с фазовыми переходами в пористых средах. М.: Физматлит, 2009. 232 с.
8. Васильев В.И., Максимов А.М., Петров Е.Е., Цыпкин Г.Г. Теплоперенос в промерзающих и протаивающих грунтах. М.: Наука, Физматлит, 1996. 224 с.
9. Максимов А.М., Цыпкин Г.Г. Явление перегрева и образование двухфазной зоны при фазовых переходах в мерзлых грунтах // ДАН СССР. 1987. Т. 294. № 5. С. 1117–1121.
10. Рамазанов М.М., Каракин А.В., Лобковский Л.И. Математическая модель движения растворов с учетом осмотического эффекта // ДАН. 2019. Т. 489. № 1. С. 75–79. <https://doi.org/10.31857/S0869-5652489175-79>
11. Рамазанов М.М., Булгакова Н.С., Лобковский Л.И. Осмотическая конвекция // ДАН. Физика, технические науки. 2022. Т. 504. № 1. С. 47–52. <https://doi.org/10.31857/S2686740022020109>
12. Chuvilin E.M., Ershov E.D., Naletova N.S. Mass transfer and structure formation in freezing saline soils // PERMAFROST – Proc. Seventh International Conference. Yellowknife (Canada), Collection Nordica No 55. 1998. P. 173–179.
13. Chuvilin E.M. Migration of ions of chemical elements in freezing and frozen soils // Polar Record. 1999. V. 35 (192). P. 59–66. Printed in the UK. <https://doi.org/10.1017/S0032247400026346>

MATHEMATICAL CRITERION FOR THE FORMATION OF CRYOPAGS DURING THE FREEZING OF ROCKS SATURATED WITH SALT SOLUTION

M. M. Ramazanov^{a,b}, N. S. Bulgakova^{a,c}, Academician of the RAS L. I. Lobkovsky^d

^aInstitute for Geothermal Research and Renewable Energy – Branch of Joint Institute for High Temperatures of the Russian Academy of Sciences, Makhachkala, Russia

^bSadovsky Institute of Geosphere Dynamics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

^cDagestan State Institute of National Economy, Makhachkala, Russia

^dShirshov Institute of Oceanology of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

Based on a mathematical model that takes into account the osmosis effect, a criterion for the formation of cryopegs in freezing rocks saturated with a salt solution is obtained. It is shown that this criterion significantly depends on the osmosis coefficient. The properties of the cryopeg are investigated depending on the parameters of the problem.

Keywords: freezing, saline rocks, cryopegs, osmosis, mathematical model, modeling

УДК 620.174.25

ИССЛЕДОВАНИЕ СКОРОСТИ ДЕГРАДАЦИИ ВОЛОКОННОГО СВЕТОВОДА В МЕДНОМ ПОКРЫТИИ

© 2024 г. М. И. Булатов^{1,2}, Н. С. Григорьев², А. В. Фофанов², А. Ф. Косолапов³, С. Л. Семенов^{3,*}

Представлено академиком РАН В.И. Коновым 16.11.2023 г.

Поступило 16.11.2023 г.

После доработки 16.11.2023 г.

Принято к публикации 27.11.2023 г.

Показано, что прочность волоконных световодов в медном покрытии в условиях высоких температур на воздухе снижается со временем в первую очередь из-за деградации медного покрытия за счет окисления, приводящей далее к появлению и росту точечных дефектов на поверхности кварцевого стекла. При этом световоды сохраняют работоспособность при 600°C в течение ~1.5 ч, а при 500°C – в течение ~16 ч. Величина энергии активации процесса находится в диапазоне 120–123 кДж/моль. Полученные результаты позволяют прогнозировать стабильность работы световодов на воздухе при 300°C в течение ~1.5 лет, а при 250°C – в течение ~17 лет.

Ключевые слова: волоконный световод, металлическое покрытие, прочность, энергия активации, срок службы

DOI: 10.31857/S2686740024020108, EDN: KGVVRUK

Одним из важнейших факторов, ограничивающих применение волоконных световодов в различных условиях эксплуатации, является стойкость защитного покрытия. Используемые в большинстве случаев стандартные акрилатные полимерные покрытия допускаются к использованию при температурах до 85°C, специальные акрилатные покрытия допускают эксплуатацию до 150°C, на основе силиконовой резины – до 200°C, полиимидные лаковые покрытия – до 350°C. Герметичные металлические защитные покрытия существенно расширяют области применения волоконных световодов. Они позволяют использовать волоконные

световоды при более высоких температурах, не разлагаются под действием ионизирующего излучения, не выделяют газов (важно в условиях высокого вакуума или высокочистых веществ), а также допускают пайку – очень важное свойство для герметизации разъемов и вводов в вакуум или другие тяжелые условия.

Нанесение металла (алюминия) из расплава на кварцевые волокна впервые было продемонстрировано в 1960-е гг. [1] при разработке композиционных материалов типа металл-стекло-волокно. В конце 1970-х гг. такой подход впервые был использован для нанесения алюминиевого покрытия на волоконные световоды [2].

В этой технологии световод, имеющий сравнительно низкую температуру, проходит через тонкий слой (обычно несколько миллиметров) расплавленного металла. Если температура расплава находится достаточно близко к температуре плавления, некоторый слой металла может “намерзнуть” на поверхности световода [3].

¹Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия

²Пермская научно-производственная приборостроительная компания, Пермь, Россия

³Институт общей физики им. А.М. Прохорова Российской академии наук, Научный центр волоконной оптики им. Е.М. Дианова Российской академии наук, Москва, Россия

*E-mail: sls@fo.gpi.ru

Преимуществом метода намораживания является достаточная толщина покрытия (10–30 мкм), сравнительно высокая скорость нанесения и относительная простота. Понятно, что чем выше температура плавления металла, тем интереснее он как материал покрытия. Однако следует отметить, что при нанесении на световоды металлов возникает проблема взаимодействия горячего металла с поверхностью стекла, что может существенно снизить прочность световода уже в процессе нанесения [4–6]. Этот эффект ограничивает выбор металлов для покрытия температурой плавления до 1100°C. Основным недостатком металлических покрытий являются повышенные оптические потери вследствие микроизгибов, возникающих при намораживании сравнительно толстой металлической оболочки [7–10]. Это делает невозможным использование световодов с металлическими покрытиями в протяженных линиях связи. Тем не менее в ряде важных специальных применений, где не нужна многокилометровая длина, световоды в металлических покрытиях не имеют альтернативы.

Из металлов алюминий является наиболее изученным материалом покрытия. Температура плавления алюминия составляет 660°C, однако даже ниже этой температуры могут протекать химические реакции кварцевого стекла с алюминием [4–6]. В результате поверхность кварцевого стекла повреждается, а прочность волокна снижается. Скорость деградации поверхности сильно зависит от температуры. Начальная прочность на изгиб, которая может достигать 10–12 ГПа, снижается в три раза после старения волокна при температуре 500°C в течение 10 ч. При 400°C такая же деградация прочности происходит через 5 мес [6]. Замечательным свойством алюминиевого покрытия является формирование на его поверхности при старении на воздухе тонкой герметичной оксидной пленки, которая препятствует дальнейшему окислению покрытия, позволяя долговременное использование световодов в алюминиевом покрытии в окислительной атмосфере при повышенных температурах. В то же время эта оксидная пленка препятствует процессу пайки, делая невозможными для световодов в алюминиевом покрытии важные применения, связанные с герметизацией вводов.

Золото, серебро и медь – металлы, которые не вступают в реакцию с кремнеземом при высоких температурах. Их температуры плавления составляют 1064, 962 и 1084°C соответственно. Но золото и серебро являются драгоценными металлами, поэтому эксперименты по нанесению таких покрытий и дальнейшее их применение оказываются крайне проблематичными. В такой ситуации медь оказывается наиболее подходящим материалом.

Нанесение медного покрытия методом намораживания позволяет получить световод с прочностью на разрыв 3.5 ГПа и однородной прочностью на изгиб 10 ГПа [8]. При исключении окисления покрытия в инертной или водородной атмосфере (медь быстро окисляется при температуре выше 300°C) было показано, что снижение прочности волокон с медным покрытием после старения при $T = 750^\circ\text{C}$ в течение 1 ч незначительно, тогда как значительный эффект наблюдается в течение 2–3 ч [8]. Рентгеновский анализ показал, что снижение прочности вызвано кристаллизацией поверхности кварцевого стекла и образованием кластеров меди внутри кремнезема вблизи его поверхности [8]. Последнее происходит за счет диффузии меди. Этот механизм деградации прочности волокна отличается от образования дефектов в волокнах с алюминиевым покрытием, где происходит химическая реакция кварцевого стекла с алюминием.

Во всех работах по изучению свойств световодов в медном покрытии эксперименты проводились только в инертной или восстановительной атмосфере и при этом делалось замечание, что в окислительной атмосфере (на воздухе) механическая стойкость будет существенно ниже из-за окисления меди. То есть медное покрытие будет уступать алюминиевому. Тем не менее, как уже было указано выше, есть ряд важных применений, связанных, в частности, с пайкой световодов, где медное покрытие нельзя заменить алюминиевым. Поэтому вопрос о стойкости световодов в медном покрытии при повышенной температуре на воздухе имеет серьезное практическое значение. Данная работа является первым систематическим исследованием этого вопроса.

МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДИКИ ЭКСПЕРИМЕНТА

В качестве объекта исследования использовался волоконный световод с медным покрытием. Диаметр световода – 125 мкм, толщина медного покрытия – 20 мкм, т.е. диаметр покрытого волокна был 165 мкм. Во время вытяжки световода перед нанесением медного покрытия на стеклянную поверхность методом CVD [11] наносился тонкий (~30 нм) технологический подслоя углерода. Такой подслоя понижает адгезию медного покрытия к кварцевому стеклу, препятствуя повреждению поверхности стекла при охлаждении за счет большой разницы коэффициентов теплового расширения стекла и металла, способствуя сохранению высокой прочности волокна. В экспериментах использовались образцы волоконного световода в свободной намотке с диаметром витка $d = 15.5$ см и длиной $L = 20$ м.

Испытание образцов световодов с медным покрытием происходило при повышенных температурах в воздушной атмосфере в температурной камере АГНИ ПКТ48-1280-13Ф3-Н2-S2 (диапазон температур от 20°C до 1200°C, допустимое отклонение температуры $\pm 5^\circ\text{C}$). Сначала производился нагрев камеры до температуры выдержки ($T = 500^\circ\text{C}$, 520°C , 540°C , 560°C , 580°C , 600°C) со скоростью нагрева $10^\circ\text{C}/\text{мин}$. В момент достижения нужной температуры производилась укладка образца световода в свободной намотке в разогретую температурную камеру. После истечения времени выдержки образец извлекался из температурной камеры. Прочность измерялась сразу после остывания.

Измерение изгибной прочности осуществлялось методом двухточечного изгиба (рис. 1) в соответствии с методикой, описанной в [12] на скорости сближения испытательных сжимающих пластин 630 мкм/с. Для измерения предельной прочности использовалась установка двухточечного изгиба Fiber Sigma 2 Point Bend. Момент разрушения образца определялся с помощью акустического датчика, позволявшего с большой точностью измерять расстояние между пластинами при разрушении. Метод двухточечного изгиба позволяет изучать собственную прочность именно стеклянного волоконного световода независимо от состояния защитного покрытия, так как в испытаниях

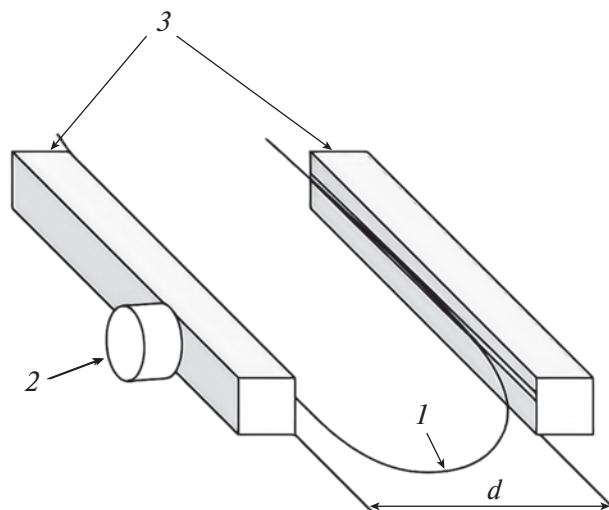


Рис. 1. Схема установки двухточечного изгиба, где 1 – образец световода; 2 – акустический датчик; 3 – сжимающие пластины.

не участвуют какие-либо зажимы (как в случае испытаний на растяжение). При этом в одном тесте нагрузке подвержена эквивалентная длина всего в несколько миллиметров, однако для понимания состояния световода этого оказывается достаточным. Для каждого режима отжига проводилось, как правило, 30 тестов на изгиб. Самое продолжительное время теста при каждой температуре ограничивалось, когда средняя прочность была ниже 1 ГПа и световод в некоторых местах уже рассыпался в руках, что делало невозможным достоверные измерения.

РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

Так как разброс прочности стеклянных волокон описывается распределением Вейбулла, результаты измерений приводятся в координатах Вейбулла. В этом случае результаты измерения прочности дефектов одной природы, как правило, приблизительно ложатся на одну прямую. Чем круче наклон прямой, тем более узким является распределение прочности. Типичные результаты измерений прочности образцов, полученных при различном времени выдержки при температуре 540°C , представлены на рис. 2. Видно, что на фоне изначально узкого исходного распределения, характерного для «бездефектных» световодов, после некоторого времени выдержки при высокой температуре среди результатов начинают появляться более слабые

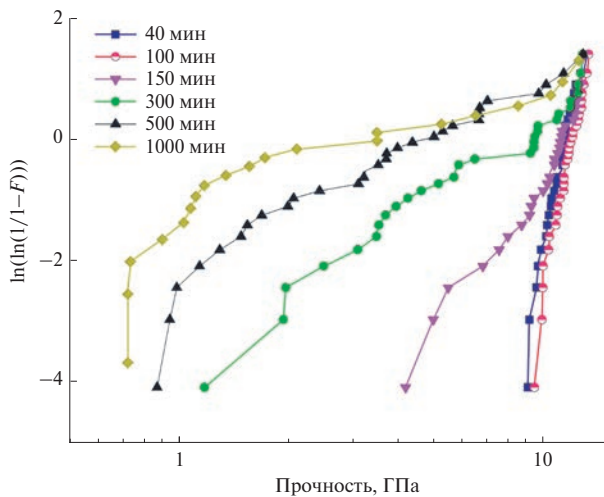


Рис. 2. Результаты измерений прочности образцов волоконного световода в медном покрытии после выдержки на воздухе при температуре 540°C в координатах Вейбулла. F – накопленная вероятность разрушения.

значения прочности, характеризующиеся широким распределением. То есть новые дефекты, связанные с воздействием температуры, появляются поначалу в виде сравнительно редких точек со сравнительно широким разбросом размеров таких дефектов. Это приводит к появлению на графике Вейбулла участка с более пологим наклоном, который смещается в сторону низкой прочности после более продолжительной термообработки. Для описания деградации волоконного световода нам было важно определять положение края распределения со стороны низкой прочности. Использовалась следующая методика: выбирались 6 минимальных значений прочности (из 30 тестов), из них исключались 2 наименьших значения, а для оставшихся вычислялось среднее значение. Такой подход позволяет снизить влияние на результат возможного разброса данных, который характерен для точек на краю распределения.

Полученные таким образом результаты измерений деградации прочности при выдержке при температурах от 500 до 600°C с шагом 20°C представлены на рис. 3. Эксперименты показали, что в течение некоторого «индукционного» времени (которое сокращается с ростом температуры) прочность не меняется, а затем начинает резко снижаться. Снижение прочности

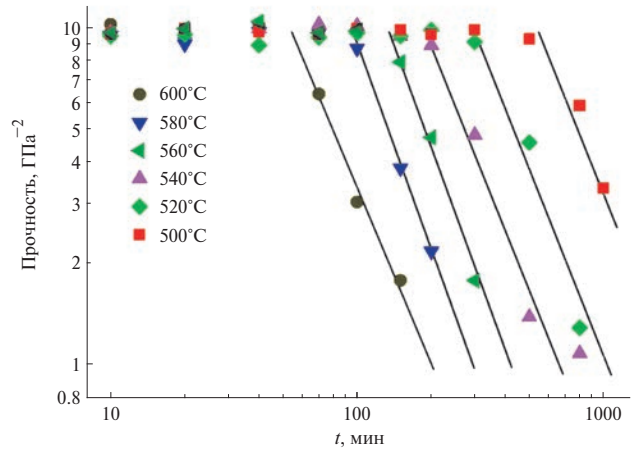


Рис. 3. Результаты измерений прочности образцов волоконного световода в медном покрытии после выдержки на воздухе при разных температурах.

означает появление и рост дефектов на стеклянной поверхности световода. Теория разрушения утверждает, что прочность хрупкого тела σ связана с размером дефекта (глубиной трещины) a следующим соотношением [13]:

$$\sigma \sim \frac{1}{\sqrt{a}}. \quad (1)$$

Таким образом, используя в качестве координаты σ^{-2} , мы получаем качественные зависимости роста относительного исходного размера дефектов на поверхности световода от времени термообработки. Рисунок 4 показывает, что в течение «индукционного» времени дефекты на поверхности световодов не изменяются, после чего начинают быстро расти. В логарифмических координатах данные приблизительно ложатся на прямые с величиной наклона ~ 4 , что означает зависимость роста размера дефектов от времени $a \sim t^4$.

Как было указано выше, при исключении окисления покрытия в инертной или водородной атмосфере снижение прочности волокон с медным покрытием после старения при $T = 750^\circ\text{C}$ в течение 1 ч незначительно, тогда как значительный эффект наблюдается в течение 2–3 ч. Причиной снижения прочности являлась кристаллизация поверхности кварцевого стекла [8]. В настоящей работе при прокаливании на воздухе основной причиной является окисление медного покрытия и формирование

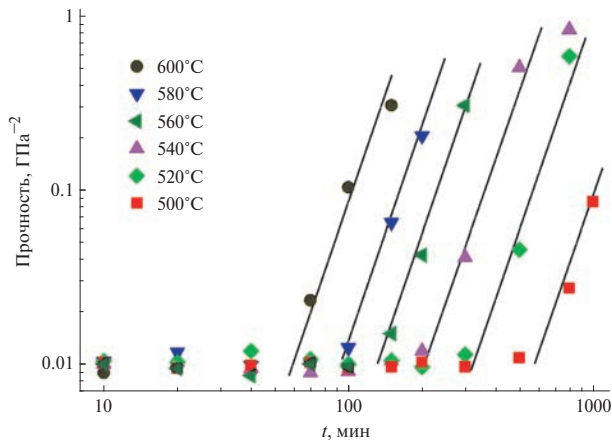


Рис. 4. Качественные зависимости роста относительных размеров дефектов на поверхности световода от времени термообработки.

оксидной пленки. Длительное воздействие окисляющей атмосферы (в данном случае – воздуха) приводит к образованию оксидного слоя сложной структуры: сверху – сформированный сетчатый пористый слой окислов меди, с размерами пор в сотни нанометров-микрон, под которым находится переходный слой, где происходит межкристаллическая коррозия [14]. При этом наблюдается появление и рост пор в еще не окислившимся слоях меди. Можно предположить, что наблюдаемое «индукционное» время (задержка до начала деградации прочности) соответствует времени прорастания пор сквозь медное покрытие до поверхности стекла. Вероятно, проникновение кислорода к поверхности стекла по порам приводит к ускоренной кристаллизации стекла в этих точках. В пользу этой гипотезы может говорить большой разброс данных по изгибной прочности, когда нагружаются совсем маленькие участки волокна, а также присутствие среди этих данных некоторого количества результатов с высокой прочностью. Зависимость скорости деградации от температуры можно описать уравнением Аррениуса:

$$t = t_0 e^{\frac{-E_a}{RT}}, \quad (2)$$

где t – время деградации до определенного состояния, t_0 – предэкспоненциальная константа, E_a – энергия активации процесса, R – универсальная газовая постоянная, T – температура (К).

Таблица 1. Зависимость энергии активации и предэкспоненциальной константы от времени

	Параметры для t_1	Параметры для t_2
E_0 , кДж/моль	120.7 ± 5.7	122.8 ± 3.7
$\ln t_0$ (t_0 , мин)	-12.55 ± 0.83	-12.23 ± 0.55
t_0 , мин	3.5×10^{-6}	4.9×10^{-6}

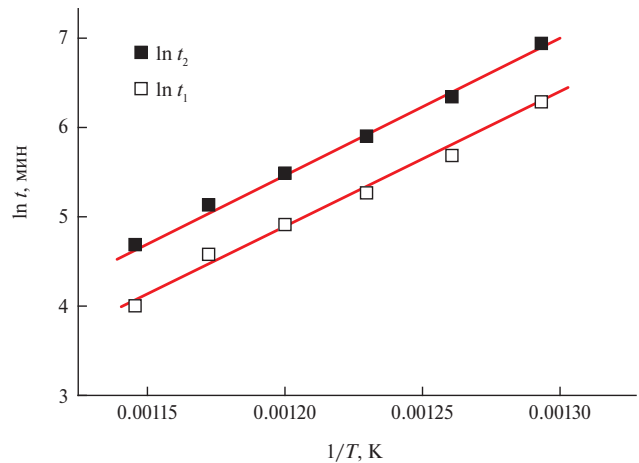


Рис. 5. Зависимости времени начала снижения прочности с уровня 10 ГПа (t_1) и времени снижения прочности до 3 ГПа (t_2).

Используя данные, представленные на рис. 3, мы определили при каждой температуре испытаний время, когда начиналось снижение прочности с уровня 10 ГПа (t_1), а также когда прочность снизилась до 3 ГПа (t_2) – при таком уровне прочности образцы еще оставались работоспособными. Полученные данные приведены на графике в координатах $\ln(t)$ от $1/T$ (рис. 5). На графике в таких координатах данные, удовлетворяющие уравнению Аррениуса, должны ложиться на прямую линию. На рис. 5 экспериментальные точки действительно хорошо ложатся на прямые. В результате линейной аппроксимации для t_1 и t_2 были получены параметры уравнения – величины энергии активации E_a и предэкспоненциальной константы t_0 (табл. 1).

Из приведенных в табл. 1 данных можно сделать вывод, что величины энергии активации для t_1 и t_2 совпадают с учетом погрешности и находятся в диапазоне 120–123 кДж/моль. Здесь следует отметить, что при испытаниях

Таблица 2. Результаты расчетов времени t_1 и t_2 от температуры с использованием данных табл. 1

$T, ^\circ\text{C}$	t_1	t_2
600	59 мин	109 мин
500	8.5 ч	16.3 ч
450	31.1 ч	61.3 ч
400	5.8 сут	11.7 сут
350	32.5 сут	67.9 сут
300	248 сут	538 сут
250	7.7 лет	17.3 лет
200	144.5 лет	344 года

на воздухе световодов в алюминиевом покрытии отчетливо наблюдается рост дефектов линейно со временем (наклон графиков в координатах σ^{-2} от $\ln(t)$ равен ~ 1) при величинах энергии активации в диапазоне 250–290 кДж/моль в зависимости от режима нанесения покрытия [6], что хорошо коррелирует с данными по скорости продвижения фронта реакции от границы раздела между алюминием с кварцевым стеклом [4].

Процесс снижения прочности световодов, покрытых медью, как было указано выше, имеет более сложный многоступенчатый механизм, требующий более детального изучения, тем не менее полученных данных достаточно для оценки срока эксплуатации световодов в медном покрытии при температурах ниже испытательных.

Из табл. 2 следует вывод, что возможна кратковременная эксплуатация волоконного световода в медном покрытии при температуре 600°C в течение ~ 1.5 ч или при 500°C в течение 16 ч. В долговременной перспективе эксплуатация световода с медным покрытием при повышенной температуре 300°C возможна в течение 1.5 лет, а при температуре 250°C – в течение 17 лет. Таким образом, как и ожидалось, световоды в медном покрытии при долговременной эксплуатации на воздухе заметно уступают по термостойкости световодам в алюминиевом покрытии. Тем не менее результаты подтверждают возможность долговременной эксплуатации световодов в медном покрытии при температурах ниже 250°C, что вполне достаточно для ряда применений, особенно требующих

пайки в местах герметичных вводов в зоны с высоким уровнем радиации или с высоким вакуумом. В таких случаях медное покрытие не имеет альтернативы.

Сравнение данных результатов с полученными ранее в инертной или восстановительной атмосферах [8] показывает, что крайне актуальной технологической задачей в настоящее время является создание на поверхности медного покрытия дополнительного защитного слоя, предотвращающего взаимодействие меди с кислородом воздуха. В таком случае возможно радикальное удлинение срока службы при повышенных температурах, а также существенное увеличение диапазона применимости световодов в медном покрытии вплоть до $\sim 1000^\circ\text{C}$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изучение прочности волоконных световодов в медном покрытии в условиях высоких температур на воздухе показало, что снижение прочности со временем обусловлено в первую очередь деградацией медного покрытия за счет окисления, приводящей далее к появлению и росту точечных дефектов на поверхности кварцевого стекла. При этом световоды сохраняют работоспособность при 600°C в течение ~ 1.5 ч, а при 500°C – в течение ~ 16 ч. Величина энергии активации процесса находится в диапазоне 120–123 кДж/моль. Полученные результаты позволяют прогнозировать стабильность работы световодов на воздухе при 300°C в течение ~ 1.5 лет, а при 250°C – в течение ~ 17 лет.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследования выполнены при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 22-29-00795).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Arridge R.G.C., Heywood D. The freeze-coating of filaments // Brit. J. Appl. Physics. 1967. V. 18. P. 447–457. <https://doi.org/10.1088/0508-3443/18/4/308>

2. Pinnow D.A., Robertson G.D., Wysocki J.A. Reductions in static fatigue of silica fibers by hermetic jacketing // *Appl. Phys. Lett.* 1979. V. 34. No. 1. P. 17–19. <https://doi.org/10.1063/1.90581>
3. Biriukov A.S., Bogatyrvov V.A., Lebedev V.F., et al. Theoretical Investigation of Metal Coating Deposition on Optical Fibers by Freezing Technique. The Model of the Process // *MRS Online Proceedings Library.* 1998. V. 531. P. 273–283. <https://doi.org/10.1557/PROC-531-273>
4. Standage A.E., Gani M.S. Reaction between vitreous silica and molten aluminum // *J. Amer. Ceram. Soc.* 1967. V. 50. P. 101–105. <https://doi.org/10.1111/j.1151-2916.1967.tb15049.x>
5. Inada K., Shiota T. Metal coated fibers // *Proc. SPIE.* 1985. V. 584. P. 99–106. <https://doi.org/10.1117/12.950973>
6. Semjonov S.L., Bubnov M.M., Dianov E.M., Shchepunyaev A.G. Reliability of aluminum coated fibers at high temperature // *Proc. SPIE.* 1993. V. 2074. P. 25–33. <https://doi.org/10.1117/12.168642>
7. Voloshin V.V., Vorob'ev I.L., Ivanov G.A., et al. Effect of metal coating on the optical losses in heated optical fibers // *Tech. Phys. Lett.* 2009. V. 35. P. 365–367. <https://doi.org/10.1134/S1063785009040233>
8. Biriukov A.S., Bogatyrvov V.A., Lebedev V.F., et al. Strength and Reliability of Metal-Coated Optical Fibers at High Temperatures // *MRS Online Proceedings Library.* 1998. V. 531. P. 297–300. [10.1557/PROC-531-297](https://doi.org/10.1557/PROC-531-297)
9. Popov S.M., Voloshin V.V., Vorobyov I.L., Ivanov G.A., Kolosovskii A.O., Isaev V.A., Chamorovskii Y.K. Optical loss of metal coated optical fibers at temperatures up to 800°C // *Optical Memory and Neural Networks (Information Optics).* 2012. V. 21. P. 45–51. <https://doi.org/10.3103/S1060992X12010080>
10. Bulatov M.I., Grigoriev N.S., Kosolapov A.F., et al. Optical Loss in Copper-Coated Multimode Optical Fibers of Different Diameters // *Phys. Wave Phen.* 2022. V. 30. P. 397–400. <https://doi.org/10.3103/S1541308X22060036>
11. Huff R.G., DiMarcello F.V. Hermetically Coated Optical Fibers for Adverse Environments // *Proc. SPIE.* 1988. V. 0867. P. 40–45. <https://doi.org/10.1117/12.965061>
12. Matthewson M.J., Kurkjian C.R., Gulati S.T. Strength measurement of optical fibers by bending // *J. Amer. Ceram. Soc.* 1986. V. 69. No. 11. P. 815–821. <https://doi.org/10.1111/j.1151-2916.1986.tb07366.x>
13. Irwin G.R. Fracture / In: *Encyclopedia of Physics* / Ed. by Flugge. V. VI. B.: Springer, 1958. P. 551–590.
14. Wan Y., Wang X., Sun H., Zhang K. Corrosion behavior of copper at elevated temperature // *Int. J. Electrochem. Sci.* 2012. V. 7. P. 7902–7914. [https://doi.org/10.1016/S1452-3981\(23\)17963-6](https://doi.org/10.1016/S1452-3981(23)17963-6)

STUDY OF DEGRADATION OF OPTICAL FIBER IN COPPER COATING

M. I. Bulatov^{a,b}, N. S. Grigoryev^b, A. V. Fofanov^b, A. F. Kosolapov^c, S. L. Semjonov^c

^aPerm National Research Polytechnic University, Perm, Russia

^bPerm Scientific-Industrial Instrument-Making Company, Perm, Russia

^cProkhorov General Physics Institute of the Russian Academy of Sciences,
Dianov Fiber Optics Research Center, Moscow, Russia

Presented by Academician of the RAS V.I. Konov

It has been shown that the strength of copper-coated optical fiber in air at elevated temperatures decreases over time, primarily due to degradation of the copper coating due to oxidation, which leads to the appearance and growth of point defects on the surface of silica glass. In this case, the optical fibers remain operational at 600°C for ~1.5 hours, and at 500°C for ~16 hours. The activation energy of the process is in the range of 120–123 kJ/mol. The results obtained make it possible to predict the stability of the optical fibers in air at 300°C for ~1.5 years, and at 250°C for ~17 years.

Keywords: optical fiber, metal coating, strength, activation energy, service life

УДК 669 + 539.374 + 539.424

**ФАЗОВЫЕ ПРЕВРАЩЕНИЯ ПРИ ОТПУСКЕ
НИЗКОЛЕГИРОВАННОЙ СТАЛИ С 1.6%Si**© 2024 г. В. А. Дудко^{1,2,*}, Д. Ю. Юзбекова^{1,2}, академик РАН М. Н. Ерохин¹,
С. М. Гайдар¹, Р. О. Кайбышев¹

Поступило 21.12.2023 г.

После доработки 21.12.2023 г.

Принято к публикации 12.02.2024 г.

Низкотемпературный отпуск стали типа 54ХГС2ФБ обеспечивает сочетание высокого предела текучести $\sigma_{0,2}=1890$ МПа с относительным удлинением после разрыва $\delta=6\%$ и ударной вязкостью $KCV=11$ Дж/см² за счет выделения нестехиометрического η -карбида Fe_2C . Кремний подавляет выделение цементита с неравновесным содержанием легирующих элементов как из мартенсита, так и при распаде остаточного аустенита. Цементит с равновесным содержанием легирующих элементов выделяется при 500°C отпуске, что обеспечивает сочетание $\sigma_{0,2}=1360$ МПа с $\delta=9\%$ и $KCV=18$ Дж/см².

Ключевые слова: сталь, механические свойства, микроструктура, остаточный аустенит

DOI: 10.31857/S2686740024020116, **EDN:** KGMDSX

Низколегированные высокопрочные стали с промежуточными карбидами с пределом текучести $\sigma_{0,2} \geq 1400$ МПа применяются для изготовления деталей самолетов и ракет [1]. Наиболее широкое применение нашли стали AISI4340 с 0.3 вес. %Si и 300М с 1.6 вес. %Si и одинаковым содержанием других легирующих элементов [1, 2]. Термическая обработка этих сталей представляет собой закалку и низкотемпературный отпуск, который приводит к образованию структуры отпущенного мартенсита с промежуточными η -карбидами Fe_2C и остаточного аустенита в форме пленок по границам реек [1–3]. Обеспечение достаточной пластичности и ударной вязкости в этих сталях достигается сочетанием вакуумно-дугового переплава и прецизионной термической обработки [1, 2]. Применение этих сталей для изготовления автомобильных деталей, деталей сельскохозяйственной и железнодорожной техники требует упрощения технологий получения и обработки

этих сталей, а также снижения стоимости используемых легирующих элементов. Для решения этой задачи необходимо понимать фазовые превращения, протекающие при отпуске низколегированных высокопрочных сталей и причины их влияния на механические свойства.

В настоящее время достаточно детально изучены фазовые превращения в высокопрочных сталях с низким содержанием Si, которые идут в несколько стадий [4, 5]. Стадия I связана с выделением промежуточных η -карбидов в интервале температур 200–320°C [4, 5]. На стадии II происходит распад остаточного аустенита, причем эта стадия идет одновременно со стадиями I и III [4, 5]. На стадии III происходит выделение цементита по границам структурных элементов мартенсита в температурном интервале 250–400°C [4, 5]. Содержание элементов замещения во всех карбидах, выделяющихся на стадиях I–III, и в мартенситной матрице одинаково. Такие карбиды называются пара-равновесными [4, 6]. На стадии IV идет сфероидизация и рост цементита при температурах >420°C, причем он обогащается Mn и Cr, а содержание в нем Si падает до 0%. Такой цементит называется орто-равновесным [4, 6].

¹Российский государственный аграрный университет – МСХА имени К.А. Тимирязева, Москва, Россия

²Белгородский государственный национальный исследовательский университет, Белгород, Россия
*E-mail: dudko@bsu.edu.ru

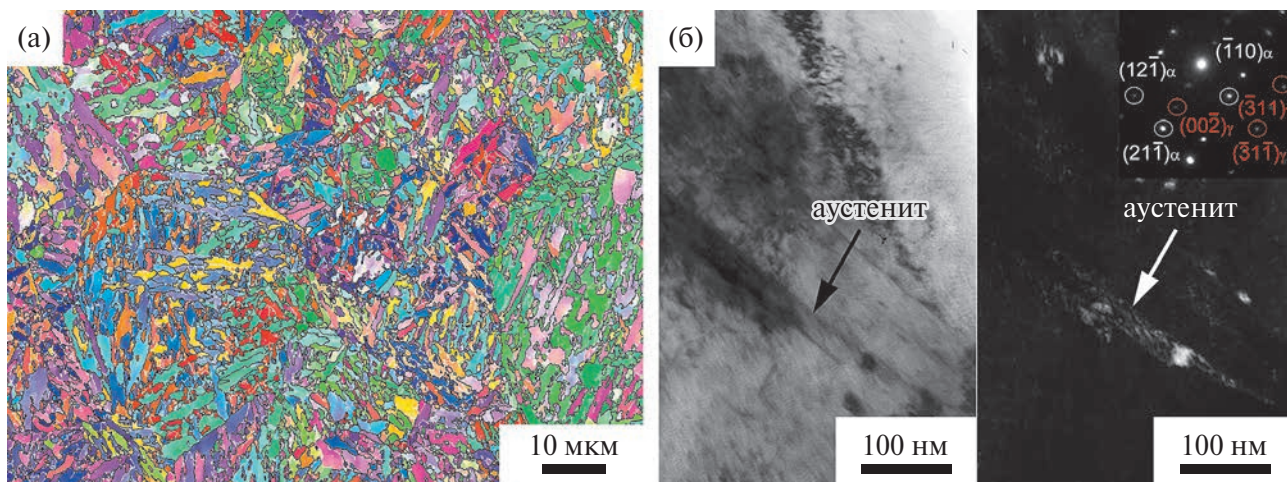


Рис. 1. Структура после закалки: карта разориентировок (а), остаточный аустенит по границам рек (б).

Введение ≥ 1.5 вес.%Si в низколегированные стали подавляет образование пара-цементита в интервале температур отпуска $250\text{--}400^\circ\text{C}$, что устраняет либо существенно уменьшает снижение пластичности и ударной вязкости в результате развития необратимой отпускной хрупкости [5–7]. Соответственно, стадия IV отпуска сразу следует за стадией I, причем перекрытие стадий I и II не вызывает охрупчивания, поскольку при распаде остаточного аустенита выделяются промежуточные карбиды. Подавление стадии III за счет легирования кремнием позволяет поднять температуру низкотемпературного отпуска без риска развития необратимой отпускной хрупкости. Это открывает возможности для производства высокопрочных сталей с промежуточными карбидами без применения дорогостоящих металлургических технологий.

Целью настоящего исследования является рассмотрение фазовых превращений при отпуске и их влияния на механические свойства в стали типа 54ХГС2ФБ.

Была исследована сталь Fe–0.53C–1.6Si–0.9Mn–0.76Cr–0.014V–0.05Nb–0.015Al–0.011N–0.008S–0.006P (в вес.%), выплавленная в открытой индукционной печи с последующим электрошлаковым переплавом. После 4 ч отжига при 1150°C сталь была прокована с последующей нормализацией. Термическая обработка включала в себя аустенитизацию при температуре 900°C в течение 40 мин с последующей закалкой в воду и 1 ч отпуск при температурах 200, 280, 400, 500°C .

Испытания на растяжение проводились на образцах с длиной рабочей части 35 мм и поперечным сечением 7×3 мм на испытательной машине “Instron 5882”, а испытания на ударную вязкость были выполнены на стандартных образцах типа 11 по ГОСТ 9454-78 размером $55\times 10\times 10$ мм и 2-мм концентратором вида V на копре “Instron SI-1M” при комнатной температуре. Микроструктурные исследования проводили с помощью растрового электронного микроскопа FEI Quanta 600 FEG, оснащенного анализатором картины дифракции обратно рассеянных электронов (EBSD). Плотность дислокаций была определена из EBSD данных по методике, описанной в работах [6–8]. Объемную долю остаточного аустенита определяли с помощью рентгеноструктурного анализа на дифрактометре Rigaku Ultima IV по методике, описанной в работе [9]. Идентификацию карбидов проводили на фольгах с использованием просвечивающего электронного микроскопа JEM-2100, оборудованного приставкой INCA для энергодисперсионного анализа по методике, описанной в работах [6–9]. Программа Thermo-Calc с базой данных TCFE7 была использована для расчетов равновесных концентраций углерода в феррите и удельного объема карбидов при различных температурах отпуска, а также для равновесного химического состава цементита.

Закалка приводит к формированию структуры пакетного мартенсита (рис. 1а) с размером исходных аустенитных зерен (ИАЗ) 14 мкм за счет присутствия карбонитридов $M(C,N)$,

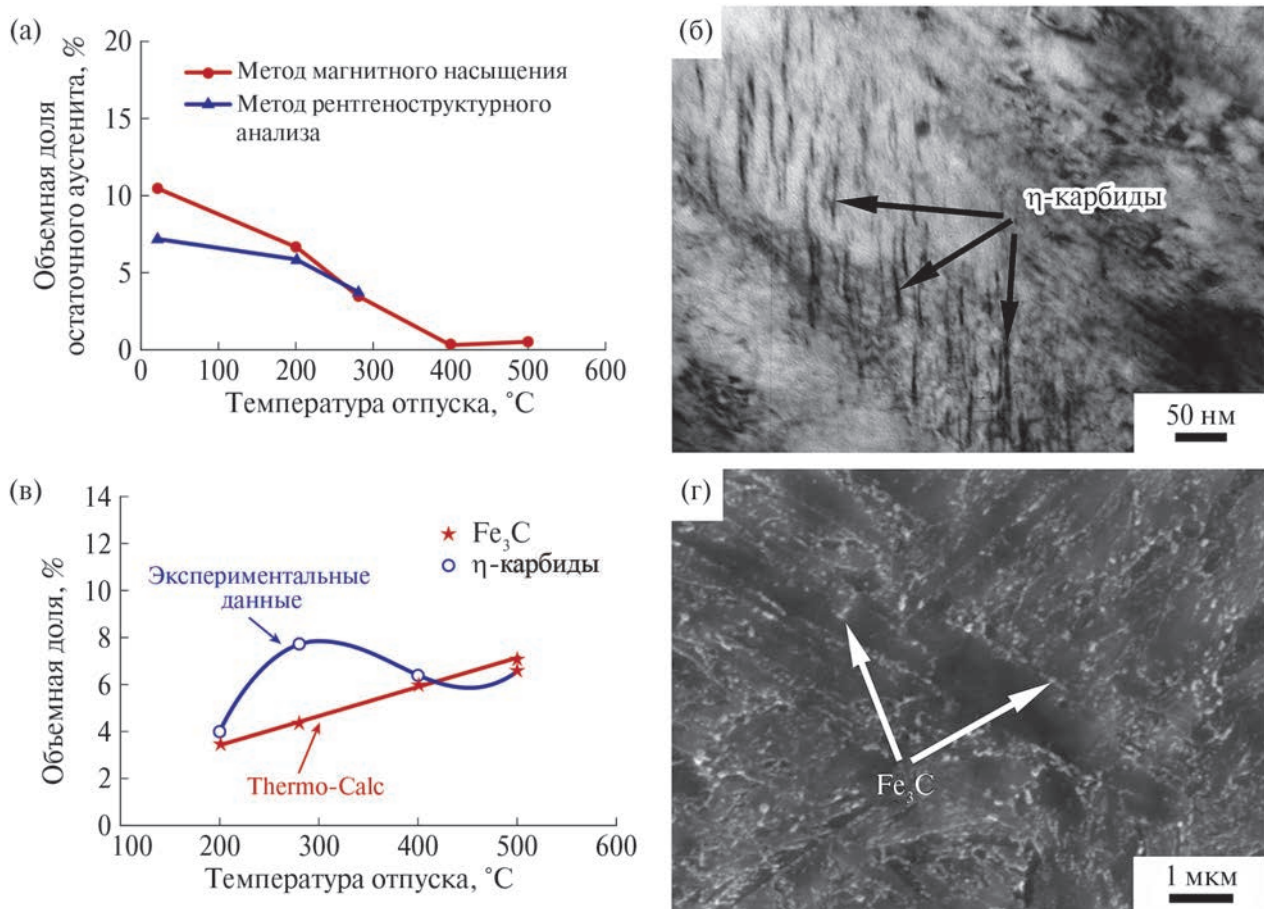


Рис. 2. Влияние отпуска на фазовый состав: зависимость удельного объема остаточного аустенита от температуры отпуска (а), промежуточный η -карбид Fe_2C после низкотемпературного отпуска (б), зависимость удельного объема карбидов от температуры отпуска – при $T \leq 400^\circ C$ промежуточные карбиды, при $500^\circ C$ цементит (в), цементит после $500^\circ C$ отпуска (г).

толщиной реек 190 нм, плотностью дислокаций 10^{15} м^{-2} . Большинство ИАЗ содержит более 4 пакетов, различающихся плоскостями $\{111\}_\gamma$, а большинство пакетов состоит из блоков, принадлежащих к шести различным ориентационным соотношениям Курдюмова–Закса $[\bar{1}\bar{1}1]_{\alpha'} \parallel [101]_\gamma$ (011) $_{\alpha'} \parallel (111)_\gamma$ [8–10]. Соответственно, мартенситное превращение привело к формированию структуры пакетного мартенсита с минимально возможными упругими деформациями [10]. Остаточный аустенит располагается в основном по границам реек в форме пленок толщиной 25 нм (рис. 16). Отпуск не приводит к заметным изменениям параметров структуры пакетного мартенсита, но сильно влияет на фазовый состав.

Распад остаточного аустенита начинается при температуре $< 200^\circ C$ и после отпуска при $400^\circ C$ он практически отсутствует (рис. 2а). Переходные η -карбиды Fe_2C в виде пластин длиной 53 нм и толщиной 5 нм выделяются при $200^\circ C$ (рис. 2б) и их удельный объем достигает 8% максимума при $280^\circ C$ (рис. 2в). Известно [11], что стехиометрическое содержание углерода в η -карбиде составляет 33 ат.% и для такого удельного объема карбидов необходимо большее количество углерода, чем его имеется в стали. Следовательно, выделение экспериментально наблюдаемого удельного объема η -карбидов возможно только за счет отклонения их химического состава от стехиометрии [4]. Нестехиометрические η -карбиды могут образовываться при содержании углерода от 13 ат.% и вполне

Таблица 1. Стадийность отпуска в стали типа 54ХГС2ФБ

Температурный интервал отпуска, °С	Стадия отпуска	Фазовые превращения	Комментарии
200–400	I	Выделения промежуточных η-карбидов в матрице	В интервале 200–300°С выделяются нестехиометрические карбиды, а при более высокой температуре происходит их трансформация в стехиометрические карбиды
>200–400	II	Распад остаточного аустенита по механизму бейнитного превращения с выделением промежуточных карбидов	Размер промежуточных карбидов, выделяющихся по границам бейнитного феррита больше размера карбидов, выделяющихся в ферритной матрице
>400	IV	Выделение и рост орто-цементита	Цементит формирует цепочки по границам

устойчивы при содержании углерода от 13 ат. % [4]. Длина пластин переходного карбида после отпуска при 280°С увеличивается до 70 нм, а толщина до 7 нм. После отпуска при 400°С эти размеры увеличиваются до 100 нм и 10 нм соответственно, а удельный объем переходного карбида уменьшается до 6% (рис. 2в). Такое количество переходных карбидов соответствует содержанию в них углерода в количестве 25 ат. % при термодинамически равновесном содержании углерода в феррите. Очевидно, что распад мартенсита полностью завершается при $T \geq 280^\circ\text{C}$. Никаких признаков выделения цементита при температурах $T \leq 400^\circ\text{C}$ выявлено не было, а содержание таких элементов, как Cr, Mn, Si, в промежуточных карбидах и матрице одинаково. То есть промежуточный η-карбид является пара-равновесным.

Цементит выделяется после 500°С отпуска в виде частиц круглой формы по границам реек и блоков (рис. 2г). Его химический состав соответствует термодинамически равновесному. Это орто-цементит. Таким образом, 1.6 вес. %Si подавило выделение пара-цементита и, соответственно, стадию III при отпуске (табл. 1). Пара-цементит с высоким содержанием Si имеет очень большую энергию [12], и его выделение при $\text{Si} \geq 1.5$ вес. % становится невыгодным с точки зрения энергии Гиббса. Кроме того, распад остаточного аустенита на стадии II приводит к образованию промежуточных карбидов, а не пара-цементита [4, 13]. Фазовые превращения на стадиях I и II приводят к образованию структуры феррит-η-карбид (табл. 1). Частицы промежуточного карбида внутри ферритной

матрицы полностью растворяются на стадии IV после выделения орто-цементита по границам структурных элементов пакетного мартенсита. То есть уникальной особенностью низколегированных сталей с содержанием $\text{Si} \geq 1.5$ вес. % является четкое разделение низкотемпературного отпуска, при котором выделяются только промежуточные карбиды, от среднетемпературного, при котором происходит выделение и рост цементита (табл. 1) [6]. Стадийность выделения карбидов при распаде мартенсита может быть записана следующим образом:

Нестехиометрический η-карбид → стехиометрический η-карбид → Fe_3C с термодинамически равновесным химическим составом.

Уникальная стадийность фазовых превращений привела к необычной зависимости предела текучести ($\sigma_{0.2}$), временного сопротивления разрушению (σ_B), относительного удлинения после разрыва (δ) и ударной вязкости (KCV) от температуры отпуска (табл. 2).

Закаленная сталь настолько хрупка, что разрушение при растяжении происходит сразу после начала пластического течения. Это не позволило с приемлемой точностью измерить характеристики прочности. Отпуск при 280°С обеспечивает одновременное повышение прочности и пластичности при сохранении ударной вязкости по сравнению с отпуском при 200°С. То есть высокий удельный объем частиц нестехиометрического η-карбида, располагающихся в ферритной матрице, обеспечивает высокую прочность, а уход углерода из мартенсита — достаточную пластичность.

Таблица 2. Механические свойства стали 54ХГС2ФБ после различных режимов обработки

Температура отпуска, °С	Твердость, HRC	$\sigma_{0.2}$, МПа	σ_B , МПа	δ , %	KCV, Дж/см ²
20	61	—	—	0.5	5
200	59	1630	2270	4.2	11
280	56	1890	2190	6.2	11
400	51	1690	1880	7.6	11
500	46	1360	1460	9.3	18

Уменьшение удельного объема промежуточных карбидов после отпуска при 400°С уменьшает прочность и увеличивает пластичность. 1.6 вес.%Si полностью подавило необратимую отпускную хрупкость за счет предотвращения выделения пара-цементита в форме пластин по границам [4–8, 11]. Кроме того, распад остаточного аустенита сопровождается увеличением пластичности и не влияет на KCV, что противоречит классическим представлениям о роли этой фазы в обеспечении пластичности и ударной вязкости высокопрочных сталей с промежуточными карбидами [1]. Отпуск при 500°С обеспечивает повышение пластичности и ударной вязкости за счет понижения прочностных характеристик, что обеспечивается выделением частиц цементита округлой формы по границам. Следует отметить, что прочность и твердость данной стали оказались на 15–18% выше, чем основных пружинных сталей после аналогичной термической обработки при одинаковых величинах пластичности [14].

Таким образом, сталь типа 54ХГС2ФБ демонстрирует чрезвычайно высокую прочность после низкотемпературного отпуска, приводящего к образованию структуры феррит – нестехиометрический η -карбид с небольшим количеством остаточного аустенита при удовлетворительных величинах пластичности и ударной вязкости, а среднетемпературный отпуск обеспечивает уникальное для пружинных сталей сочетание прочности и пластичности за счет структуры троостита отпуска с зернограницными частицами цементита.

БЛАГОДАРНОСТИ

Исследования выполнены на оборудовании Центра коллективного пользования “Технологии и Материалы НИУ “БелГУ”.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, соглашение № 075-15-2021-572 от 31 мая 2021 г.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Malakondaiah G., Srinithas M., Rama Rao P.* Ultrahigh-strength low alloy steels with enhanced fracture toughness // *Progr. Mater. Sci.* 1997. V. 42 P. 209–242.
2. *Li Jihang, Zhan Dongping, Jiang Zhouhua, Zhang Huishu, Yang Yongkun, Zhang Yangpeng.* Progress on improving strength-toughness of ultra-high strength martensitic steels for aerospace applications: a review // *J. Mater. Res. Techn.* 2023. V. 23. P. 172–190.
3. *Euser V.K., Williamson D.L., Findley K.O., Clarke A.J., Speer J.G.* The Role of Retained Austenite in Tempered Martensite Embrittlement of 4340 and 300-M Steels Investigated through Rapid Tempering // *Metals*. 2021. V. 11. P. 1349.
4. *Clarke A.J. et al.* Perspectives on quenching and tempering 4340 steel // *Metall. Mater. Trans. A*. 2020. V. 51. P. 4984–5005.
5. *Bhadeshia H.K.D.H., Honeycombe R.* Steels: microstructure and properties. 4th ed.. Butterworth-Heinemann, Oxford, UK. 2017. P. 237–270.
6. *Borisov S. et al.* Tempering behavior of a Si-rich low-alloy medium carbon steel // *Metals*. 2023. V. 13. P. 1403.
7. *Борисова Ю.И. и др.* Структура, фазовый состав и механические свойства высокопрочной стали с промежуточным карбидом h-Fe₂C // *ФММ*. 2023. Т. 124. № 12. С. 1–15.
8. *Mishnev R. et al.* Quench and Tempered Embrittlement of Ultra-High Strength Steels with Transition Carbides // *Metals*. 2023. V. 13. P. 1399.
9. *Tkachev E. et al.* Effect of quenching and tempering on structure and mechanical properties of a low-alloy 0.25 C steel // *Mater. Sci. Eng. A*. 2023. V. 868. P. 144757.
10. *Galindo-Nava E.I., Rivera-Díaz-del-Castillo P.E.J.* A model for the microstructure behaviour and strength evolution in lath martensite // *Acta Mater.* 2015. V. 98. P. 81–93.

11. *Bhadeshia H.K.D.H.* Theory of Transformation in Steels. Boca Raton (FL, USA): CRC Press. Taylor & Francis group, 2021.
12. *Bhadeshia H.K.D.H.* Cementite // Inter. Mater. Rev. 2020. V. 65. P. 1–27.
13. *Bhadeshia H.K.D.H.* Physical Metallurgy of Steels in Physical Metallurgy / Ed. by D.E. Laughlin, K. Hono. Amsterdam, Netherlands: Elsevier, 2014. P. 2157–2214.
14. *Yamada Y., Kuwabara T.* Materials for Springs. Berlin, Heidelberg: Springer Verlag, 2007.

EFFECT OF TEMPERING ON PHASE TRANSFORMATIONS IN LOW-ALLOY STEEL WITH 1.6%Si

**V. A. Dudko^{a,b}, D. Y. Yuzbekova^{a,b}, Academician of the RAS M. N. Erokhin^a,
S. M. Gaidar^a, R. O. Kaibyshev^a**

^a*Russian State Agrarian University – Moscow Timiryazev Agricultural Academy, Moscow, Russia*

^b*Belgorod State University, Belgorod, Russia*

Low temperature tempering of a 0.53%C–1.6%Si–0.9%Mn–0.76%Cr–0.14%V–0.05%Nb steel provides combination of high yield stress $\sigma_{0.2}=1890$ MPa with elongation-to-failure $\delta=6\%$ and Charpy V-notch (CVN) impact energy of 11 J/cm² due to precipitation of non-stoichiometric η -carbide Fe₂C. Silicon suppresses precipitation of para-equilibrium cementite both from martensite and retained austenite. Orthoequilibrium cementite precipitate upon tempering at 500°C providing combination of $\sigma_{0.2}=1360$ MPa with $\delta=9\%$ and CVN impact energy of 18 J/cm².

Keywords: steel, mechanical properties, microstructure, phase transformation

УДК 542.34

ГОЛОГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД ЛОКАЛИЗАЦИИ ШУМОВОГО ПОДВОДНОГО ИСТОЧНИКА В МЕЛКОВОДНОЙ АКВАТОРИИ

© 2024 г. В. М. Кузькин^{1,*}, Ю. В. Матвиенко^{2,**},
С. А. Пересёлков^{3,***}, Ю. А. Хворостов^{2,****}

Представлено академиком РАН Г.И. Долгих 09.10.2023 г.

Поступило 23.10.2023 г.

После доработки 10.01.2024 г.

Принято к публикации 12.02.2024 г.

Изложена голографическая обработка шумовых сигналов с использованием векторно-скалярных приемников. Представлены результаты эксперимента по обнаружению и оценке пеленга подводного шумового источника, который проводился в акватории Черноморского побережья. Прием шумоизлучения источника осуществлялся векторно-скалярными приемниками. Голографическая обработка позволила обнаруживать, пеленговать и разрешать подводный источник при малом входном отношении сигнал/помеха на фоне интенсивного надводного судоходства.

Ключевые слова: векторно-скалярный приемник, шумовой источник, обнаружение, локализация, голографическая обработка, отношение сигнал/помеха

DOI: 10.31857/S2686740024020128, EDN: KGHVBW

В океанических волноводах интерференция мод шумового сигнала формирует устойчивую интерференционную картину (интерферограмму) максимумов спектральной плотности энергетических параметров волнового поля в переменных частота-расстояние [1]. Для решения задачи обнаружения и локализации шумового источника впервые предложен голографический подход, основанный на записи двумерной частотно-временной интерферограммы с применением двумерного преобразования Фурье [2]. Интерферограмма регистрируется векторно-скалярным приемником (ВСП) [3].

¹Институт общей физики им. А.М. Прохорова
Российской академии наук, Москва, Россия

²Институт проблем морских технологий
Дальневосточного отделения Российской академии наук, Владивосток, Россия

³Воронежский государственный университет,
Воронеж, Россия

*E-mail: kumiov@yandex.ru

**E-mail: ymat33@yandex.ru

***E-mail: pereselkov@yandex.ru

****E-mail: oss.dvfu@mail.ru

Голографическая обработка шумового сигнала $s(t)$ на фоне помехи $n(t)$ с применением ВСП строится следующим образом. За время наблюдения Δt в частотной полосе Δf накапливаются J независимых временных реализаций $s_1(t) = p(t) + n(t)$ и $s_{2,3}(t) = v_{x,y}(t) + n(t)$ длительностью t_1 и с временным интервалом t_2 между ними

$$J = \Delta t / (t_1 + t_2). \quad (1)$$

Здесь $p(t)$ – звуковое давление, $v_{x,y}(t)$ – горизонтальные компоненты вектора колебательной скорости частиц жидкости. Преобразованием Фурье восстанавливаются частотно-временные шумовые реализации $s_{1,2,3}(f, t)$ и формируются интерферограммы звукового давления $I(f, t)$ и составляющих потока мощности $W_x(f, t)$, $W_y(f, t)$:

$$I(f, t) = s_1(f, t)s_1^*(f, t), W_x(f, t) = s_2(f, t)s_1^*(f, t), W_y(f, t) = s_3(f, t)s_1^*(f, t), \quad (2)$$

где верхний индекс * обозначает комплексно-сопряженную величину. Так как сигнал и помеха некоррелированы, то интерферограммы (2) приближенно можно рассматривать как

линейную комбинацию интерферограмм шумового поля сигнала и помехи

$$\begin{aligned} I(f, t) &\approx P(f, t) + N(f, t), \\ W_x(f, t) &\approx X(f, t) + N(f, t), \\ W_y(f, t) &\approx Y(f, t) + N(f, t). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $P(f, t) = |p(f, t)|^2$, $X(f, t) = v_x(f, t) p^*(f, t)$, $Y(f, t) = v_y(f, t) p^*(f, t)$ – интерферограммы шумового сигнала; $N(f, t) = |n(f, t)|^2$ – интерферограмма помехи.

Применением к интерферограммам (2) двумерного преобразования Фурье вычисляются голограммы $F_I(\tau, \nu)$, $F_{W_x}(\tau, \nu)$, $F_{W_y}(\tau, \nu)$. Спектральные плотности голограмм, согласно (3), равны сумме спектральных плотностей голограмм сигнала и помехи. Например, по отношению к интерферограмме $W_x(f, t)$ голограмма имеет вид

$$\begin{aligned} F_{W_x}(\tau, \nu) &\approx \int_0^{\Delta t} \int_{f_1}^{f_2} [X(f, t) + N(f, t)] \times \\ &\times \exp[i2\pi(\nu t - f\tau)] df dt = F_X(\tau, \nu) + F_N(\tau, \nu), \end{aligned} \quad (4)$$

где ν и τ – частота и время голограммы; $f_{1,2} = f_0 \mp (\Delta f/2)$, f_0 – средняя частота спектра. Спектральные плотности голограмм шумоизлучения источника сосредоточены в узкой полосе, ограниченной прямыми

$$\nu = \varepsilon\tau + \delta\nu, \quad \nu = \varepsilon\tau - \delta\nu. \quad (5)$$

Здесь $\delta = 1/\Delta t$, ε – угловой коэффициент прямой, на которой расположены координаты пиков фокальных пятен, обусловленных интерференцией мод. Вне этой полосы спектральная плотность сигнала практически подавлена. Фокальные пятна лежат в первом и третьем квадрантах голограммы, если источник приближается к приемнику, и во втором и четвертом квадрантах, когда он удаляется от приемника. Если источник неподвижен, то фокальные пятна расположены на оси времени τ . Спектральная плотность помехи распределена по всей области голограммы. Рассмотрим обнаружение и определение пеленга шумового источника.

В качестве критерия обнаружения источника принимается условие, согласно которому максимум функции углового распределения

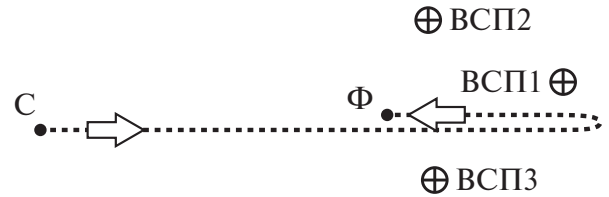


Рис. 1. Схема движения АНПА (пунктир), Φ – точка финиша.

спектральной плотности голограммы (функции обнаружения)

$$G_I(\chi, q_0) = \int_0^{\Delta\tau} |F_I(\tau, \chi\tau, q_0)| d\tau \quad (6)$$

в направлении $\chi = \varepsilon$ расположения пиков фокальных пятен сигнала в два и более число раз превышает помеховый уровень в направлениях $\chi \neq \varepsilon$ при входном отношении сигнал/помеха q_0

$$G_I[\varepsilon, q_0] \geq 2G_I(\chi, q_0). \quad (7)$$

Здесь $\Delta\tau$ – линейный размер области концентрации по оси времени τ ; χ – варьируемое значение углового коэффициента при интегрировании вдоль прямых $\nu = \chi\tau$. За оценку ε принимается положение максимального пика, $\max G_I(\chi) = G_I(\varepsilon)$.

Направление на источник, пеленг ϕ , оценивается через отношение максимумов функций обнаружения для горизонтальных составляющих потоков мощности

$$\text{tg}(q_0) = \frac{G_{W_y}(\varepsilon, q_0)}{G_{W_x}(\varepsilon, q_0)}. \quad (8)$$

Восстановление пеленга неоднозначно: значения ϕ , $\phi + \pi$, согласно (8), равнозначны. Области голограмм $F_{W_x}(\tau, \nu)$, $F_{W_y}(\tau, \nu)$, $F_I(\tau, \nu)$ за пределами зоны концентрации спектральной плотности сигнала очищаются от помехи и выполняются обратные двумерные преобразования Фурье по восстановлению двумерных интерферограмм $\hat{W}_x(f, t)$, $\hat{W}_y(f, t)$, $\hat{I}(f, t)$. Неоднозначность пеленга устраняется при рассмотрении в момент времени t_* на частоте f_* отношений восстановленных интерферограмм

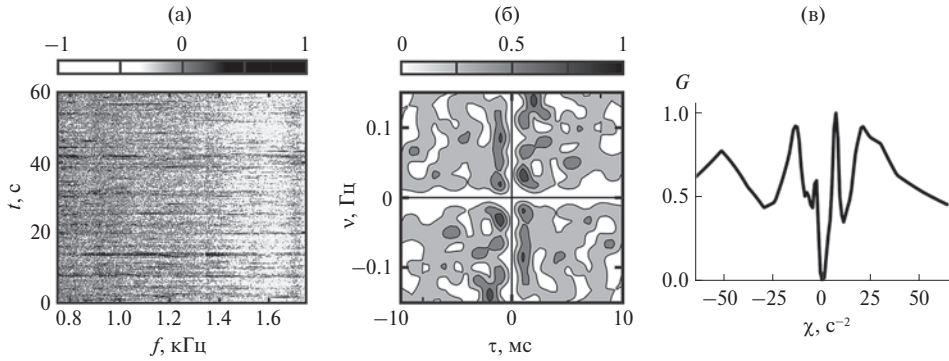


Рис. 2. Нормированные интерферограмма (а), модуль голограммы (б), функция обнаружения (в). Время 14:13.

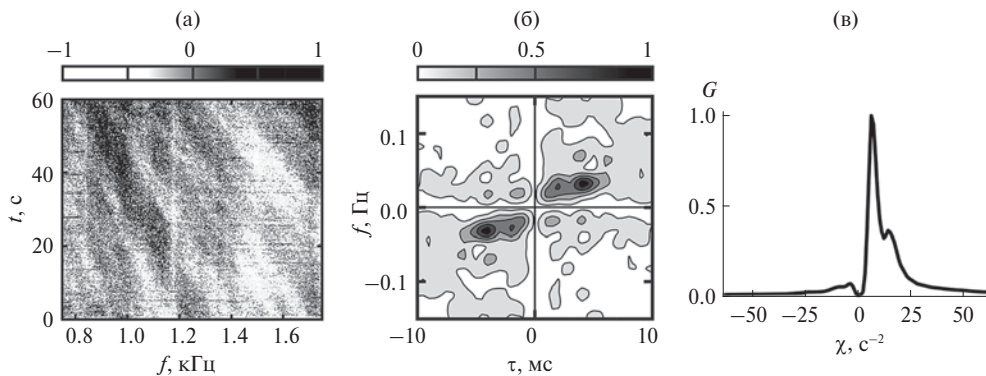


Рис. 3. Нормированные интерферограмма (а), модуль голограммы (б), функция обнаружения (в). Время 14:24.

$$\gamma_x = \frac{\widehat{W}_x(f_*, t_*)}{\widehat{I}(f_*, t_*)}, \quad \gamma_y = \frac{\widehat{W}_y(f_*, t_*)}{\widehat{I}(f_*, t_*)}. \quad (9)$$

Если: а) $\gamma_x > 0, \gamma_y > 0$, то источник расположен в I квадранте ВСП; б) $\gamma_x < 0, \gamma_y > 0$ – во II квадранте; в) $\gamma_x < 0, \gamma_y < 0$ – в III квадранте; г) $\gamma_x > 0, \gamma_y < 0$ – в IV квадранте.

Эксперимент проводился в акватории глубиной $H = 8-10$ м Черноморского побережья, которая была удалена от района надводного судоходства на расстояние $r = 1-2$ км. Три ВСП (ВСП1–ВСП3) располагались на дне. В качестве подводного источника шума использовался малогабаритный автономный необитаемый подводный аппарат (АНПА), спектральные характеристики шумоизлучения которого приведены в [4]. Скорость подводного аппарата $u = 1.5$ м/с, глубина погружения $z = 4$ м. Схема движения аппарата приведена на рис. 1. Характерные расстояния: С–ВСП1 ≈ 990 м, С–ВСП2 ≈ 740 м, С–ВСП3 ≈ 810 м, ВСП1–ВСП2 ≈ 450 м;

ВСП1–ВСП3 ≈ 440 м; ВСП2–ВСП3 ≈ 410 м; ВСП1–линия ВСП2–ВСП3 ≈ 390 м. Здесь С – точка старта. Прямой галс – начало 14:13, окончание 14:23:30; обратный галс – начало 14:24, окончание 14:31.

Частотный диапазон $f = 0.8-1.7$ кГц. Параметры обработки: $\Delta t = 60$ с, $t_1 = 1.5$ с, $t_2 = 0.5$ с, $J = 30$. Обработка повторялась для последующих временных интервалов, но сдвинутых относительно предыдущего на интервал $\delta T = 60$ с. За время эксперимента было сформировано $N = 17$ временных интервалов, позволявших отследить динамику движения АНПА. В точке С входные отношения сигнал/помеха q_0 для каналов звукового давления ВСП оцениваются как $q_0 = -8.8$ дБ (ВСП1), $q_0 = -10.9$ дБ (ВСП2), $q_0 = -11.1$ дБ (ВСП3).

Для трех моментов времени результаты обработки по каналу звукового давления ВСП1 приведены на рис. 2–4. С целью повышения контрастности на интерферограммах вырезаны средние значения. На голограммах вдоль осей времени и частоты отфильтрованы узкие

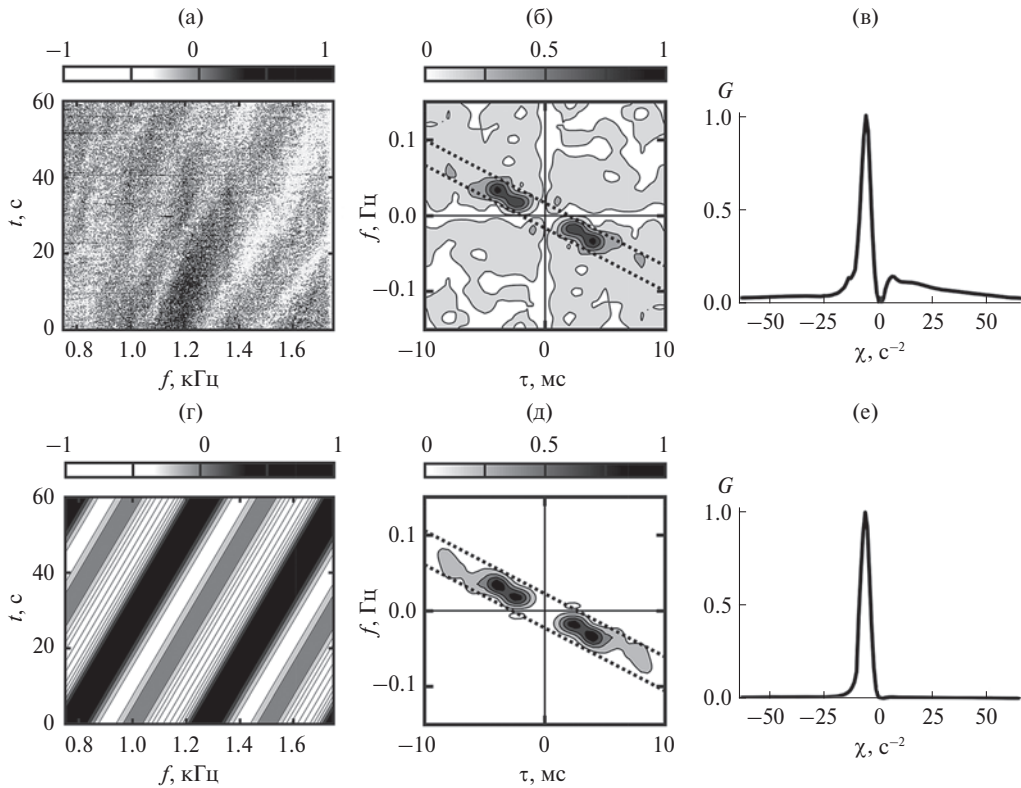


Рис. 4. Нормированные интерферограммы (а, г), модули голограмм (б, д), функции обнаружения (в, е): а, б, в — до очищения от помехи, г, д, е — после очищения от помехи. Время 14:29.

полосы спектральной плотности, отвечающие неподвижным надводным судам и поверхностному волнению соответственно.

В первую минуту эксперимента (рис. 2) интерференционные полосы имеют вид горизонтальных линий, не позволяющих судить об обнаружении источников звука. Голограмма позволяет осуществлять независимые отображения различных источников. На функции обнаружения наблюдаются АНПА и одно надводное судно, приближающиеся к ВСП1 ($\chi > 0$), а также два надводных судна, удаляющиеся от него, $\chi < 0$. После разворота АНПА (рис. 3) угловой коэффициент наклона локализованных полос, расположение фокальных пятен и пика функции обнаружения демонстрируют приближение АНПА к ВСП1. Надводное судно не наблюдается. За две минуты до окончания эксперимента (рис. 4) интерферограмма, голограмма и функция обнаружения указывают на удаление АНПА от ВСП1. Надводные суда не обнаруживаются. На рис. 4 также показан механизм очищения голограммы от помехи и восстановления интерферограммы,

голограммы и функции обнаружения, который использовался при оценках пеленга АНПА. До очищения интерференционные полосы размыты (рис. 4а). Фильтрация спектральной плотности сигнала на голограмме проводилась в полосе, показанной пунктиром (рис. 4б).

На рис. 5 приведены временные зависимости $\phi(t)$ пеленга АНПА, регистрируемые ВСП1. Модельная зависимость основана на данных экспериментальной траектории движения подводного аппарата. Экспериментальная зависимость построена на основе алгоритма (8), (9). Крупномасштабные скачки пеленга на обеих зависимостях связаны с прохождением областей траверса при прямом и обратном галсах. Мелкомасштабные осцилляции пеленга на экспериментальной зависимости обусловлены наличием помехи и непрямолинейным движением подводного аппарата в горизонтальной плоскости.

Полученные результаты показывают высокую помехоустойчивость голографической обработки при обнаружении и идентификации малогабаритного АНПА на фоне помехи и

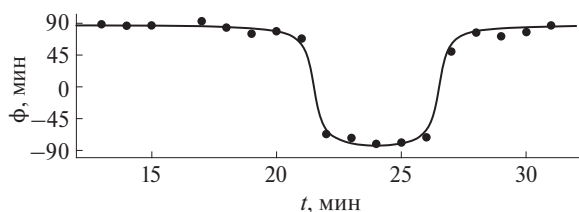


Рис. 5. Модельная (сплошная линия) и экспериментальная (точки) временные зависимости пеленга $\phi(t)$.

интенсивного надводного судоходства. Подводный аппарат обнаруживался и локализовался на всех дальностях, которые были заданы условиями проведения эксперимента.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-61-10024, <https://rscf.ru/project/23-61-10024/>.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чупров С.Д. Интерференционная структура звукового поля в слоистом океане. Акустика океана. Современное состояние. М.: Наука, 1982. С. 71–82.
2. Казначеев И.В., Кузнецов Г.Н., Кузькин В.М., Пересёлков С.А. Интерферометрический метод обнаружения движущегося источника звука векторно-скалярным приемником // Акуст. журн. 2018. Т. 64. № 1. С. 33–45. <https://doi.org/10.7868/S0320791918010100>
3. Гордиенко В.А. Векторно-фазовые методы в акустике. М.: Физматлит, 2007. 480 с.
4. Хворостов Ю.А., Матвиенко Ю.В. Характеристики собственного шумоизлучения малогабаритного АНПА // Подводные исследования и робототехника. 2019. № 4 (30). С. 58–63.

HOLOGRAPHIC METHOD OF LOCALIZATION OF UNDERWATER NOISE SOURCE IN SHALLOW WATER

V. M. Kuz'kin^a, Yu. V. Matvienko^b, S. A. Pereselkov^c, Yu. A. Khvorostov^b

^a*Prokhorov General Physics Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

^b*Institute of Problems of Marine Technology, Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences, Vladivostok, Russia*

^c*Voronezh State University, Voronezh, Russia*

Presented by Academician of the RAS G.I. Dolgikh

Holographic signal processing of noise signals by using of the vector-scalar receivers is described. The results of an experiment on the detection and direction estimation of an underwater noise source are presented. The experiment was conducted in Black Sea. The source noise emission was received by vector-scalar receivers. Holographic signal processing made it possible to detect, localize and resolve an underwater source with a low input signal/interference ratio against the background of intensive surface navigation.

Keywords: vector-scalar receiver, noise source, detection, localization, holographic signal processing, signal-to-noise ratio

УДК 534.231

ОЦЕНКА ПРОТЯЖЕННОСТИ ОБЛАСТЕЙ ВОДОПОДОБНОГО ДНА НА АКУСТИЧЕСКИХ ТРАССАХ В МЕЛКОМ МОРЕ

© 2024 г. Д. Д. Сидоров^{1,*}, С. Д. Боджона^{1,2,**}, В. Г. Петников^{1,***}, А. А. Луньков^{1,2,****}

Представлено академиком РАН О.В. Руденко 14.12.2023 г.

Поступило 14.12.2023 г.

После доработки 14.12.2023 г.

Принято к публикации 07.02.2024 г.

Аналитически и в рамках численного моделирования рассмотрена возможность дистанционной оценки размеров областей водоподобных осадков в мелководных шельфовых зонах по потерям при дальнем распространении низкочастотного звука. Под водоподобными понимаются осадки, скорость звука в которых близка к скорости звука в воде, но имеющие значительно большую плотность. Проведен модельный статистический анализ средних по глубине потерь при распространении звука на акустических трассах фиксированной длины в одном из районов Карского моря с известной структурой верхнего слоя дна, которое включает в себя водоподобные области. Продемонстрирована линейная зависимость потерь при распространении звука от протяженности областей водоподобных осадков на низких частотах. На основе этого результата предложена методика дистанционной интегральной оценки горизонтального размера области водоподобных осадков по данным акустического зондирования.

Ключевые слова: потери при распространении звука, арктический шельф, водоподобные донные осадки, дистанционное зондирование, вертикальная цепочка гидрофонов

DOI: 10.31857/S2686740024020137, EDN: KGEVKC

Арктический район Мирового океана привлекает все большее внимание исследователей из различных областей науки. Серьезной причиной для такого внимания является уменьшение площади многолетнего льда, что открывает возможности к изучению и освоению все более северных районов океана в отсутствие ледового покрова. Существенно, что в Арктических шельфовых зонах сосредоточены рекордные запасы углеводородного сырья, и здесь же находятся важные транспортно-логистические узлы, включая Северный морской путь. Одним из методов исследования Арктического шельфа

является дистанционное акустическое зондирование, возможности которого во многом определяются потерями при дальнем волноводном распространении звука на расстояния много большие, чем глубина акватории. Потери, или затухание звука с расстоянием в первую очередь зависят от характеристик морского дна. Верхний слой донных осадочных пород на Арктическом шельфе крайне неоднороден. Этот факт подтверждают результаты инженерной сейсморазведки в одном из районов Карского моря, где удалось получить трехмерное распределение скорости звука в верхнем слое донных осадков в объеме $37\,000 \times 20\,000 \times 80$ м (рис. 1а) [1]. Полученные данные позволили выявить области водоподобных осадков, где скорость звука в дне близка к скорости звука в воде. (При этом плотность дна в этих осадках остается большей, чем плотность воды.) Указанные области выделены черным цветом на рис. 1а. При распространении звука над водоподобными осадками значительная часть

¹Институт общей физики им. А.М. Прохорова
Российской академии наук, Москва, Россия

²Московский государственный технический
университет имени Н.Э. Баумана, Москва, Россия

*E-mail: sidorov.dan.dmit@gmail.com

**E-mail: devibodjona@yandex.ru

***E-mail: petniko@kapella.gpi.ru

****E-mail: lunkov@kapella.gpi.ru

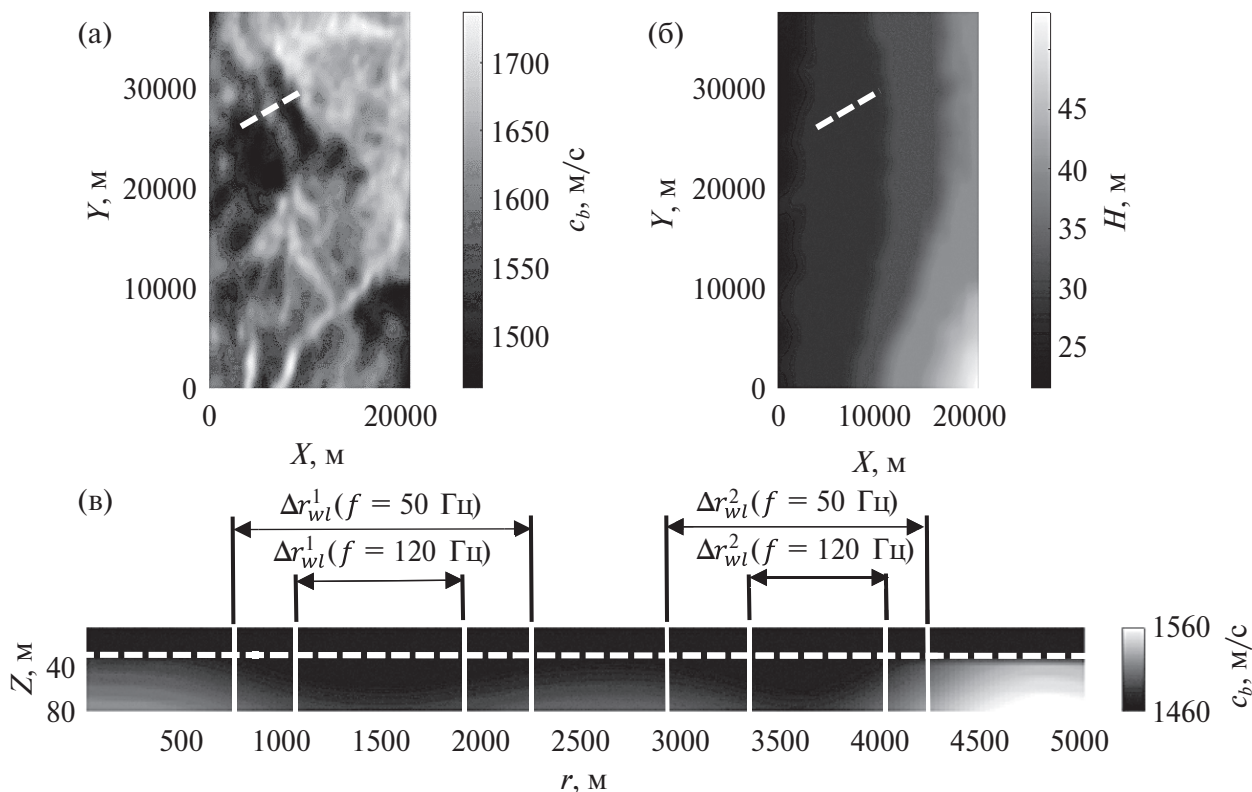


Рис. 1. а – Разрез поля скорости звука в дне $c_b(x, y, z)$ на глубине $z = 55$ м от поверхности воды; б – батиметрия $H(x, y)$ в одном из районов Карского моря; в – вертикальный разрез скорости звука вдоль акустической трассы, отмеченной штриховой линией на (а) и (б), с указанием границ участков водоподобного дна согласно критерию (5) для частоты $f = 50$ и 120 Гц. Данные для одного из районов Карского моря.

энергии безвозвратно «утекает» из водного слоя в дно, что обусловлено малым контрастом скоростей звука между граничащими средами и приводит к аномальному усилению затухания звука [1].

Обнаружение областей водоподобных осадков может иметь важное значение для оперативной океанологии. Трехмерная сейсморазведка и пробное бурение являются очень информативными, но весьма затратными методами. С их помощью затруднительно осуществлять быструю оценку параметров верхнего слоя дна в нужном районе, а также отслеживать их изменение с течением времени. Разработка новых методик, позволяющих дистанционно и оперативно определять наличие и протяженность областей водоподобных осадков, является актуальной задачей.

В настоящей работе проводится аналитическое и численное исследование распространения низкочастотного звука в шельфовой зоне с неоднородным дном с целью обнаружения связи между потерями при распространении звука и

протяженностью областей водоподобного дна, что важно при разработке методик крупномасштабного акустического мониторинга Арктического шельфа. Для исследований выбиралась модель мелководной части Карского моря (рис. 1).

Для упрощенной аналитической оценки потерь при распространении применяется метод нормальных волн (мод). Будем рассматривать такие звуковые частоты, при которых в волноводе постоянной глубины H имеется только одна энергонесущая мода. На Арктическом шельфе, средняя глубина которого не превышает 50 м, такая ситуация не является экзотической и может реализовываться даже на звуковых частотах (более 20 Гц). В адиабатическом приближении комплексная амплитуда звукового давления, сформированного первой модой, в конце неоднородной трассы на глубине z записывается как

$$p(z; R) = A_1(z) \exp\left(i \int_0^R \xi_1(r) dr\right), \quad (1)$$

где $A_1(z)$ – амплитуда 1-й моды. (Здесь и далее при анализе предполагается, что величина $A_1(z)$

не зависит от длины акустической трассы R , т.е. ослабление звукового поля, обусловленное цилиндрическим расширением фронта волны, скомпенсировано.) $\xi_1(r) = q_1(r) + i\gamma_1(r)/2$ – горизонтальное волновое число 1-й моды с учетом затухания $\gamma_1(r)/2$. Неоднородность вдоль трассы обусловлена только неоднородной структурой дна. Предположим, что дно состоит из чередующихся участков водоподобных и неводоподобных осадков. Общая длина участков первого типа составляет Δr_{wl} , второго – $\Delta r_{nw} = R - \Delta r_{wl}$.

Коэффициент затухания первой моды для водоподобных участков будем считать независящим от расстояния r . Обозначим его $\gamma_{wl}/2$. Аналогично для неводоподобных – $\gamma_{nw}/2$. Ранее было показано [2], что коэффициент γ_{wl} минимум на порядок превышает γ_{nw} . Это связано с тем, что в области водоподобного дна первая мода является вытекающей. Для рассматриваемых условий Карского моря $\gamma_{wl} \sim 10^{-3}$ 1/м, $\gamma_{nw} \sim 10^{-4}$ 1/м.

Средние по глубине потери при распространении относительно опорного расстояния r_0

$$TL = -10 \lg \left(\frac{\int_0^{H(R)} |p(z; R)|^2 dz}{\int_0^{H(r_0)} |p_0(z; r_0)|^2 dz} \right), \quad (2)$$

с учетом неравенства $\gamma_{wl} \gg \gamma_{nw}$ можно представить как

$$TL = TL_0 + (10\gamma_{wl} \lg e) \Delta r_{wl}, \quad (3)$$

где TL_0 – потери в отсутствие водоподобных осадков на трассе. Из (3) следует, что в случае распространения низкочастотного звука в одномодовом режиме средние потери TL линейно зависят от протяженности области водоподобных осадков Δr_{wl} . Выражение (3) будет справедливо, если водоподобные области обладают примерно одинаковыми средними характеристиками: скоростью звука c_b , плотностью ρ_b и коэффициентом поглощения α_b .

Здесь следует сказать несколько слов о выборе критерия водоподобности донных осадков. В настоящей работе этот критерий привязан к особенностям волноводного распространения звука в мелком море. Дно считается водоподобным,

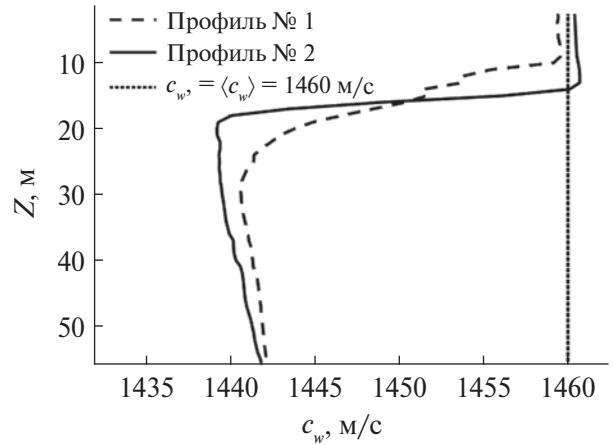


Рис. 2. Профили скорости звука в Карском море.

если средняя по глубине скорость звука $\langle c_b \rangle_\lambda$ в верхнем слое осадков толщиной λ (λ – длина звуковой волны) меньше фазовой скорости первой моды $V_{ph,1}$:

$$\langle c_b \rangle_\lambda < V_{ph,1}. \quad (4)$$

Это условие эквивалентно тому, что первая мода является вытекающей – угол скольжения ее бриллюэновского луча больше угла полного внутреннего отражения на границе вода/дно. В волноводе, имеющем однородный водный слой толщины H со скоростью звука (c_w), первая мода на частоте ω становится вытекающей, когда максимум ее вертикального профиля смещается на дно. При этом действительная часть горизонтального волнового числа моды может быть представлена как:

$$q_1 \approx \sqrt{(\omega / c_w)^2 - (\pi / 2H)^2}.$$

Пользуясь этим выражением и определением фазовой скорости моды $V_{ph,1} = \omega / q_1$, неравенство (4) приобретает вид

$$\langle c_b \rangle_\lambda < \frac{c_w}{\sqrt{1 - (\pi c_w / 2\omega H)^2}}. \quad (5)$$

Для Карского моря ($c_w = 1460$ м/с, $H = 30$ м, $f = \omega / 2\pi = 50$ Гц) отличие средней скорости звука $\langle c_b \rangle_\lambda$ в водоподобных осадках от скорости звука в воде c_w не превышает 3% и уменьшается с частотой. Критерий (5) будет использован далее при обработке данных о скорости звука в дне.

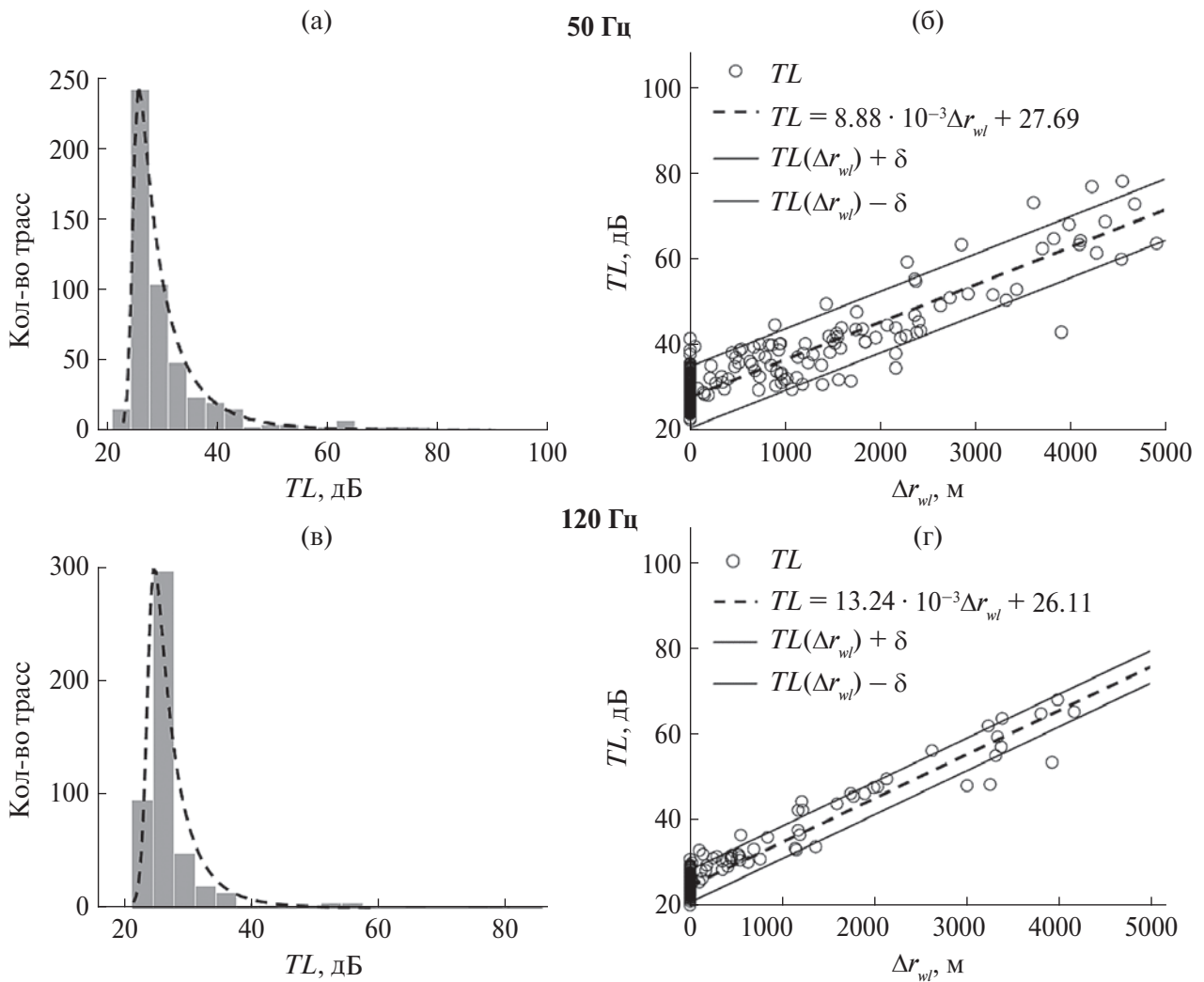


Рис. 3. а, в – Гистограммы потерь при распространении звука TL с огибающими в виде функций Берра 12-го типа; б, г – зависимости потерь при распространении TL от протяженности водоподобных осадков Δr_{wl} с аппроксимирующими прямыми (штриховые линии) и доверительными интервалами δ (сплошные линии) для вероятности 95%. Статистика для 500 акустических трасс длиной $R = 5$ км. Верхний ряд – частота $f = 50$ Гц, нижний – $f = 120$ Гц. Скорость звука в водном слое постоянна – $c_w = 1460$ м/с.

Проверим аналитически полученную линейную связь (3) с помощью прямого численного моделирования методом широкоугольного параболического уравнения (код RAM [3]) для условий Карского моря с известной пространственно-неоднородной структурой поля скорости звука $c_b(x, y, z)$ в донных осадках (рис. 1а). Поверхность дна имеет небольшой наклон: глубина $H(x, y)$ плавно изменяется от 25 до 50 м (рис. 1б). Для получения зависимости потерь TL от протяженности Δr_{wl} в прямоугольнике 37×20 км случайным образом выбираются $N = 500$ трасс длиной $R = 5$ км. Пример

вертикального разреза скорости звука вдоль одной из таких трасс, на которой присутствуют водоподобные осадки, изображен на рис. 1в. Белыми штриховыми линиями показаны границы водоподобного дна по критерию (5) для частот $f = 50$ и 120 Гц.

Анализ результатов пробного бурения показал [1], что пространственная изменчивость плотности дна ρ_b незначительная, поэтому при численном моделировании берется постоянное значение $\rho_b = 1850$ кг/м³. Коэффициент затухания звука α_b в осадках принимается равным

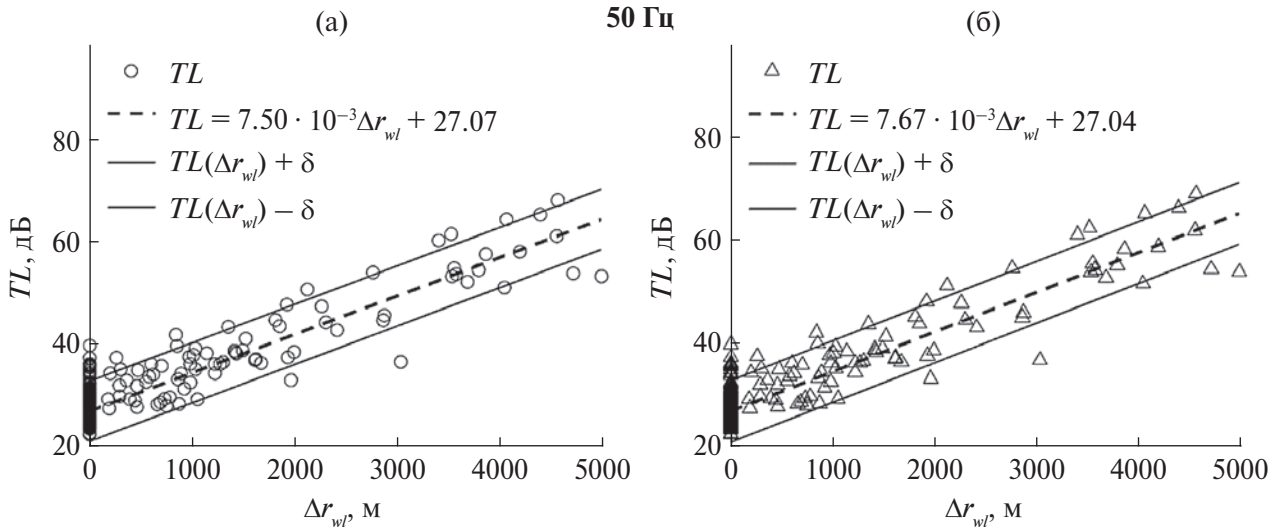


Рис. 4. То же, что и на рис. 3б, но для градиентных профилей скорости звука в воде: а – Профиль № 1, б – Профиль № 2, которые показаны на рис. 2.

0.33 дБ/λ. Плотность воды $\rho_w = 1000 \text{ кг/м}^3$. Рассматривается два типа вертикальных профилей скорости звука в водном слое (рис. 2): постоянный со скоростью $c_w = 1460 \text{ м/с}$ и градиентный $c_w = c_w(z)$.

В численных экспериментах в начале трассы помещается тональный источник звука частоты $f = 50$ или 120 Гц на глубине $z_s = 14 \text{ м}$, а в конце – вертикальная линейная антенна [4], которая перегораживает всю толщину водного слоя и используется, во-первых, для выделения первой волноводной моды и, во-вторых, для получения средних по глубине потерь при распространении TL согласно (2).

Рассмотрим случай постоянной скорости звука в водном слое. Гистограмма потерь при распространении на частоте $f = 50 \text{ Гц}$, построенная по 500 трассам, приведена на рис. 3а. Видно, что большинство потерь попадает в диапазон 25–35 дБ, что главным образом соответствует дну без водоподобных участков. Однако имеется и ненулевой “хвост”, который простирается до значений 80 дБ. Огибающая полученной гистограммы хорошо аппроксимируется функцией Берра 12-го типа (Burr Type XII distribution [5]). На рис. 3б построена зависимость потерь при распространении TL от суммарной протяженности водоподобных осадков Δr_{wl} . Кружками отмечены результаты для отдельных трасс, штриховой линией – линейная аппроксимация, сплошными линиями – границы доверительного интервала

для вероятности 95%. Конгломерат кружков при $\Delta r_{wl} = 0 \text{ км}$ отвечает трассам без водоподобных осадков. Остальные кружки достаточно хорошо ложатся вдоль аппроксимирующей прямой с коэффициентом детерминации $R^2 = 0.85$ (см. табл. 1), что подтверждает адекватность формулы (3). Выпадение некоторых точек из тренда связано с тем, что водоподобные области имеют не совсем одинаковые характеристики, и что правая часть в критерии (5) вычислялась только для одной наиболее распространенной глубины акватории $H = 30 \text{ м}$. Результаты для частоты $f = 120 \text{ Гц}$ (рис. 3в и 3г) демонстрируют меньший разброс ($R^2 = 0.91$), но и меньшее количество точек, отвечающих водоподобному дну. Это обусловлено тем, что с увеличением частоты под критерий (5) попадают все менее протяженные области, что продемонстрировано на рис. 1в. В ситуации, когда профиль скорости звука является градиентным, хорошая корреляция сохраняется только для частоты $f = 50 \text{ Гц}$ (см. рис. 4 и табл. 1).

Исходя из результатов статистической обработки модельных данных для шельфовой зоны глубиной $H = 25\text{--}50 \text{ м}$ можно сделать вывод о том, что при потерях TL более 35 дБ (без учета цилиндрического расхождения фронта) на расстоянии $R = 5 \text{ км}$ и частотах $f = 50\text{--}120 \text{ Гц}$ на акустической трассе присутствуют участок(-ки) водоподобных осадков общей протяженностью не менее $\Delta r_{wl} = 1 \text{ км}$. Наибольшая надежность оценки достигается при постоянстве скорости звука в водном слое.

Таблица 1. Квадрат коэффициента линейной корреляции R^2 на частотах 50 и 120 Гц для различных профилей скорости звука в воде

	$c_w = 1460$ м/с	Профиль № 1	Профиль № 2
50 Гц	0.85	0.83	0.83
120 Гц	0.91	0.48	0.50

Ожидается, что при учете в критерии (4) или (5) изменения глубины вдоль трасс и вертикального профиля скорости звука может быть получена наилучшая корреляция между TL и Δr_{wl} .

Обнаруженные в данной работе линейные зависимости потерь при распространении от протяженности областей водоподобных осадков представляют собой удобные для практики геоакустические характеристики отдельных мелководных районов арктического шельфа, позволяющие по средним по глубине потерям оценивать размеры таких областей. Однако эти линейные соотношения носят универсальный характер и слабо зависят от распределения скорости звука в водном слое только на низких частотах, когда длина акустической волны сравнима с глубиной исследуемой акватории. Для реализации требуется одиночный низкочастотный излучатель и вертикальная приемная цепочка гидрофонов, перекрывающая водный слой по глубине.

БЛАГОДАРНОСТИ

Статья написана по материалам одноименного доклада на 6-й школе-конференции молодых ученых ИОФ РАН “Прохоровские недели”, 2023 г. Доклад был рекомендован к публикации по результатам экспертных оценок как один из лучших.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-72-10121, <https://rscf.ru/project/22-72-10121/>.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Григорьев В.А., Петников В.Г., Росляков А.Г., Терёхина Я.Е. Распространение звука в мелком море с неоднородным газонасыщенным дном // Акуст. журн. 2018. Т. 64. № 3. С. 342–358.
2. Lunkov A., Sidorov D., Petnikov V. Horizontal Refraction of Acoustic Waves in Shallow-Water Waveguides Due to an Inhomogeneous Bottom Structure // J. Mar. Sci. Eng. 2021. V. 9. P. 1269.
3. Collins M.D. A split-step Padé solution for the parabolic equation method // J. Acoust. Soc. Am. 1993. V. 93. P. 1736–1742.
4. Луньков А.А., Петников В.Г. Использование вертикальной приемной антенны для геоакустической инверсии в мелководном волноводе с ледовым покровом // Доклады РАН. Физика, технические науки. 2022. Т. 505. № 1. С. 78–82.
5. Burr I.W. Cumulative Frequency Functions // Ann. Math. Statist. 1942. V. 13. No. 2. P. 215–232.

ESTIMATION OF WATER-LIKE BOTTOM LENGTH ALONG AN ACOUSTIC TRACK IN SHALLOW WATER

D. D. Sidorov^a, S. D. Bodjona^{a,b}, V. G. Petnikov^a, A. A. Lunkov^{a,b}

^aProkhorov General Physics Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

^bBauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

Presented by Academician of the RAS O.V. Rudenko

Analytically and within the framework of numerical simulations, remote sensing of the water-like bottom in shallow water based on low-frequency sound propagation loss is considered. Water-like bottom sediments are understood as sediments in which the sound speed is close to the sound speed in water, but having a significantly higher density. A model statistical analysis of depth-averaged transmission loss is carried out for acoustic tracks of a fixed range in one of the areas of the Kara Sea with a known structure of the upper layer of the bottom, which includes water-like areas. A good correlation between low-frequency transmission loss and the length of water-like bottom is demonstrated. Based on this result, a method for remote integral estimation of the water-like bottom size at an acoustic track between a single source and a vertical array of hydrophones is proposed.

Keywords: transmission loss, arctic shelf, water-like bottom sediments, remote sensing, vertical array of hydrophones